

**Informazioni su questo libro**

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

**Linee guide per l'utilizzo**

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

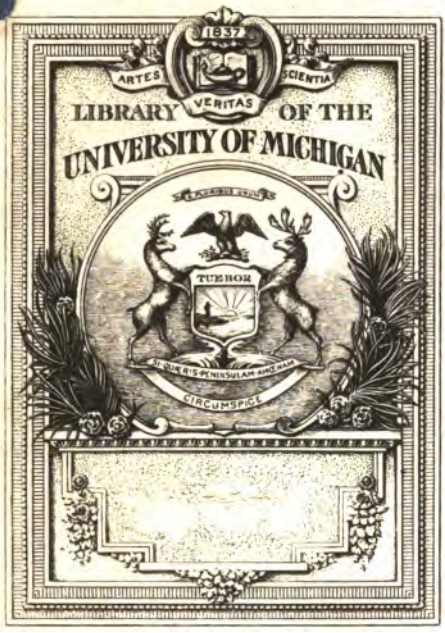
+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

**Informazioni su Google Ricerca Libri**

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

4515


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

QA
35
.C3
17

# ELEMENTI
DI
# MATEMATICA,
NE' QUALI SONO
Con miglior ordine e nuovo metodo dimostrate
*Le più nobili e necessarie proposizioni*
DI
EUCLIDE, APOLLONIO, E ARCHIMEDE
DA

## ODOARDO CORSINI
CH. REGOLARE DELLE SCUOLE PIE.

*EDIZIONE SECONDA VENETA,*
Accresciuta ed emendata; aggiuntavi la Geometria Pratica del medesimo Autore.
## PARTE PRIMA.


IN VENEZIA,
MDCCLXV.
APPRESSO ANTONIO PERLINI.
*CON LICENZA DE' SUPERIORI.*

Ὡς οἷός τ' ἆρα μάλιστα προσακτέον, ὅπως οἱ ἐν τῇ καλλίστῃ Πόλεσι, μηδενὶ τρόπῳ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ἀφέξονται. καὶ γὰρ τὰ πάρεργα αὐτῆς ὐ σμικρά.

Πλάτων. Πολιτ. Ζ'.

*Deveſi dunque ſommamente inſiſtere, che quelli, che abitano queſta belliſſima tua Città, non traſcurino la* GEOMETRIA : *imperocchè quelle coſe ancora, che ella tratta per incidenza, non ſono piccole.*

Platone Lib. VII. della Repub.

Hist of Science
Gandolfi
10-23-28
1817



# INDICE

## DE' LIBRI, CAPITOLI ec.

### Della Prima Parte degli Elementi di Matematica.

LIBRO I. DElle Grandezze in generale, ovvero delle Proporzioni, che si ritrovano fra le grandezze. Pag. 1
*Definizioni*. 2
*Osservazion* prima. 6
*Dimanda*, o Postulato. 11
*Assiomi*, o primi Principj. 12
*Proposizioni*. 17
LIBRO Secondo. Delle Proprietà delle Ragioni. 27
*Proposizioni*. 36
LIBRO Terzo. Delle linee rette, che concorrono, o si congiungono insieme, e degli Angoli, che da quelle sono formati. 43
*Definizioni*. 44
*Postulati*. 47
*Proposizioni*. 48
LIBRO Quarto. Delle Linee rette, che mai non s'incontrano insieme, o sono Parallele. 61
*Definizioni*. 62
*Proposizioni*. 63
LIBRO Quinto. Delle Linee rette, che s'incontrano con la circonferenza del Circolo, o fra loro dentro del Circolo; e degli Angoli che da quelle sono formati. 72
*Definizioni*. *ibid.*
*Proposizioni*. 75
LIBRO Sesto. Delle Superficie, ovvero delle figure rettilinee, e delle loro proporzioni e misure. 86
*Definizioni*. *ibid.*
*Proposizioni*. 87

LIBRO Settimo. Delle Figure ſimili, loro proporzione e miſura. 100
*Definizioni.* *ibid.*
*Propoſizioni.* 101
LIBRO Ottavo. Dei Poligoni regolari, loro Formazione e miſura. 117
*Definizioni.* 118
*Propoſizioni.* 119
LIBRO Nono. Delle Superficie e Sezioni dei Solidi, loro proprietà e miſure. 136
*Definizioni.* 137
*Propoſizioni.* 141
LIBRO Decimo. Della mole o ſolidità dei Corpi, loro proporzioni e miſure. 164
*Propoſizioni.* 165
LIBRO Undecimo. Delle Curve e Sezioni Coniche, e delle loro proprietà. 182
*Definizioni.* 183
*Propoſizioni.* 186
LIBRO Duodecimo, Della Miſura delle Figure o Sezioni Coniche, e dei loro Solidi. 225
*Propoſizioni.* 226

PRE-

# PREFAZIONE.

I. CHE fra le Scienze più nobili, delle quali ſuol eſſere mirabilmente adorno, e riſplendere l'intelletto umano, debbaſi in primo luogo annovetare la MATEMATICA, non vi è certamente alcuno, che nol conoſca, e con ingenuo candore non lo confeſſi.

II. Imperocchè ſe rimiriſi, o il numero quaſi infinito delle verità ſottiliſſime, ch' ella contiene; o la gloria degli Uomini, che nello ſtudio di quella con lunga non interrotta ſerie fiorirono; o l'utilità ſingolare, che da lei come da limpido, puriſſimo ed ineſauſto fonte ſovra delle arti più ragguardevoli ſi deriva, ben ſi conoſce che per ogni parte la Matematica riputar ſi deve di tutte l'altre incomparabilmente più nobile e più perfetta.

III. Quello però, che ſovra di ogn'altro pregio più vivamente in eſſa riſplende, e quaſi forma il diſtintivo carattere di queſta Scienza, è la certezza infallibile, e la chiarezza ammirabile, che in qualſivoglia delle ſue parti ritrovaſi: ſicchè dove nelle altre Scienze fra denſe tenebre di oſcurità, fra l'incertezza dei loro principj, e fra l'incredibile varietà di opinioni appena vedeſi talora riſplendere, o traſpirare un qualche piccolo ragio, o ſcintilla di verità, nella ſola Matematica ſempre rimiraſi conſtantemente con puriſſimo, ſereno, e vivo lume la verità medeſima; onde la mente umana, che di niuna altra coſa più fortemente dilettaſi, che del vero, nelle matematiche ſpeculazione ritrova tutto il piacere, e la perfetta quiete di quell' inſaziabile ardore e brama viviſſima, che la traſporta per diſcoprirlo.

IV. E tale fu certamente il parere di quegli illuſtri Filoſofi, che sì altamente commendarono lo ſtudio di di queſta Scienza; e francamente aſſerirono che ſenza il lume e la direzione di quella, ogni altra Scienza era per eſſere vile, manchevole, e diſadorna; fino a ri-

putare indegni dei loro ammaestramenti e dottrine quei Giovani, che prima non avessero con le ali della Geometria imparato a distaccare il pensiero da questi oggetti sensibili, che sì frequentemente c'ingannano, e sciogliere francamente il volo alle più astratte e sublimi contemplazioni. Queste sì distinte, e sì giuste lodi, ch' essi concessero alla Matematica, meriterebbero ben giustamente di essere quì da me riferite, se già non fossero state distintamente espresse e raccolte da tanti illustri Scrittori, che s'ingegnarono di far conoscere con questo ancora l' utilità e la bellezza di questa Scienza; e se l'universale sentimento, e costante parere di tutti i Savj non rendessero appresso tutti infallibile, e manifesta una tal verità, la quale più vivamente io desidero che i Giovani istessi conoscano dall'esperienza medesima, nel riflettere benchè leggiermente alla serie e bellezza di quelle Proposizioni, che in questi Elementi si trovano, piuttosto che dall' autorità dei Filosofi e Scrittori, che l'asserirono. Sarà dunque più convenevole e necessario l'esporre quì brevemente, come suol farsi nel principio di qualsivoglia Scienza, il nome, l' origine, l'accrescimento, l'oggetto, e la divisione della Matematica, per riconoscere nel tempo stesso la serie o l'ordine, con cui si debba apprendere una Scienza, che per tanti capi e ragioni è la più bella, la più utile, e la più dilettevole di quante furono dagli Antichi a noi tramandate.

V. E quanto al nome di Matematica, egli altro appunto nella voce greca, da cui deriva, non significa che *scienza*, *dottrina*, ed *erudizione*; quasichè il nome comune di tutte le altre Scienze alla Matematica sola, come alla più nobile, e quasi fonte e regina di tutte le altre, o come suol dirsi, per eccellenza convenisse.

VI. Quanto all'origine, tralasciando quì le opinioni e leggierissime conghietture di tutti quelli, che si avvisarono di rinvenirla in Adamo, e nei primi Patriarchi lodati dalle divine Scritture, è comunissima ed universale opinione di tutti i Scrittori, e singolarmente di Platone, Aristotile, Erodoto, Laerzio, Teone, Proclo,

e Stra-

e Strabone, che ella ritrovata fosse dagli Egizj e Fenicj: ficchè appresso queste nazioni prima di tutte le altre fiorissero le Matematiche; o perchè la chiarezza e tranquillità dell'aria dassero loro opportunità migliore di osservare il moto delle stelle, il che fare non potevasi senza la Geometria; o perchè la mercatura e navigazione, alle quali erano mirabilmente attenti i Fenicj, gli inducessero ad esercitare l'Aritmetica, e l'Astronomia; o perchè finalmente il Nilo nel crescere ogni anno, ed inondare le campagne vastissime dell'Egitto, ed in conseguenza nel confondere con le sue torbe i confini dei campi gli obbligasse a ritrovare la maniera di misurare i terreni, distinguere le antiche loro figure, e rendere così a ciascuno tenuta ed estensione eguale a quella, ch'ei possedeva. Il nome stesso di Geometria, o *dimensione della terra*, ben chiaramente dimostra, che i primi semi ed il primo uso di questa Scienza derivarono dal misurare i terreni; benchè in breve quell'Arte con ammirabile felicità trasportata ed applicata poi fosse alla contemplazione e misura di qualsivoglia altro genere di quantità, come più sotto dimostreremo.

VII. Chi fra gli Egizj avesse la gloria di ritrovare questa Scienza o Dottrina, non può facilmente affermarsi, poichè Platone asserisce essere questi stato il dottissimo Thot, o Theut, il quale fioriva al tempo di Thamo Re dell'Egitto; ed altri pensano, che questa lode debbasi a Meride Re di Egitto, che, al dire di Erodotto, innalzò le piramidi così famose, e numerate per la loro altezza fra le meraviglie del Mondo; ed Aristotile finalmente con altri molti son di parere che i Sacerdoti Egizj fossero i primi ad inventare questa Scienza; poichè liberi da tutte le cure e pensieri, ebbero unicamente a cuore il promuovere, e conservare le Scienze tutte.

VIII. Questi primi lumi, o principj di Matematica trasportati furono in breve dall'Egitto nella Grecia, Poichè Talete, Pitagora, Democrito, Eudosso, Platone, e quasi tutti i più illustri antichi Filosofi, penetrando

ne' più barbari e più remoti paesi, e passando singolarmente in Egitto per essere ammaestrati nelle Scienze che ivi fiorivano, tornarono ad arrichire le Patrie loro con le più nobili discipline, che avevano appreso: onde a Pitagora istesso ed a Talete fu sempre data la gloria di avere ritrovata ed insegnata nella Grecia la Matematica; e si conservano ancora alcune delle più nobili Proposizioni, che da Talete furono dimostrate, e nella serie di questi Elementi corrispondono alla 9. 11. 16. del Lib. III. ed alla 21. 22. 23. 24. del Libro V.

IX. Nell'antichissima Scuola, o Setta Jonica successe a Talete Anassimandro, celebre anch' egli e per la Descrizione Geografica della Terra ch' egli compose, e per l' obliquità del Zodiaco ch' egli prima di ogni altro osservò, e finalmente per un Compendio della Geometria, che al dire di Suida fu da lui pubblicato. Anche Anassagora, che dopo Anassimene successore di Anassimandro insegnò nella Scuola medesima di Talete, fra le più nobili speculazioni di Matematica ritrovò la dimensione, o quadratura della Parabola, siccome attesta Plutarco.

X. Fu nondimeno incomparabilmente più celebre fra tutti gli altri il divino Pitagora, il quale avendo mirabilmente accresciuta la Geometria, che appresa egli aveva o da Talete, o dagli Egizj medesimi, fu riputato l'inventore di quella Scienza appresso dei Greci; e lasciò per sempre immortale la gloria di sue speculazioni non solo intorno ai numeri, che furono il principale oggetto e dottrina dei Pitagorici, ma all'altre spezie ancora di quantità: come vedesi nelle Proposizioni 12. del Libro IV. e 26. del Libro VI. e molto più ancora nella mirabile Proposizione 20. del Libro VII. per l'invenzione della quale credesi ch' egli sacrificasse alle Muse per vittima ben cento buoi.

XI. La fama e l' esempio di così grande Filosofo dovevano ben vivamente risvegliare ed accendere gli animi di tutti quelli, che con tanta gloria fiorirono nella Scuola Italica da lui fondata; siccome in fatti si videro da quella uscire i Geometri ed Astronomi più ri-

rinomati ed illustri ; come Democrito, Filolao, Ipparco, Teeteto, Enipode, Archita, celebri per le ammirabili e prodigiose loro invenzioni sì nobilmente commendate dagli antichi Scrittori, e ristorare con egual gloria dai più moderni.

XII. Platone istesso, il più nobile ed illustre Filosofo che risplendesse in Atene, mirabilmente accrebbe la gloria e lo splendore dei Pitagorici, e della Geometria. Poichè avendo egli prima appreso da questi, e da Teodoro di Cirene la Matematica, promosse con tale spirito e fervore lo studio di questa Scienza, che oltre all'averne in varj luoghi delll'Opere sue commendato con espressioni vivissime la bellezza e necessità, non volle giammai ricevere nell' Accademia da sè fondata chi prima istruito non fosse e adornato dei lumi di Geometria; sentimento, e costume che rimase altamente impresso nell' animo di Senocrate e di altri Platonici, riferiti e commendati da Proclo, e di Aristotile istesso, nell'Opere del quale di tratto in tratto traspirano alcuni lumi, o principj di questa Scienza.

XIII. Ma più lodevole e più felice fu Eudosso, il quale dopo essere con Platone passato in Egitto, ed aver appreso da quei Geometri le dottrine loro più nobili, mirabilmente le accrebbe ; e prima di ogni altro, per quanto credesi, dimostrò la Scienza delle Proposizioni, che da me vien esposta nel I. Libro degli Elementi; oltre alle varie speculazioni intorno le linee curve e l' Astronomia, che da lui furono pubblicate.

XIV. Sull' esempio e sulle dottrine di così illustre Maestro ritrovò Menecmo le Sezioni Coniche ; e poco dopo Brisone, Antifone, ed Ippocrate Chio tentarono la dimensione o quadratura del Circolo ; Perseo trovò la descrizione, e misura della Spirale ; siccome Ippocrate istesso, Archita, Filone, Diocle, Sporo, Erone, e Nicomede con varj metodi espressi e riferiti da Eutocio sciolsero il celebre Problema della duplicazione del Cubo, che dall'oracolo di Apollo, o per meglio dire da Platone, affine di accendere i Greci allo studio di questa Scienza, fu loro proposto.

XV.

XV. Benchè nondimeno sottili, mirabili, ed ingegnose fossero tutte queste scoperte degli antichi Geometri, erano però sì divise e disgiunte, che in esse potevasi ben giustamente bramare una qualche serie ed ordine, con cui si potessero dimostrare; sicchè, a guisa dell'altre Scienze, nella Matematica ancora dalle prime e più facili cognizioni passar si potesse alle più oscure e difficili.

XVI. Questa gloria, ed impresa, benchè prima tentata da Archita, Leodamante, Teeteto, Teudio, Ermotimo, Ippocrate, e Leonte, fu riserbata ad Euclide; il quale ordinando, al dire di Proclo, molte cose di Eudosso, e dimostrandone molte da Teeteto, e da altri Geometri ritrovate, compose l'intera serie degli Elementi, che tuttora si ammirano, e da innumerabili Scrittori furono sempre commendati, e con travaglio e pena gradissima illustrati.

XVII. La patria, e il tempo, in cui visse un sì famoso Geometra, e sì benemerito di questa Scienza, è rimasto involto nel silenzio degli Scrittori, e nelle varie opinioni degli Interpreti; moltissimi dei quali l'hanno, per la simiglianza del nome, infelicemente confuso con Euclide di Megara, che con Platone fu discepolo, ed amantissimo seguace di Socrate. Egli è pertanto chiarissimo, che il nostro Euclide fu ben diverso dal Megarense; non solo perchè fra l'Opere di questo, minutamente riferite da Laerzio, niuna menzione vedesi fatta degli Elementi di Geometria, ch' ei componesse; e perchè l'indole e carattere del Megarense eristico e contenzioso fu differente dal placido, e tranquillo, e soavissimo tratto del nostro; ma singolarmente ancora perchè il Megarense fu scolare di Socrate, e condiscepolo di Platone; dove il Geometra fu posteriore a Menecm scolare di Edosso. In fatti, per quanto giudica l'istesso Proclo, Euclide il Geometra visse, e con lode insegnò in Alessandria nel regno di Tolomeo figliuol di Lago intorno a 300. anni prima della nascita del Redentore, quando cento anni prima era già seguita la morte del Megarense.

XVIII.

XVIII. La serie, il numero, e l'ordine degli Elementi, che furono da lui pubblicati, può facilmente offervarsi da chi lo desidera nell'Opera istessa: basterà qui riflettere, che XIII. furono i Libri da lui pubblicati; a' quali furono da Appollonio aggiunti il XIV. e XV. dei quali resta tuttora il compendio fattone da Ipsicle Alessandrino, accresciuto finalmente da Francesco Flussate Candalla, col XIV. ed ultimo Libro degli Elementi,

XIX. Benchè però così nobili, numerose, ed ingegnose fossero le verità discoperte e dimostrate da questi illustri Geometri, potevasi nondimeno credere, che la Geometria fusse anche rozza e disadorna, ed unicamente occupata nei principj, e primi semi; quando Archimede, lume ed ornamento chiarissimo dell' Italia nostra, e di Siracusa, in cui nacque, con le ammirabili, e divine speculazioni ed Opere, che ci pubblicò, non solamente a guisa di splendentissimo Sole oscurò la gloria de' passati Geometri; ma con spirito ancora più generoso, e felice sorpassò quasi i confini e l' angustie dell' intelletto umano, portando questa Scienza al più sublime, e perfetto grado, che si fosse giammai veduto. Basta il riflettere alla dimensione del Circolo, alla quadratura della Parabola, alla dottrina delle Spirali, delle Galleggianti, dell' Equiponderanti, delle Conoidi, e Sferoidi, e singolarmente ancora ai due Libri della Sfera, e Cilindro, per essere appieno convinto, che le Opere di così illustre Scrittore sono il più bel tesoro, e il frutto, o contrassegno più nobile degli studj di tutta l' Antichità.

XX. Merito, e gloria uguale avrebbe forse anche avuto Conone Samio, se l'immatura sua morte rapito non l'avesse alla speranza e al desiderio di tutti, e di Archimede singolarmente, che rammentando con lode la finissima di lui sottigliezza nell'inventare, e la facilità prodigiosa nel dimostrare, ne pianse amaramente la perdita. A ristorarla in parte, e a rendere ancora più compite e più facili l'Opere di Archimede, quasi nel tempo istesso fiorirono Eratostene ed Apollonio, che

dal-

dalla Città di Perge in Panfilia chiamossi *Pergeo*, e per l' innumerabili sue speculazioni ottenne il pregio ed il nome di *gran Geometra*. Furono da lui composti e pubblicati VIII. Libri delle Sezioni Coniche, il V. VI. e VII. de' quali, dopo essere stati per molti secoli smarriti, trovati poi furono, e dopo tradotti dal Testo Arabico pubblicati.

XXI. Dopo sì illustri Geometri, che furono i primi lumi e maestri di Matematica, seguano adesso in lunga serie anche quelli, che se non giunsero a meritare egual gloria, ebbero però il coraggio d'imitarli, o tramandarono ai posteri le loro dottrine in varie parti accresciute, e con chiarissimi e lunghi comenti illustrate. Così Teodoro, Ipparco, Menelao, Sereno, Gemino, Eutocio, Teone, Diofanto, Proclo, ed altri moltissimi saranno sempre degni di somma lode; e sopra di tutti gli altri Pappo Alessandrino, che per avere diligentemente raccolte in VII. libri le Proposizioni più nobili degli antichi Geometri per sottrarle all'ingiuria dei tempi, meritava ben giustamente, che i due primi suoi Libri per quell'istessa infelicità non perissero.

XXII. Questa brevissima serie ed istoria fin quì tessuta intorno all' origine ed accrescimento della Matematica, potrà bastare, per quanto io giudico, al piacere e all' erudizione di quelli, che volgono la prima occhiata, e stendono il primo passo nell'ampio ed infinito campo di questa Scienza. Che se mi cadesse il pensiero di commendare appieno, o nominare almeno quegli uomini illustri, che ne passati due secoli, e all' età nostra hanno mirabilmente accresciuta, con nuovi metodi adornata, e posta in nuova luce ed aspetto la Matematica, non avrei giammai fine, poichè sempre maggiore e copiosa serie di cose luminosissime s' incontrerebbe. Mi sarà nondimeno a cuore di tessere più opportunamente altrove, e riferire distintamente le notizie dell'Opere, e della vita de' Geometri, singolarmente nell'*Istoria Matematica*, che sull' esempio di quella, che dei Filosofi ci lasciò lo Stanlejo, sarà da me pubblicata. Intanto spiegherò quì brevemente l'oggetto, le par-

parti, o la divisione della Matematica, e l' ordine con cui furono da me disposti questi Elementi.

XXIII. La Matematica, a similianza di qualsivoglia Scienza, deve essere indirizzata a un qualche oggetto, intorno al quale tutta si aggiri, e consideri le proprietà che gli competono.

Questo oggetto della Matematica è la *grandezza*, *quantità*, ed *estensione*; vale a dire tutto quello, in cui sono, o si concepiscono essere alcune parti, sicchè a riguardo di quelle possa paragonarsi con altra cosa, e chiamarsi uguale, maggiore, o minore di quella: essendo chiarissimo, che non può giammai cosa alcuna paragonata con altra cosa chiamarsi uguale, maggiore, o minore di quella, se ella in sè non contenga uguale, o maggiore, o minor numero di parti di quelle, che si contengono, o si concepiscono essere contenute nell' altra.

XXIV. E perchè si sogliono communemente distinguere due generi di quantità, o grandezza, l'una delle quali dicesi *continua*, per essere composta di varie parti continuate e connesse; l' altra *discreta*, poichè risulta da varie parti fra loro disgiunte o divise, anche la Matematica dividesi due Scienze, o parti diverse; sicchè quella parte, che considera, ed ha per oggetto la quantità continua, dicesi Geometria; e quella che ha per oggetto la moltitudine, il numero, o la quantità discreta, chiamasi Aritmetica.

XXV. E poichè le parti, che formano la quantità continua, o si stendono solamente in lungo senza larghezza alcuna; o formano lunghezza insieme, e larghezza; o finalmente lunghezza e larghezza insieme, e profondità, risultano tre spezie di quantità continua, *linea*, *superficie*, e *corpo*; sicchè la linea abbia lunghezza senza larghezza alcuna, la superficie lunghezza insieme e larghezza, e nel corpo si ritrovino tutte le dimensioni di lunghezza, larghezza, e profondità.

XXVI. Da questa chiarissima divisione della grandezza, o quantità continua nelle tre spezie già numerate devesi certamente dedurre, come da proprio fonte

la

la serie e l'ordine, che osservar si deve nelle varie parti della Matematica: siccome giovami credere di averlo esattamente osservato in questi Elementi.

XXVII. 1. Parlerò dunque nel primo Libro delle Grandezze in generale, e delle Ragioni o Proporzioni che risultano dal loro confronto.

2. Nel secondo delle proprietà, che competono alle ragioni medesime, o delle operazioni, che sopra quelle si fanno. E poichè tutto quello, che si dimostra in questi due Libri, riguarda ed abbraccia qualsivoglia genere di quantità, o sia discreta, o continua, essi contengono i principj di tutta la Matematica; onde a riguardo singolarmente di questi due Libri si possono questi chiamare Elementi di Matematica, dove a riguardo di tutti gli altri dir si potrebbero Elementi di Geometria.

3. Nel terzo si tratterà della prima spezie di quantità continua, cioè delle Linee; considerando le linee rette che fra loro s' incontrano, e gli angoli che ne risultano.

4. Nel quarto delle linee rette che mai non s'incontrano insieme, o sono equidistanti, o parallele.

5. E nel quinto delle linee rette che s' incontrano insieme dentro del circolo, o con la circonferenza del circolo istesso.

6. Nel sesto si parlerà della seconda spezie di quantità continua, o della Superficie: considerando in generale qualsivoglia figura, ed esponendone le proporzioni e misure.

7. Nel settimo si spiegheranno le proporzioni e misure delle Figure simili.

8. E nell'ottavo le proprietà delle Figure, o Poligoni simili e regolari.

9. La terza spezie di quantità continua, vale a dire i Corpi o Solidi saranno considerati nel nono e decimo Libro, cioè nel nono le loro sezioni, e superficie.

10. E nel decimo la loro mole, o solidità.

11. Gli ultimi due Libri saranno delle Sezioni Coniche,

che, e loro proprietà, parlando nell'undecimo delle sezioni, o figure.

12. E nel duodecimo delle misure loro, e dei solidi, o conoidi, che da quelle si generano.

XXVIII. Oltre a quest'ordine dei Libri, che è certamente il più facile e più naturale, poichè egli segue efattamente l'ordine istesso delle materie, che trattare si debbono, ho procurato ancora di stendere e distribuire le Proposizioni di qualsivoglia Libro in maniera tale, che in esse ritrovisi la serie istessa, che vedesi nelle verità che propongono, sicchè dalle più semplici si passi insensibilmente alle più composte: come potrà chiaramente vedersi in qualsivoglia Libro, e per esempio nel III.

XXIX. Ma perchè qualsivoglia Proposizione di Matematica, o sia problema, in cui propongasi qualche cosa da farsi, o Teorema, in cui debbasi dimostrare qualche proprietà di una cosa già fatta, sempre si prova con Assiomi, Definizioni, o Proposizioni già dimostrate, le quali perciò si veggono citate in margine, ho poste in fronte a qualsivoglia Libro le sue particolari Definizioni, vale a dire, le spiegazioni di quelle voci, che vi si adoprano; e nel primo Libro alcuni Principj ancora, cioè proposizioni chiarissime, che non avevano bisogno di maggior prova.

XXX. Poichè nondimeno vi sono alcuni Assiomi, o Principj più universali, che indifferentemente si adoprano in qualsivoglia Libro, ho giudicato bene di esporgli qui sul principio per non dover interrompere la serie degli altri Libri.

## ASSIOMI, o PRIMI PRINCIPJ.

I.

Il tutto è maggiore di qualsivoglia sua parte; ed è uguale a tutte le sue parti raccolte, o prese insieme.

II.

Se a grandezze uguali si aggiungano, o si tolgano parti uguali, anche le grandezze che ne risultano, o ne rimangono, saranno uguali.

III.

III.

Ma se a grandezze uguali si aggiungano, o si tolgano parti disuguali, quelle che ne risultano, o ne rimangono, saranno disuguali.

IV.

Siccome ancora, se a grandezze disuguali si aggiungano, o si tolgano parti uguali, le grandezze, che ne risultano, o ne rimangono, saranno disuguali.

V.

Quelle grandezze continue, che sovrapposte si adattano, sono uguali.

VI.

Quelle grandezze, che sono uguali ad un'istessa terza grandezza, sono anche uguali fra loro.

VII.

Quelle grandezze, che sono la metà, la terza, o la quarta parte di un'istessa terza grandezza, o di grandezze uguali, saranno fra loro uguali.

VIII.

Siccome ancora quelle grandezze, che sono doppie, triple, o quadruple di un'istessa grandezza, o di due grandezze uguali, sono fra loro uguali.

IX.

Una grandezza, che paragonandosi con altra grandezza non può essere ne maggiore, ne minore di quella, deve esserle uguale.

X.

Se la prima grandezza è maggiore della seconda, e la seconda è maggiore della terza, molto più la prima sarà maggiore della terza.

# LIBRO PRIMO
# DELLE GRANDEZZE
## IN GENERALE,
## *OVVERO*
## DELLE PROPOSIZIONI
### *Che si ritrovano fra le Grandezze.*



Enchè il puriſſimo e vivo lume dell'intelletto umano traſpiri mirabilmente, e conoſcaſi in qualſivoglia parte della Matematica; non vedeſi però giammai più nobilmente, nè più vivamente riſplendere, che in quella parte, la quale conſidera in generale, o come dir ſi ſuole, in aſtratto le grandezze di qualſivoglia genere, e paragonandole in varie maniere fra loro, dimoſtra la proporzione, che fra quelle ritrovaſi. E certamente è incredibile con qual ſottigliezza e vivacità di ſpirito gli antichi ed i moderni Matematici abbiano ricercate e dimoſtrate le leggi della proporzione, per rendere più facile e più ſicura queſta prima parte di Matematica, dalla quale come da primo e copioſo fonte derivar dovevano tutte le nobili, ſublimi, ed infinite verità, che nell'ampio giro di queſta Scienza di tratto in tratto ſi ammirano. Da queſta medeſima bellezza e neceſſità ſi deve riſvegliare l'animo di tutti quelli, che aſpirano all'acquiſto della Geometria; nè potrà loro per avventura veruna altra coſa eſſere più giuſtamente a cuore, che il comprendere chiaramente, ed imprimere

ben vivamente nell' animo tutto quello, che ne' due libri, che seguono, si dimostrerà delle Grandezze, della loro proporzione, e finalmente delle proprietà, che competono alle ragioni istesse, o proporzioni, che dir vogliamo. Ed affinchè l' ordine istesso, e la serie di tutto quello, che devesi dimostrare, accresca luce e chiarezza, io porrò quì in primo luogo le varie Definizioni, o spiegazioni di quelle voci, che in questa Scienza s'adoprano; indi gli Assiomi, o primi Principj, che sono quasi i semi, o primi lumi di questa Scienza; e finalmente le Proposizioni tutte, o Teoremi, che da questi principj derivano, ed in se stessi comprendono tutta la Scienza universale delle proporzioni.

# DEFINIZIONI.

I.

*Grandezza*, o *quantità* dicesi tutto quello, in cui sono, o si concepiscono essere alcune parti; ovvero tutto quello, che paragonato con altra cosa, dicasi uguale, maggiore, o minore di quella: come *linea*, *numero*, *moto*, *tempo*, *velocità*, ec.

II.

Quelle grandezze si dicono *omogenee*, che sono dell' istesso genere: come due linee, benchè disuguali, sono comprese nell' istesso genere di grandezza; e così due numeri, due moti ec. sempre appartengono all' istesso genere di quantità.

III.

Una grandezza maggiore dicesi *moltiplice* d' una minore, quando ella contiene in se la minore; o vien composta e misurata perfettamente dalla minore presa più volte: come il numero 12. è multiplice del numero 3. ch' egli in sè stesso contiene quattro volte; ed una linea di 4. palmi è multiplice di una di 2. palmi.

IV.

IV.

E la grandezza minore, che è contenuta un qualche numero di volte precisamente nella maggiore, ed in conseguenza presa più volte compone, ed esattamente misura la maggiore medesima, chiamasi *parte*, o *summoltiplice* della maggiore.

V.

Grandezze *egualmente multiplici* di altre grandezze diconsi quelle, che contengono egual numero di volte le loro parti: come sono egualmente multiplici il 15. del 5. e il 9. del 3. poichè il 15. contiene altrettante volte il 5. quante il 9. contiene il 3.

VI.

*E parti simili* di due grandezze diconsi quelle, che sono contenute egual numero di volte nelle loro multiplici; ovvero nelle grandezze, delle quali sono parti: come per esempio il 5. ed il 2. sono parti simili del 15. e del 9. essendo il 5. altrettante volte contenuto nel 15. quanto è il 3. nel 9.

VII.

Grandezze *commensurabili* sono quelle, che hanno qualche parte, o misura comune; o che possono essere misurate da una istessa grandezza: cioè quando si può ritrovare una terza grandezza, che sia parte dell'una e dell'altra, e perciò presa un qualche numero di volte componga ambedue.

VIII.

Così tutti i numeri sono grandezze commensurabili; poichè qualsivoglia numero è misurato e composto almeno dall'unità, che essendo presa più volte forma qualunque numero.

IX.

Anche in qualsivoglia altro genere di grandezza, o quantità possono due grandezze omogenee essere fra loro commensurabili; potendosi ritrovare, o concepire una terza grandezza omo-

genea, che sia parte, o comune misura di tutte due.

X.

E quella parte, o grandezza, che misura due diverse grandezze tra loro commensurabili, misurerà ancora la differenza delle grandezze medesime; e però quella parte, o grandezza, che misura tutta una qualche grandezza, ed insieme una porzione di quella, dovrà misurare ancora la rimanente.

X I.

Che sè questa comune misura, o parte di due grandezze commensurabili, si divida in quantesivoglia parti, anche ciascheduna di queste parti sarà altresì parte, o comune misura delle grandezze medesime commensurabili.

X I I.

Potendosi dunque la comune misura di due grandezze commensurabili dividere in molte parti fra loro eguali, e ciascheduna di queste in altre parti più piccole fino all'infinito, si potrà finalmente ritrovare una comune parte, o misura di due grandezze commensurabili, che sia minore di qualsivoglia data grandezza quantunque piccola.

X I I I.

Perciò essendo proposte due grandezze disuguali, e fra loro commensurabili, o incommensurabili ancora, che differiscano fra loro con una differenza quantosivoglia piccola, potrà talmente dividersi l'una o l'altra di quelle date grandezze in metà di metà, finchè finalmente si ritrovi o rimanga una parte, o misura della grandezza divisa, che sia minore della differenza, che si ritrova fra le due grandezze proposte.

X I V.

Che se non potesse mai ritrovarsi una parte, o comune misura di due grandezze, allora quelle grandezze si direbbero *incommensurabili* fra loro.

X V.

X V.

La *ragione* di una grandezza ad un' altra è quell'ordine, rispetto, riguardo, abitudine, o relazione, che ha una grandezza ad un' altra, paragonandosi queste fra loro quanto alla sola grandezza, quantità, ed estensione; ovvero è quella maniera, con la quale una grandezza contiene l' altra, o le parti di quella.

X V I.

Perciò la ragione sempre ritrovasi fra due grandezze, la prima delle quali riguarda la seconda, e la seconda è riguardata dalla prima. E quella grandezza, che riguarda l'altra, o a quella si riferisce, dicesi *antecedente*, e quella, che è riguardata, o verso la quale si fa la relazione, dicesi *conseguente*.

X V I I.

Di quì chiaramente apparisce, che la ragione non può trovarsi che fra le grandezze omogenee; poichè, se fossero di diverso genere, non si potrebbero fra loro paragonare, e dirsi una eguale, maggiore, o minore dell' altra; ovvero non potrebbe una di loro contenere l' altra, o essere contenuta da quella: come un *angolo* non è maggiore del *tempo*; o contenuto nel *tempo*; la *linea* nel *moto*, ec.

X V I I I.

Può nondimeno qualsivoglia ragione, che si ritrova fra due grandezze di un genere, concepirsi, rappresentarsi, ed esprimersi, con due grandezze di qualsivoglia altro genere, supponendo, che la ragione, che si ritrova fra le due prime grandezze di un genere, sia la stessa, o simile alla ragione delle due seconde grandezze di un altro genere.

X I X.

Allora poi si dirà, che la ragione, che si ritrova fra due grandezze, è la *stessa*, *uguale*, *simile* alla ragione, che si ritrova fra due altre

grandezze dell' istesso, ovvero ancora di diverso genere, quando la prima grandezza riguarda, o contiene la seconda, o le parti di lei; nella stessa maniera appunto, che la terza riguarda, o contiene la quarta, o le parti simili di essa.

X X.

Questa simiglianza, uguaglianza, o identità di ragione dicesi *proporzione*; e quelle quattro grandezze, fra le quali ritrovasi la proporzione, si chiamano *proporzionali*.

X X I.

Donde apparisce, che se di queste quattro grandezze proporzionali, la prima è uguale alla seconda, anche la terza sarà uguale alla quarta; se la prima è maggiore, o minore della seconda, anche la terza sarà maggiore, o minore della quarta.

X X I I.

Finalmente quelle grandezze, che nella proporzione si riferiscono ad un'altra, come la prima e la terza, cioè le antecedenti fra loro, siccome ancora le conseguenti, cioè la seconda e la quarta, verso le quali si fa la relazione, si chiamano grandezze *omologhe*.

# OSSERVAZIONE I.

NEL riflettere sulle passate Definizioni si può facilmente conoscere, che tutta la difficoltà si riduce ad esprimere, o concepire in che consista la *proporzione*, ovvero la *simiglianza delle ragioni*; vale a dire, che cosa debbasi intendere, quando si dice, che di quattro grandezze proporzionali la prima riguarda, o contiene la seconda o le sue parti, nell' istessa maniera appunto, che la terza riguarda, o contiene la quarta o le sue parti; o quale sia il carattere, indizio, o contrassegno, per cui si possa conoscere, se quattro grandezze proposte siano fra loro proporzionali.

Il

Il che certamente, benchè sia stato da Euclide ed altri Geometri espresso in varie maniere, non potrà nondimeno più facilmente spiegarsi; ne altro carattere, o contrassegno più chiaro potrà giammai ritrovarsi della proporzione, che si ritrovi fra le date quattro grandezze, che se si dividano, o si concepiscano divise le grandezze omologhe in parti simili

Così per esempio, se delle quattro grandezze AB, CD, EF, GH, le due prime grandezze AB, CD sieno prima fra loro commensurabili, si pigli qualsivoglia loro comune misura M, la quale per esempio sia contenuta dalla prima grandezza AB dieci volte, e dalla seconda CD sette volte, sicchè la stessa comune misura M sia la decima parte della prima grandezza AB, e la settima parte della seconda grandezza CD. Poi si divida la terza grandezza EF altrettante volte, o in altrettante parti, in quante si è divisa la prima AB, cioè in dieci, e sia questa decima parte della grandezza AB la grandezza N. Se dunque trovisi, che questa decima parte della grandezza EF, cioè la grandezza N, sia contenuta nella quarta grandezza GH altretttante volte, quante la grandezza M era contenuta nella grandezza CD, cioè sette volte; allora si dirà, o potrà chiaramente inferirsi, che la prima grandezza AB contiene la seconda CD, o le sue parti, nell'istessa maniera appunto, che la terza grandezza EF contiene la quarta GH, o le sue parti; ed in conseguenza che le quattro grandezze sono fra loro proporzionali, e la ragione, che è fra la prima e la seconda è simile, uguale, o la stessa ragione, che si ritrova fra la terza, e la quarta; o che la prima sta alla seconda come la terza alla quarta: poichè quello, che si verifica nelle parti, o comuni misure M, N, che sono la decima parte delle antecedenti AB, EF, e la settima parte delle consequenti CD, GH, dovrebbe ancora verificarsi *Fig.* 1.

ſempre delle parti, o comuni miſure O, P, che foſſero per eſempio la milleſima parte delle loro antecedenti AB, EF, e la ſettecenteſima parte delle loro conſeguenti CD, GH.

Che ſe la parte, o comune miſura N non foſſe altrettante volte contenuta nella quarta grandezza GH, quante volte la parte M è contenuta nella ſeconda CD, cioè ſette volte; ma alle ſette volte mancaſſe, o ſopravanzaſſe nell' iſteſſa quarta grandezza GH qualche piccola particella, allora le quattro grandezze non ſi direbbero proporzionali; ne ſi direbbe, che la prima ſta alla ſeconda come la terza alla quarta; ma che piuttoſto la quarta grandezza GH è un poco minore o maggiore di quello che biſogna, affinchè ella ſia riguardata, o contenuta dalla terza grandezza EF nell' iſteſſa maniera appunto, che la ſeconda CD è riguardata, o contenuta dalla prima grandezza AB. Siccome ancora paragonandoſi, o riferendoſi la ſeconda grandezza CD alla prima AB, e la quarta GH alla terza EF, ſi direbbe, che la ſeconda CD è un poco maggiore o minore del giuſto, affinchè ella contenga le parti della prima AB nella ſteſſa maniera appunto, che la quarta GH contiene le parti della terza EF.

Ma, ſe poi foſſero le due prime grandezze AB, CD incommenſurabili, e quella parte M quantunque piccola, che ſi pigliaſſe della prima grandezza AB, non poteſſe giammai eſattamente miſurare la ſeconda CD, ed in conſeguenza neppure la parte ſimile N, che miſura la terza EF, eſattamente miſuraſſe la quarta grandezza GH, ſiccome allora non ſi può chiaramente eſprimere, o concepire il numero, o la maniera, con la quale la prima grandezza AB contiene la ſeconda CD, o le di lei parti, ed in conſeguenza il numero, o la maniera, con cui la terza EF contiene la quarta GH, o le di lei parti; così difficilmente ancora ſi può conoſcere ed eſprimere la ſimiglianza delle ragioni, che ſi ritrovano

fra

fra le quattro grandezze; o dimostrarsi, che la prima grandezza riguarda e contiene la seconda, o le sue parti nella stessa maniera appunto, che la terza contiene la quarta, o le sue parti.

Si potrà nondimeno conoscere coll'artifizio medesimo, o divisione delle grandezze omologhe, se le quattro grandezze sieno proporzionali; o almeno si potrà dimostrare, che le grandezze ancora incommensurabili possono essere fra loro proporzionali.

Dividasi dunque la prima grandezza AB in quante parti si voglia, per esempio mille, e sia questa millesima parte di lei grandezza M; siccome ancora dividasi la terza EF in altrettante parti, e sia questa millesima parte di lei la grandezza N; se si trovi, che la grandezza M entri nella seconda CD altrettante volte appunto, quante la grandezza N entra nella quarta GH, e sopravanzi nella seconda la particella ID minore della grandezza M, e nella quarta la particella KH minore della grandezza N; e così dividendosi le antecedenti AB, EF in altrettante parti più piccole, per esempio centomila, le loro centomillesime parti O, P entrino sempre ugual numero di volte nelle loro conseguenti CD, GH; sicchè sempre sopravanzi nella seconda la particella LD minore della parte O, e nella quarta la particella QH minore della parte P, finchè finalmente svaniscono gli avanzi LD, QH, o si rendano con egual ordine e serie di scemamento nella seconda, o quarta grandezza minori di qualsivoglia data, o immaginabile grandezza; allora si dirà, che la prima grandezza contiene altrettante parti della seconda, quante la terza ne contiene della quarta; o che la prima sta alla seconda come la terza alla quarta; o che le quattro grandezze sono fra loro proporzionali.

Che se dividendo, e dividendo con ugual serie, o numero di divisioni in parti, o misure

sem-

sempre minori ; e perciò sempre scemando nella seconda, e quarta grandezza gli avanzi L D, Q H, finalmente si ritrovasse, che fatte le divisioni, nella seconda grandezza C D sopravanzasse una qualsivoglia piccolissima particella L D ; ma nella quarta grandezza G H non sopravanzasse particella alcuna anche minima, o che piuttosto mancasse ; vale a dire se la parte P non si potesse togliere, o non entrasse tante volte nella quarta grandezza G H quante volte la parte O si è tolta, o entra nella seconda C D, allora si direbbe, che la terza E F non contiene la quarta G H altrettante volte, quante la prima A B contiene la seconda C D ; e che perciò le quattro grandezze non sono proporzionali, ma che la quarta grandezza è un poco minore, affinchè ella, o le sue parti sieno contenute dalla terza altrettante volte, quante la seconda, o le parti di quella sono contenute dalla prima; ed in conseguenza, che la prima non è alla seconda come la terza alla quarta. Siccome ancora paragonandosi, o riferendosi la seconda C D alla prima A B, e la quarta G H alla terza E F, non sarebbero le quattro grandezze proporzionali; ma la quarta grandezza G H sarebbe un poco minore del giusto, affinchè ella contenesse le parti della terza E F altrettante volte, o nell'istessa maniera appunto, che la seconda C D contiene le parti della prima A B : onde si direbbe, che la ragione della seconda alla prima è maggiore della ragione della quarta alla terza ; ovvero, che la ragione della quarta alla terza è minore della ragione della seconda alla prima.

Che poi finalmente ancora nelle grandezze fra loro incommensurabili si possano ritrovare quattro grandezze proporzionali nel senso fin'ora spiegato, manifestamente apparisce ; poichè potendosi ritrovare una quarta grandezza G Q, dalla quale non si possano togliere tante parti, quante si tolgono dalla seconda grandezza C D; e potendosi

dosi altresì concepire un'altra grandezza G R, che sia maggiore, e differisca dalla GQ con un eccesso infinitamente piccolo, e dalla quale si possa togliere numero maggiore di parti di quello, che si tolga dalla seconda CD, necessariamente dovrà ritrovarsi qualche altra grandezza GH fra la quarta minore GQ, e la quarta maggiore GR, dalla quale si possano togliere per appunto altrettante parti, quante si tolgono dalla seconda CD: onde siccome gli avanzi nella seconda CD a poco a poco scemando finalmente svaniscono, e si riducono al nulla; così con egual serie gli avanzi nella quarta GH a poco a poco scemando con l'istesso ordine, che nella seconda CD, finalmente svaniscano: e siccome nella seconda CD la porzione, che si va togliendo sempre maggiore e commensurabile all'antecedente AB, e multiplice delle misure M, O, finalmente coincide ed eguaglia l'istessa CD; così nella quarta GH quella porzione, che si va togliendo sempre maggiore, e commensurabile al suo antecedente EF, e multiplice delle loro parti, o misure N, P, finalmente coincida, ed uguagli l'intera quarta GH.

## DIMANDA, o POSTULATO.

Concedasi dunque, che data una ragione qualunque fra due grandezze di qualsivoglia genere si possano ritrovare due altre grandezze dell'istesso, o differente genere, fra le quali sia la stessa ragione, che si ritrova fra le due prime grandezze: ovvero, che date due grandezze di un genere, ed una terza grandezza dell'istesso, o diverso genere delle due prime, possa ritrovarsi una quarta, alla quale abbia la terza grandezza data quell'istessa ragione, che ha la prima alla seconda: o che finalmente date quattro grandezze non proporzionali fra loro, per essere una delle antecedenti un poco minore, o maggiore, affinchè

chè ella foſſe al ſuo conſeguente, come l'altro antecedente è al ſuo conſeguente, poſſa ritrovarſi un altro antecedente tanto maggiore o minore del primo, ch'egli ſia al ſuo conſeguente come l'altro antecedente dato è al ſuo conſeguente.

## ASSIOMI, o PRIMI PRINCIPJ.

### I.

Fig. 2. SE due grandezze uguali A, B ſi paragonino, o riferiſcano ad una iſteſſa terza grandezza C, avranno ad eſſa ragioni uguali, cioè ſarà A a C come B a C: e ſe le grandezze A, B abbiano ad una iſteſſa terza grandezza C ragioni uguali, ſaranno uguali fra loro.

### II.

Ma ſe le grandezze A, B foſſero diſuguali, non avrebbero ad una iſteſſa terza grandezza C ragioni uguali; ma la grandezza maggiore A avrebbe a C maggior ragione di quella, che ha la grandezza minore B verſo l'iſteſſa C: e ſe le ragioni foſſero diſuguali, diſuguali ancora ſarebbero le grandezze A, B; e quella grandezza A, che aveſſe maggior ragione all'iſteſſa C, ſarebbe maggiore dell'altra grandezza B.

### III.

E perchè la ragione della grandezza maggiore A verſo C è tanto diverſa, o maggiore della ragione della grandezza minore B verſo l'iſteſſa C, quanto la grandezza medeſima A è diverſa, o maggiore della grandezza B, ſarà la ragione di A a C alla ragione di B a C, come A a B.

### IV.

E però le ragioni, che abbiano l'iſteſſo conſeguente, ſaranno fra loro come gli antecedenti.

### V.

Similmente ancora ſe paragoniſi, o riferiſcaſi la ſteſſa grandezza C a due grandezze fra loro ugua-

uguali A, B, le ragioni saranno uguali; cioè sarà C ad A come C a B: e se le ragioni fossero uguali, uguali ancora sarebbero le grandezze A, B.

V I.

Ma se le grandezze A, B fossero disuguali, disuguali ancora sarebbero le ragioni dell'istessa C verso di loro; e la ragione di C verso della grandezza maggiore A sarebbe minore della ragione di C verso la grandezza minore B: e se le ragioni di C verso di A e di B fossero disuguali, disuguali ancora sarebbero le grandezze A, B; e quella grandezza A, a cui la ragione di C fosse minore, sarebbe maggiore della grandezza B.

V I I.

E perchè la ragione di A a C è tanto maggiore della ragione di B a C, quanto A è maggiore di B, ovvero quanto B è minore di A; sarà la ragione di C ad A tanto minore della ragione di C a B, quanto A è maggiore di B, ovvero quanto B è minore di A; e perciò la ragione di C ad A sarà alla ragione di C a B, come B ad A.

V I I I.

E però le ragioni, che abbiano l'istesso antecedente, saranno fra loro come i conseguenti presi reciprocamente.

I X.

Quello, che si verifica paragonandosi le grandezze diverse A, B ad un'istessa grandezza C, ovvero una grandezza istessa C a due grandezze diverse A, B, si verifica ancora paragonandosi le grandezze diverse A, B a due grandezze fra loro uguali C, D; ovvero due grandezze fra loro uguali C, D a due grandezze diverse A, B: poichè le grandezze fra loro uguali C, D si possono considerare come una sola istessa grandezza.

X.

Quelle ragioni, che sono simili ed eguali ad un' istessa terza ragione, saranno ancora simili

ed

ed eguali fra loro: come se tanto la ragione di A a B, quanto la ragione di C a D sia l'istessa, che la ragione di E ad F, saranno le ragioni di A a B, e di C a D simili ed uguali fra loro.

## X I.

Fig. 3. Similmente ancora se due ragioni di A a B, e di C a D non sieno veramente uguali ad una terza ragione di E ad F, ma nondimeno abbiano ad essa l'istesso riguardo, o ragione con essere ugualmente maggiori, o minori di quella, saranno tuttavia le ragioni medesime di A a B, e di C a D fra loro uguali.

*In fatti, quando prima non fossero, si riducano le tre date ragioni a grandezze, o termini di un istesso genere, e ad un medesimo conseguente* F, (a) Postul. *ponendosi* (a) *come* A *a* B *così un'altra grandezza* G *ad* F, *e come* C *a* D *così* H *ad* F. *Perchè dunque per ipotesi la ragione di* A *a* B *sta alla ragione di* E *ad* F *come la ragione di* C *a* D *sta alla ragione medesima di* E *ad* F, *anche la ragione di* G *ad* F *starà alla ragione di* E *ad* F *come l'altre ragione di* H *ad* F *sta all'istessa ragione di* E *ad* F; *ma la ragione di* G *ad* F *alla ragione di* E *ad* F *sta come l'antecedente* G *ad* (b) Asi. 4. E (b); *e similmente ancora la ragione di* H *ad* F *alla ragione di* E *ad* F *sta come l'antecedente* H *ad* E, *dunque sarà l'antecedente* G *ad* E *come l'altro antecedente* H *è all'istessa* E; *ed in* (c) Asi. 1. *conseguenza* (c) *gli antecedenti* G, H *saranno fra loro uguali; e perciò la ragione di* G *ad* F *sarà uguale alla ragione di* H *ad* F; *ma la ragione di* G *ad* F *ponesi l'istessa, che la ragione di* A *a* B, *e la ragione di* H *ad* F *ponesi l'istessa, che la ragione di* C *a* D; *dunque la ragione di* A *a* B *sarà uguale alla ragione di* C *a* D.

E se due ragioni di A a B, e di C a D sieno uguali fra loro, avranno ad una terza ragione di E ad F l'istesso riguardo, o ragione; vale a dire,

dite; o le saranno uguali, o almeno saranno ugualmente maggiori, o minori di quella.

*Poichè ridotte, come prima, le tre ragioni a termini dell'istesso genere, ed al medesimo conseguente* F, *siccome per ipotesi le ragioni di* A *a* B *e di* C *a* D *sono uguagli fra loro, così le ragioni ancora di* G *ad* F *e di* H *ad* F *saranno fra loro uguali; e però* (a) *saranno gli antecedenti* G, H *uguali fra loro; onde l'antecedente* G *sarà all'antecedente* E *come l'altro antecedente* H *è all'istesso* E; *ed in conseguenza* (b) *la ragione di* G *ad* F *sarà alla ragione di* E *ad* F *come l'altra ragione di* H *ad* F *è alla ragione di* E *ad* F; *ma la ragione di* G *ad* F *poneſi l'istessa, che la ragione di* A *a* B; *e la ragione di* H *ad* F *poneſi l'istessa, che la ragione di* C *a* D; *dunque la ragione di* A *a* B *sarà alla ragione di* E *ad* F *come la ragione di* C *a* D *è all'istessa ragione di* E *ad* F.

(a) Aſſi. 1.

(b) Aſſi. 4.

XIII.

Che se le due ragioni di A a B, e di C a D non fossero uguali alla ragione di E ad F, o non avessero almeno a quella ugual ragione, o riguardo, non sarebbero fra loro uguali; ma quella ragione di E ad F di quello che abbia la ragione di C a D all'istessa ragione di E ad F, sarebbe maggiore dell'altra ragione di C a D.

XIV.

Tutto quello, che si verifica di due ragioni paragonandole, o riferendole ad un'istessa terza ragione, si verifica ancora paragonando le due ragioni medesime con due ragioni fra loro uguali; poichè due ragioni fra loro uguali si possono considerare come una sola ragione.

XV.

E però se quattro ragioni sieno fra loro proporzionali, ogni volta che due ragioni omologhe, come per esempio la seconda e la quarta, che sono le conseguenti, fossero fra loro uguali, anche le altre due ragioni omologhe, cioè la prima

ma e la terza, che sono le antecedenti, sarebbero uguali fra loro, e similmente ancora, se le antecedenti fossero fra loro uguali, ed uguali ancora fra loro fossero le conseguenti, le quattro ragioni sarebbero proporzionali.

Fig. 13. *Così per esempio, se la ragione di* A *ad* M *alla ragione di* B *ad* N *sia come la ragione di* D *a* P *alla ragione di* C *ad* O, *e le due ragioni di* B *ad* N, *e di* C *ad* O *sieno fra loro uguali; anche le due ragioni di* A *ad* M, *e di* D *a* P *saranno fra loro uguali.* E *similmente ancora, se le ragioni di* A *ad* M, *e di* D *a* P *fossero fra loro uguali, ed altresì le ragioni di* B *ad* N, *e di* C *ad* O *fossero fra loro uguali; le quattro ragioni sarebbero proporzionali, cioè sarebbe la ragione di* A *ad* M *alla ragione di* B *ad* N *come la ragione di* D *a* P *è alla ragione di* C *ad* O.

# OSSERVAZIONE II.

PER comprendere più chiaramente, ed imprimere più vivamente nell'animo questi Principj, su'quali raggirasi, ed è fondato il nuovo metodo per dimostrare l'artifizio, ed uso mirabile delle proporzioni, e singolarmente li Principj X. XI. XII. i quali tutti sono compresi nel XV. basta riflettere, che qualsivoglia ragione, che si ritrova fra due grandezze paragonate fra loro, devesi considerare come una grandezza di un certo e distinto genere, essendosi già dimostrato nell'Osserv. I. ed Assioma I. II. V. VI. che una ragione può essere, e chiamarsi maggiore, minore, ed eguale ad un'altra ragione in quella maniera appunto, che una linea, o una grandezza di qualsivoglia altro genere di quantità può essere, e chiamarsi maggiore, minore, ed uguale ad un'altra linea, o grandezza di quell' istesso genere: e tanto più facilmente si possono paragonare fra loro due ragioni, o si può conosce-

cere se una ragione sia maggiore, minore, ed uguale ad un'altra ragione, se prima si rappresentino, ed esprimano le ragioni date in termini dell'istesso genere, e si riducano al medesimo conseguente; poichè allora quella ragione, o riguardo medesimo, che si ritrovi fra i loro antecedenti, sarebbe l'istesso appunto, che si ritrova fra le due date ragioni. Supposto adunque, che le ragioni sieno grandezze di un certo, e distinto genere, egli è chiarissimo, che tutto quello, che si verifica di due grandezze paragonate con un'altra terza grandezza, ovvero con due grandezze fra loro uguali, dovrà verificarsi ancora di due ragioni paragonate con un'altra istessa ragione, o con due ragioni fra loro uguali; e però l'assioma X. XI. e XII. riducesi al I., il XIII. riducesi al II., e finalmente il XV. che contiene in se tutti gli altri, riducesi al I. ovvero al IX. e potrebbe ancora ridursi alla Definizione XXI.

# PROPOSIZIONI

## I.

*SE di quattro grandezze la prima* A *sia alla seconda* B *come la terza* C *alla quarta* D, *sarà* invertendo *la seconda* B *alla prima* A *come la quarta* D *alla terza* C. Fig. 4.

Si concepisca la grandezza E uguale alla seconda B, e la grandezza F uguale alla quarta D; e poichè ponesi A a B come C a D, sarà ancora A ad E come C ad F, e però le ragioni di A ad E e di C ad F saranno fra loro uguali; siccome ancora fra loro uguali saranno le ragioni di B ad E e di D ad F, ed in conseguenza (*a*) la ragione di B ad E sarà alla ragione di A all'istessa E come la ragione di D ad F è alla ragione di C all'istessa F; ma la ragione di B ad E è alla ragione di A ad E come B ad A; (*b*) e la ragione di D ad F è alla ragione di C ad

(*a*) *Assi.* 15.

(*b*) *Assi.* 4.

F come D a C (*b*), dunque sarà B ad A come D a C.

## II.

Fig. 5. *Se di quattro grandezze tutte omogenee sia la prima* A *alla seconda* B *come la terza* C *alla quarta* D, *sarà ancora* alternando, *o* permutando *la prima* A *alla terza* C *come la seconda* B *alla quarta* D.

Perchè per ipotesi le ragioni di A a B, e di C a D sono uguali fra loro, avranno ad una terza ragione di C a B l'istessa ragione, o riguardo; (*a*) *Assi.* 12. (*a*) ma la ragione di A a B alla ragione di C (*b*) *Assi.* 4. a B sta come A alla C (*b*), e la ragione di C a D alla ragione di C a B sta come B a D (*c*); (*c*) *Assi.* 8. dunque A sarà a C come B a D.

## III.

Fig. 6. *Se in due ordini di grandezze sia la prima d'un ordine* A *alla seconda* B *come la prima dell'altr' ordine* C *alla seconda* D, *e la seconda* B *alla terza* E *come la seconda* D *alla terza* F, *sarà* per egualità ordinata *la prima d'un ordine* A *alla sua terza* E *come la prima dell'altr' ordine* C *alla sua terza* F.

La ragione di A ad E alla ragione di B all'istessa E sta come A a B (*a*), siccome la ragione di C ad F alla ragione di D all'istessa F sta come C a D: ma per ipotesi A sta a B come C a D, dunque la ragione di A ad E sta alla ragione di B ad E come la ragione di C ad F sta alla ragione di D ad F; ma la ragione di B ad E e la ragione di D ad F si pongono fra loro uguali, dunque (*b*) anche la ragione di A ad E, e la ragione di C ad F saranno uguali fra loro, ovvero sarà A ad E come D ad F.

(*a*) *Assi.* 4.

(*b*) *Assi.* 15.

## IV.

## IV.

*Se in due ordini di grandezze sia la prima* Fig. 7.
*d' un ordine* A *alla seconda* B *come la seconda dell' altr' ordine* D *alla sua terza* F, *e la seconda* B *alla sua terza* E *come la prima dell' altr' ordine* C *alla sua seconda* D, *sarà* per egualità perturbata *la prima di un ordine* A *alla sua terza* E *come la prima dell' altr' ordine* C *alla sua terza* F.

La ragione di A ad E alla ragione di B all' (a) *Assi.* 4.
istessa E sta come A a B (*a*), siccome la ragione di C ad F alla ragione di C a D sta come D (b) *Assi.* 8.
ad F (*b*); ma per ipotesi A sta a B, come D ad F; dunque anche la ragione di A ad E starà alla ragione di B ad E come la ragione di C ad F sta alla ragione di C a D; ma per ipotesi la ragione di B ad E, e la ragione di C a D sono (c) *Assi.* 15.
fra loro uguali; dunque (*c*) anche la ragione di A ad E, e la ragione di C ad F saranno fra loro uguali, ed in conseguenza sarà A ad E come C ad F.

*Ovvero* facciasi (*d*) come A a B, cioè per ipotesi come D ad F, così E a G, e sarà permutando A ad E come B a G; ma per essere B ad E come C a D, ed E a G come D ad F, sta per egualità ordinata B a G come C ad F, dunque ancora A ad E sarà come C ad F. (d) *Postul.*

## V.

*Si verifica ancora l' istessa egualità di ragione fra le grandezze estreme degli due ordini qualunque sia il numero delle grandezze, purchè egli sia uguale nell' uno, e nell' altro ordine.* Fig. 6. 7.

Poichè, essendo per egualità ordinata, o perturbata la prima A alla sua terza E come la prima C alla sua terza F, e per ipotesi la E alla G come la F all'H, sarà di nuovo per egualità ordinata la prima A all'ultima G come la

prima C all'ultima H, e così sempre finchè s' arrivi a paragonare fra loro l'estreme di ciascun ordine.

## V I.

Fig. 9. *Se sia tutta la prima grandezza* A B *ad una sua porzione levata* B C *come tutta la seconda grandezza* D E *ad una sua porzione levata* E F, *sarà* per conversione di ragione *anche tutta la prima grandezza* A B *all' altra sua porzione, che resta,* A C *come tutta la seconda grandezza* D E *all' altra sua porzione, che resta,* D F.

Siano in primo luogo la grandezza A B e la sua porzione B C commensurabili, e saranno ancora (*a*) la grandezza D E e la sua porzione E F, per essere proporzionali alle due grandezze commensurabili A B, B C, commensurabili fra loro; e sieno le loro comuni parti, o misure le grandezze M, N; perchè dunque (*b*) la grandezza A B contiene la grandezza M, ovvero è di quella multiplice altrettante volte quante la grandezza D E contiene la grandezza N; ed altresì la porzione, o grandezza M, ovvero è di quella multiplice quanto la porzione, o grandezza E F contiene la grandezza N, anche la porzione rimanente A C conterrà la grandezza M, o sarà di quella multiplice altrettante volte quante la rimanente D F contiene la grandezza N, o è di quella multiplice: onde sarà A C ad M come D F ad N; ma per essere M ed N parti simili delle loro egualmente multiplici A B, D E, M è ad A B come N a D E; dunque per egualità ordinata sarà A C ad A B come D F a D E, ed invertendo A B ad A C come D E a D F.

(*a*) *Oss.* 1.

(*b*) *Oss.* 1.

Che se le porzioni levate B C, E F fossero incommensurabili all' intere loro grandezze A B, D E, e si dica non essere A B, ad A C come D E a D F,

DF, uno de' conſeguenti, per eſempio AC ſarebbe un poco maggiore per eſſere proporzionale. Concepiſcaſi dunque (a) come DE a DF così AB alla AG, che ſia minore di AC; e trovandoſi la (b) M particella dell' intera grandezza AB, che ſia minore della differenza CG, pongaſi l'AH multiplice della M, ed in conſeguenza commenſurabile alla AB, talmente che la porzione commenſurabile AH ſia maggiore della porzione AG, ma però minore dell'AC; e finalmente come AB a BH così facciaſi DE ad EI. Perchè dunque in ipoteſi ſta AB a BC come DE ad EF, ſarà invertendo BC ad AB come EF a DE; ma come AB a BH poneſi DE ad EI, dunque per egualità ordinata ſarà BC a BH come EF ad EI; e però (c) ſiccome BC ſi è poſta minore di BH, così EF ſarà minore di EI, ed in conſeguenza DF ſarà maggiore di DI. Ora, perchè tutta l'intera grandezza AB ſta ad una ſua porzione commenſurabile BH come l'intera grandezza DE ad una ſua porzione commenſurabile EI, ſarà (d) per converſione di ragione anche l'intera grandezza AB all'altra ſua porzione commenſurabile AH come l'intera grandezza DE all'altra ſua porzione commenſurabile DI; ed invertendo AH ad AB ſarà come DI a DE; ma AB ad AG poneſi come DE a DF, dunque per egualità ordinata ſarebbe AH ad AG come DI a DF; e perciò ſiccome AH ſi è poſta maggiore dell'AG, così DI ſarebbe maggiore della DF, il che è impoſſibile eſſendoſi dimoſtrata DI minore di DF.

(a) *Poſtul.*
(b) *Def.* 12.
(c) *Def.* 12.
(d) 1. *par. di queſta.*

## VII.

*Se ſia la grandezza* AB *ad una ſua porzione* BC *come la grandezza* DE *ad una porzione* EF, *ſarà* dividendo *la porzione* AC *alla porzione* CB *come la porzione* DF *alla porzione* FE. Fig. 10.

Perchè la grandezza A B ponasi alla porzione B C come la grandezza D E alla porzione F E, sarà per conversione di ragione tutta l' intera grandezza A B all' altra sua porzione A C come l' intera grandezza D E all' altra sua porzione D F: onde invertendo A C sarà ad A B, come D F a D E: ma per ipotesi era A B a B C come D E ad E F, dunque sarà per egualità ordinata A C a C B come D F ad F E.

## VIII.

Fig. 8. *Se sia la porzione* A C *a* C B *come la porzione* D F *ad* F E, *sarà* componendo *tutta l' intera grandezza* A B *ad una sua porzione* B C *come tutta l' intera grandezza* D E *ad una sua porzione* E F.

Poichè, se non fosse, pongasi (*a*) come D E ad E F, così un' altra X B maggiore, o minore di A C a B C. Perchè dunque X B a B C ponesi come D E ad E F, sarà dividendo X C a C B come D F ad F E; ma come D F ad F E stava A C a C B, dunque (*b*) X C a C B sarebbe come A C all' istessa C B, ed in conseguenza (*c*) X C ed A C sarebbero fra loro uguali, il che è impossibile.

(*a*) *Postul.*
(*b*) *Assi.* 10.
(*c*) *Assi.* 1.

## IX.

Fig. 10. *Se in due ordini di grandezze sia* A C *ad* M *come* D F *ad* N, *e* C B *all' istessa* M *come* F E *all' istessa* N; *ovvero invertendo* M *a* C B *come* N *ad* F E, *sarà* congiugendo *tutta l'* A B *ad* M *come tuttta la* D E *ad* N.

Perchè A C è ad M come D F ad N, ed M è a C B come N ad F E, sarà per egualità ordinata A C a C B come D F ad F E; e componendo A B a C B come D E ad F E; ma C B era ad M come F E ad N, dunque sarà nuovamente per egualità ordinata A B ad M come D E ad N.

X. *Se*

X.

*Se tutta l' intera grandezza* A B *a tutta* Fig. 11.
*l' intera grandezza omogenea* D E *sia come la porzione levata* A C *alla porzione levata* D F, *sarà* sottraendo *la porzione rimanente* C B *alla porzione rimanente* F E *come tutta l'* A B *a tutta la* D E, *ovvero come la porzione levata* A C *alla porzione levata* D F.

Essendo per ipotesi A B a D E come A C a D F, sarà permutando A B ad A C come D E a D F, e dividendo B C a C A come E F ad F D, e permutando B C ad E F come C A ad F D, ovvero per ipotesi come A B a D E.

XI.

E però, *se di quattro grandezze omogenee* Fig. 12.
*e proporzionali* A B, D E, M, N, *la prima* A B *sia la massima, e la quarta* N *sia la minima, saranno la massima e la minima insieme, cioè l' estreme* A B, N, *maggiori delle due di mezzo* D E, M.

Tolgasi dalla massima, o prima grandezza A B una porzione A C uguale alla terza M, e dalla seconda grandezza D E una porzione D F uguale alla quarta N; e perchè per ipotesi A B a D E sta come M ad N, sarà ancora A B alla D E come la porzione levata A C alla porzione levata D F; e però sottraendo la rimanente C B alla rimanente F E sarà come tutta l' A B a tutta la D E: onde (*a*) siccome A B poness maggiore di D E, così C B sarà maggiore di F E; ma le due grandezze A C ed N sono uguali alle due grandezze D F ed M, dunque aggiugnendosi alle due A C, N il pezzo maggiore C B, ed alle due D F, M il pezzo minore F E, saranno le tre grandezze D F, F E, M, vale a dire l'estreme A B, N saranno maggiori dell' intermedie D E, M. (*a*) *Def.* 21.

## XII.

Fig.13. *Se pongasi qualsivoglia numero di ragioni tra loro uguali fra gli antecedenti omogenei* A, B, C, D, *ec. ed i conseguenti* M, N, O, P, *ec. e però sia* A *ad* M *come* B *ad* N, *o* C *ad* O, *o* D *a* P, *ec. saranno* raccogliendo, *o* sommando *tutti gli antecedenti insieme a tutti i conseguenti insieme come un' antecedente* A *al suo conseguente* M.

Perchè per ipotesi A sta ad M come B ad N, sarà permutando A a B come M ad N; e componendo le due grandezze A, B insieme, saranno alla sola B come le due grandezze M, N insieme sono alla sola N; ma per essere B ad N come C ad O, sta permutando B a C come N ad O; dunque per egualità ordinata le due A, B insieme saranno a C come le due M, N insieme sono ad O, e componendo le tre A, B, C insieme, saranno a C come le tre M, N, O insieme sono ad O; ma per essere C ad O come D a P, sta permutando C a D come O a P; dunque per egualità ordinata le tre A, B, C saranno a D come le tre M, N, O sono a P, e componendo tutte le quattro A, B, C, D saranno a D come tutte le quattro M, N, O, P sono a P; e permutando tutti insieme gli antecedenti A, B C, D saranno a tutti insieme i loro conseguenti M, N, O, P come l'antecedente D al suo congnente P, ovvero come il primo antecedente A al suo conseguente M.

## XIII.

Fig.12. *Se le due grandezze omogenee* M, N *sieno parti simili delle due grandezze* AB, DE, *saranno fra loro le parti simili* M, N *come le loro egualmente moltiplici* AB, DE.

Poi-

Poichè A B e D E ſono egualmente multipli-ci delle parti M, N, ſaranno in A B tante parti uguali ad M quante parti ſono in D E uguali ad N, e ſarà (*a*) la prima parte di A B alla prima parte di D E come la ſeconda di A B alla ſeconda di D E, e così ſempre; dunque raccogliendo tutte le parti di A B ſaranno a tutte le parti di D E come la prima di A B alla prima di D E, cioè ſarà A B a D E come M ad N come A B a D E. (*a*) *Aſſ.* 1.

*Più brevemente*. Per eſſere A B e D E egualmente multipli di M ed N, ſarà (*b*) A B ad M come D E ad N, e permutando A B a D E come M ad N, ovvero M ad N come A B a D E. (*b*) *Of.* 1.

## X I V.

*Se in due ordini di grandezze dell' iſteſſo, o di diverſo genere ſieno tutti gli antecedenti* A B, C, D *uguali fra loro, ed uguali ancora fra loro altrettanti antecedenti* I, K, *L*, M, *e ſia* A *ad* E *come* I *ad* N, *e* B *ad* F *come* K *ad* O, *e* C *a* G *come* L *a* P, *e* D *ad* H *come* M *a* Q, *ec. ſaranno* raccogliendo *tutti gli antecedenti inſieme* A, B, C, D *a tutti i loro conſeguenti* E, F, G, H *come tutti gli antecedenti inſieme* I, K, L, M *a tutti i loro conſeguenti* N, O, P, Q. Fig. 14.

Poichè A poneſi ad E come I ad N, ſarà invertendo E ad A come N ad I; ma F poneſi a B, ovvero ad A come O a K, ovvero ad I, dunque congiugnendo le due E, F ſaranno ad A come le due N, O ſono ad I; ma G poneſi a C, ovvero ad A come P ad L, ovvero ad I, dunque congiugnendo le tre E, F, G ſaranno ad A come le tre N, O, P ſono ad I; ma H poneſi a D, ovvero ad A come Q ad M, ovvero ad I, dunque congiugnendo le quattro E, F, G, H ſaranno ad A come le quattro N, O, P, Q

ſono

(a) *Antec.* sono ad I; ma A è (a) alle quattro A, B, C, D come I alle quattro I, K, L, M, dunque per egualità ordinata saranno tutte le E, F, G, H insieme a tutte insieme le A, B, C, D come tutte le N, O, P, Q insieme a tutte insieme le I, K, L, M; ed invertendo tutti gli antecedenti insieme A, B, C, D a tutti insieme i loro conseguenti E, F, G, H, come tutti gli antecedenti insieme I, K, L, M a tutti insieme i loro conseguenti N, O, P, Q.

## XV.

*L' istesso ancora si verifica benchè gli antecedenti* A, B, C, D, *e gli antecedenti* I, K, L, M *non sieno uguali; ma sieno però proporzionali, cioè* A *a* B *come* I *a* K; B *a* C *come* K *ad* L; C *a* D *come* L *ad M.*

Poichè, essendo per ipotesi F a B come O a K, e B ad A come K ad I, sarà per egualità ordinata F ad A come O ad I; onde, per essere in ipotesi anche E ad A come N ad I, saranno congiugnendo le due E, F ad A come le due N, O sono ad I; e per l' istessa ragione tutte le E, F, G, H saranno ad A come tutte le N, O, P, Q sono ad I; ma A sta componendo ad A, B, C, D come I ad I, K, L, M; dunque per egualità ordinata saranno le E, F, G, H ad A, B, C, D, come le N, O, P, Q, ad I, K, L, M, ed invertendo saranno tutti gli antecedenti A, B, C, D a tutti i loro conseguenti E, F, G, H, come tutti gli antecedenti I, K, L, M, a tutti i loro conseguenti N, O, P, Q.

*Da questi ultimi quattro Teoremi come da copiosissimo fonte è derivata la* Geometria degli Indivisibili, *adoprata prima d' ogni altro dal Galileo, e Torricelli, e mirabilmente poi accresciuta, illustrata, e confermata dal Cavalerio. Gli esempi, e l' uso di questo metodo saranno frequentissimi nel decorso di questa Geometria: frattanto potrà vedersi, ed osservasi la figura 9. della Tav.* III. *o la Propositione 7. del Libro* VI.

# LIBRO II.

## *Delle Proprietà delle Ragioni.*

I. POichè le Ragioni medesime, che si ritrovano fra le grandezze, possono concepirsi come grandezze di un certo distinto genere, ed in conseguenza paragonarsi fra loro, sicchè una ragione si dica uguale, maggiore, o minore di un'altra, come si è già dimostrato nel primo Libro, manifestamente apparisce, che le Ragioni ancora avranno tutte quelle proprietà, che si ritrovano in qualsivoglia altro genere di quantità, o di grandezza. Siccome dunque una grandezza di qualsivoglia genere si può *unire*, *sottrarre*, *dividere*, o *moltiplicare* con un'altra grandezza dell'istesso genere, così una ragione ancora si potrà unire, sottrarre, dividere, o moltiplicare con un'altra ragione. L'ordine adunque già stabilito richiede, che siccome nel passato Libro si sono paragonate fra loro le varie ragioni, e si è dimostrato in qual maniera possano chiamarsi, o dimostrarsi uguali, maggiori, o minori; così nel secondo Libro, si parli di tutte quelle proprietà, che competono alle ragioni medesime; e si dimostri in qual maniera unire, dividere, sottrarre, e moltiplicare. E benchè questa cognizione, o dottrina potesse più brevemente spiegarsi; perchè nondimeno ella è di grandissima ed infinita utilità, ne per avventura si suole comunemente da tutti esporre quanto richiedesi al desiderio e profitto de' Giovani, che in questa, più che in ogn'altra incontrar sogliono difficoltà, io tratterò distintamente di tutte queste proprietà; e giacchè queste sogliono più frequentemente adoprarsi, e concepirsi più facilmente ne i numeri, parlerò prima de i numeri stessi; poi di qualsivoglia altro genere di grandez-

dezza; e finalmente delle ragioni medesime facendo conoscere, come a queste, non meno che alle grandezze di qualsivoglia altro genere, competono quelle medesime proprietà.

II. Allora dunque si dice, che un numero si *unisce*, *somma*, *aduna*, o *raccoglie* con un'altro numero quando tutte le unità di un numero si congiungono con tutte le unità dell'altro numero, affinchè ne risulti un terzo numero uguale ai due proposti numeri presi insieme, onde si chiami loro *somma* ed *aggregato*; come per esempio unendo l'8. al 6. risulta il 14. uguale a i numeri 8. e 6. presi insieme.

2. *Sottrarre* un numero da un altro numero altro non è, che *togliere*, *cavare*, o *levare* il numero minore dal maggiore; vale a dire togliere dalle unità del maggiore altrettante unità, quante se ne ritrovano nel minore; onde il minore dicesi *levato*, *cavato*, o *sottratto*; e quello, che resta nel maggiore dopo levato il minore, vale a dire la differenza ed eccesso del maggiore sopra il minore, dicesi *resto*, *rimanente*, o *residuo*; come se si tolga dal 14. il 6. resta 8.

3. Un numero minore dicesi *dividere* un'altro numero di sè maggiore, quando si toglie da quello quante volte si può, vale a dire quante volte vi è contenuto; ed esprimesi ancora quante volte vi è contenuto, o levato: come per esempio il numero 3. divide il numero 12. togliendosi da quello 4. volte, ed esprimendosi, che vi è contenuto, o levato 4. volte; e perciò nella divisione, oltre il numero 12. che si divide, ed il numero 3. che divide, e perciò chiamasi *divisore*, o *partitore*, ritrovasi ancora il numero *quoziente*, che palesa ed esprime quante volte il partitore è contenuto, e cavato dal numero che si divide.

4. Finalmente un numero *moltiplica* un'altro numero, quando si piglia un terzo numero tanto moltiplice del numero moltiplicato, quanto il nu-

numero moltiplicante è moltiplice dell' unità; cioè quando si piglia il numero moltiplicato tante volte quante il numero moltiplicante contiene in sè l'unità; ovvero quando si faccia come l' unità al numero moltiplicante, così il numero moltiplicato ad un terzo numero, il quale chiamasi perciò *prodotto* dagli altri numeri moltiplicati: così moltiplicandosi 4. con 3. risulta il 12. il quale contiene il 3. altrettante volte quanto il 4. contiene l'unità, e però l'unità è al 4. come il 3. al 12.

III. Tutto quello, che si è dimostrato de i numeri, e della maniera, con la quale questi si uniscono, sottraggono, dividono, e si moltiplicano fra loro, si può facilmente applicare a qualsivoglia altro genere di grandezze, ed a quelle singolarmente, che sieno commensurabili fra loro, vale a dire che abbiano fra loro la ragione di un numero a un'altro numero.

1. Allora dunque si dirà unirsi, o congiugnersi una grandezza ad un'altra grandezza, quando tutte le parti, l'estensione, o quantità di una si uniscono alle parti, estensione, e quantità di un' altra, sicchè ne risulti una terza grandezza eguale a tutte due prese insieme.

2. Ed allora poi si sottrae, si toglie, si leva; o si cava una grandezza minore da una grandezza maggiore, quando dalla maggiore si tolgano tante parti, o tanta estensione, quanta è l'estensione, o le parti, che si ritrovano nella minore.

3. Una grandezza minore divide una grandezza maggiore, quando si toglie quella da questa altrettante volte quante si può, o quante vi è contenuta, ed esprimesi ancora quante volte vi è contenuta, o levata.

Finalmente una grandezza moltiplica un'altra grandezza, quando pigliandosi una terza qualsivoglia grandezza come unità si faccia come questa unita alla grandezza moltiplicante così la grandezza moltiplicata ad una quarta, che si dirà

pro-

*prodotta* dalle due date grandezze moltiplicate fra loro, o prodotta dalla moltiplicazione di quelle: così per esempio se pongasi qualsivoglia grandezza G, come unità, e facciasi come G ad A così B a C, si dirà, che la grandezza A moltiplica la grandezza B; e la grandezza C si dirà prodotta dalla moltiplicazione delle due grandezze A, B. Fig. 15.

IV. Perchè dunque le ragioni ancora, che si ritrovano fra le grandezze, possono considerarsi e paragonarsi fra loro come grandezze, potranno altresì le ragioni unirsi, sottrarsi, dividersi, moltiplicarsi a similianza appunto di tutte le altre grandezze. Se non che fra le ragioni, e le grandezze degli altri generi trovasi questa notabile diversità, o differenza, che dove tutte le grandezze di qualsivoglia altro genere palesano la loro quantità ed estensione palesando sè stesse; e per conoscere se una grandezza sia maggiore, minore, ed uguale ad un'altra grandezza, basta il conoscere, e riguardare le sole due grandezze istesse, che si paragonano, o si confrontano insieme; la quantità poi, l'estensione, valore, o grandezza di una ragione è espressa, o palesata da due grandezze, o termini, fra quali ritrovasi: sicchè per conoscere l'estensione, valore, o grandezza di una ragione non basta conoscere il solo antecedente, o conseguente di lei; oppure volendo conoscere quale di due date ragioni sia maggiore, o minore, non basta conoscere, e paragonare i soli antecedenti fra loro, o i soli conseguenti, ma devesi aver riguardo a ciascheduno degl'istessi termini; poichè la ragione, e la grandezza, e valore della ragione risulta dall'abitudine, riguardo, o relazione, che ha l'antecedente al suo conseguente: onde variandosi un solo di que' termini, benchè l'altro resti lo stesso, subito si muta, o si varia la grandezza della ragione, o la ragione medesima. Per unire dunque due ragioni, non basta unire i loro antece-

den-

denti insieme, ed i loro conseguenti, poichè la ragione fra gli aggregati che ne risultano, non sarebbe uguale alle ragioni che si congiungono. Così per esempio ne i seguenti numeri, o ragioni del 5. al 15. e del 6. al 9. se si unisca il 5. al 6. e facciasi 11., e similmente ancora si unisca il 15. al 9. e facciasi 24., la ragione dell'11. al 24. non è uguale alle due ragioni del 5. al 6. e del 6. al 9. poichè le ragioni del 5. al 15. e del 6. al 9. unite insieme formano la ragione di egualità, per essere un terzo, e due terzi uguali ad un intero; dove la ragione dell'11. al 24. tanto è lontana dall'essere ragione di ugualità, che anzi è minore della ragione di metà all'intero, per essere l'11. minore, che la metà del 24. Similmente ancora quanto al sottrarre e dividere, oltre alla ragione già detta, ed agli esempj, che si potrebbero apportare, basta riflettere, che può molte volte succedere, che di due date ragioni la ragione minore abbia l'antecedente maggiore, e perciò questo non si possa togliere dall'antecedente della ragione maggiore; benchè la ragione minore sempre si possa togliere dalla ragione maggiore: come per esempio la ragione del 5. al 15. è minore della ragione del 4. al 2. benchè il 5. non sia minore, nè possa toglierſi dal 4. ed il 15. dal 2. Nella sola moltiplicazione però si verifica, che moltiplicandosi gli antecedenti insieme, ed insieme ancora i conseguenti, si moltiplichino ancora le loro ragioni, come si dimostrerà più sotto nella Prop. XII. Per rendere nondimeno piu chiara, più semplice ed universale questa dottrina, dimostreremo quì brevemente come si possano unire, sottrarre, e dividere, e moltiplicare le ragioni; vale a dire come si possano adattare alle ragioni tutte quelle proprietà, che già si sono spiegate nelle grandezze degli altri generi.

V. Dovendosi dunque unire, sottrarre, accrescere, scemare, dividere, e moltiplicare due ragio-

gioni, che per lo più sogliono avere antecedenti, e conseguenti ancora diversi, come per esempio le ragioni di A a B, e di C a D, si riducano, se prima non fossero, le ragioni in gran-
Fig.17. dezze, o termini dell' istesso genere, e ad un medesimo conseguente, facendosi come C a
(a) Al- D così E a B, e sarà (a) la ragione di E
si. 4. a B, ovvero di C a D, alla ragione di A a B come E ad A; e perciò la grandezza delle due date ragioni sarà espressa, e rappresentata da i soli antecedenti A, E. Ogni qualvolta dunque si uniscano, accrescano, scemino, sottraggano, dividano, o si moltiplichino questi antecendenti, subito ancora dovranno unirsi, crescere, scemare, sottrarsi, dividersi, e moltiplicarsi le due date ragioni, che sempre corrispondono a i loro antecedenti, ovvero, sono fra loro come gli antecedenti (a); e perciò ricevono tutte quelle varietà, o proprietà, che si ritrovano fra gli antecedenti medesimi.

Fig.17. 1. Perchè dunque si uniscano, o si raccolgano insieme le due date ragioni, ridotte che sieno al medesimo conseguente, basta unire i loro antecedenti A, E, o prendere l'antecedente F uguale agli antecedenti A, E, e sarà la ragione, che si ritrova fra l'antecedente F, ed il comune conseguente B, uguale alle ragioni di A a B, e di E a B, ovvero di C a D, unite insieme.

2. Se l'antecedente minore E si cavi dall'antecedente maggiore A, la ragione minore di E a B, ovvero di C a D, si caverà dalla ragione maggiore di A a B.

3. Se l'antecedente minore E divida l'antecedente maggiore A, anche la ragione minore di E a B, ovvero di C a D, dividerà la ragione maggiore di A a B.

4. Se finalmente, ponendosi qualsivoglia grandezza G come unita, si faccia come G ad A, così E ad F, ed in conseguenza il primo antecedente A moltiplichi il secondo antecedente E,

sic-

ficchè ne risulti, o producasi un terzo antecedente F, sarà la ragione di questo terzo antecedente F a B prodotta dalle due date ragioni di A a B, e di E a B, ovvero di C a D, moltiplicate fra loro.

VI. Benchè nondimeno tutte le proprietà numerate fin'ora competano alle ragioni; la più nobile però, la più ammirabile, e più necessaria è la moltiplicazione delle ragioni, che da Geometri comunemente si chiama *composizione*, e da alcuni si suole infelicemente confondere con l'unione, o congiunzione delle ragioni. Di questa composizione di ragioni si servirono bensì con somma lode e vantaggio Euclide, Archimede, ed altri antichi Geometri; nissuno però di quelli, per quanto sappiasi, la dimostrò, ovvero la spiegò chiaramente; onde nel leggere le loro Opere solevasi comunemente incontrare in questo luogo gravissima, ed insuperabile difficoltà.

Per rendere dunque più facile, e chiara questa composizione, o moltiplicazione delle ragioni, e le proprietà ancora, che le competono, io porrò qui un'altra Definizione della ragione composta; ovvero spiegherò il modo, con cui si possono moltiplicare fra loro due date ragioni, anche senza ridurle a' termini dell'istesso genere, e ad un medesimo conseguente; assegnando nel tempo istesso un chiarissimo carattere, o contrassegno, con cui si conosca se una ragione sia prodotta, o composta di due date ragioni fra loro moltiplicate.

VII. Siccome dunque un numero moltiplica un'altro numero, quando si fa come l'unità al numero moltiplicante, così il numero moltiplicato ad un'altro numero, che si chiama *prodotto*; così una ragione si dirà moltiplicare un'altra ragione, quando si faccia come la ragione dell'unità all'unità (ovvero la ragione di ugualità) alla ragione moltiplicante; così la ragione moltiplicata ad un'altra ragione, che si dirà *prodotta*, o *composta* dalle due date ragioni: e siccome un numero dicesi, ed è ve-

ramente prodotto dalla moltiplicazione di due numeri, quando egli sia al numero moltiplicato come il numero moltiplicante è all'unità; così una ragione si dirà prodotta dalla moltiplicazione di due ragioni, quando ella sia alla ragione moltiplicata come la ragione moltiplicante è alla ragione di ugualità, ovvero di unità a unità.

Fig. 18. Debbasi dunque moltiplicare la ragione di A a B con la ragione di C a D. Pongasi la grandezza G eguale a B, e facciasi come G ad A così C ad H, e sarà la ragione di H a D composta, o prodotta dalle ragioni di A a B, di C a D fra loro moltiplicate. Poichè, essendo G ad A come C ad H, ed in conseguenza (a) la ragione di G a B alla ragione di A a B come la ragione di C a D alla ragione di H a D, sarà la ragione di G a B, che è ragione di ugualità, alla ragione moltiplicante di A a B come la ragione moltiplicata di C a D alla ragione di H a D, e perciò la ragione di H a D sarà prodotta dalle ragioni moltiplicate di A a B e di C a D.

(a) *Assi. 4. lib.* I.

VIII. Questa seconda definizione, o idea della moltiplicazione delle ragioni, o della ragione composta, e prodotta, benchè apparisca diversa dalla passata definizione, mirabilmente però conviene con quella; onde nel senso dell'una, e dell'altra definizione, dalle due date ragioni di

Fig. 17. A a B e di C a D sempre risulta l'istessa ragion composta. In fatti si debbano moltiplicare le due ragioni di A a B e di C a D, e secondo la prima definizione riducansi a' termini di un'istesso genere, e ad un medesimo conseguente, facendosi come C ad D, così E a B, e poi si moltiplichino gli antecedenti A, E, facendo come G ad A così E ad F, e sarà nel senso della prima definizione la ragione di F a B composta

Fig. 18. dalle due date ragioni di A a B e di C a D, ovvero di E a B. Ma nel senso della seconda definizione, posta G uguale a B, facciasi come

G ad

G ad A così C ad H, e sarà la ragione di H a D composta delle due date ragioni di A a B, e di C a D; io dico dunque, che la ragione di F a B è la stessa, che la ragione di H a D; poichè essendo E ad F come G ad A, ovvero come C ad H, sarà invertendo F ad E come H a C; ma E è a B come C a D, dunque per egualità ordinata F sarà a B come H a D, ovvero la ragione composta di F a B sarà la stessa che la ragione composta di H a D.

Benchè però la sostanza, ed il senso dell'una, e dell'altra definizione sia dimostrato l'istesso; mi servirò nondimeno per l'avvenire della seconda, per essere questa più simile alla moltiplicazione de i numeri, e per essere ancora più semplice, e più naturale; giacchè in essa non si riducono le grandezze in termini di un'istesso genere, e ad un medesimo conseguente, ma si lasciano con i termini, o conseguenti medesimi, con cui sono proposte.

IX. Ora così supposta, e chiaramente già dimostrata la composizione delle ragioni, e spiegato che cosa debbasi intendere quando si dice, che una ragione è *composta* di due ragioni, io dimostrerò facilmente quel celebre Teorema, sopra cui sono fondate innumerabili Proposizioni di Matematica; la bellezza, e necessità del quale Teorema ben conobbero i Geometri antichi, che sì frequentemente l'adoprarono, benchè veruno giammai non lo dimostrasse da Teone in fuori, Vitellione, ed Eutocio, i quali lo provarono solamente ne i numeri, o nelle grandezze commensurabili, che sono fra loro come gl'istessi numeri. Anzi l'istesso Gregorio di S. Vincenzo, dopo di avere peravventura tentato invano di dimostrarlo, pensò, che si dovesse numerare fra gli Assiomi, finchè finalmente da alcuno dimostrato egli fosse come Teorema, il che felicemente poi fece il Tacquet. Prima però di quelli tentò di sciogliere questa difficoltà l'incomparabile Galileo; ma non pe-

rò forse con quella chiarezza e certezza, che doveasi ben giustamente sperare da sì grand'uomo; poichè, oltre al dire, ch' egli fa, che *quì non vanno contemplazioni, nè dimostrazioni, imperciochè è una semplice imposizione di nome*, (a) egli talvolta confonde la moltiplicazione con la congiunzione delle ragioni; e deduce la definizione della ragione composta dalla Propositione 2. 3. del Lib. VI. di Euclide, la quale egli dimostra con un altro principio, o definizione della ragione composta, egualmente oscura e difficile della prima definizione, come si potrà facilmente conoscere quì sotto al numero X. Ecco frattanto il celebre Teorema, o Propositione con alcune altre, che da quello derivano.

(a) *Giornata* v.

# PROPOSIZIONI.

## I.

Fig. 19. *SE siano tre grandezze dell' istesso genere* A, B, D, *la ragione della prima* A *alla terza* D *è composta delle ragioni della prima* A *alla seconda* B, *e della seconda* B *alla terza* D, *cioè risulta da quelle ragioni intermedie fra loro moltiplicate.*

Intendasi la grandezza C uguale alla seconda B, e talmente si dispongano le grandezze, che A, C sieno antecedenti, e B, e D sieno conseguenti; indi, presa come unità la grandezza G uguale a B, facciasi, (b) come G ad A così C ad H; e perchè ponesi G uguale a B, ovvero a C, anche A sarà uguale ad H (c), e perciò (c) la ragione di A ad a D sarà la stessa, che la ragione di H a D: ma per essere G ad A come C ad H, la ragione di H a D è composta delle ragioni di A a B, e di C a D, ovvero dell' istessa B a D; dunque anche la ragione della

(b) *Postul.*

(c) *Def.* 21. I.

pri-

prima A alla terza D sarà composta delle ragioni di A a B, e di B a D.

*Più brevemente*. La ragione di C a B, che è la ragione di ugualità, sta alla ragione moltiplicante di A a B come C ad A (*a*); ma come C ad A così sta ancora la ragione moltiplicata di C a D alla quarta ragione di A a D (*a*), dunque la ragione di A ad D è composta delle ragioni di A a B, e di C a D fra loro moltiplicate, o risulta dalla loro moltiplicazione. (*a*) Assi. 4.

## II.

*In qualsivoglia numero di grandezze* A, B, C, D, *ec. la ragione della prima* A *all' ultima* D *è composta di tutte le ragioni frapposte di* A *a* B, *di* B *a* C, *di* C *a* D. Fig. 16.

La ragione di A a C è composta delle ragioni di A a B, e di B a C (*b*), e considerando la grandezza C come seconda, e la D come terza, la ragione di A a D sarà composta della ragione di A a C (vale a dire delle due ragioni di A a B, e di B a C), e di più della ragione di C a D, e così sempre; dunque la ragione della prima all'ultima sempre è composta delle ragioni frapposte. (*b*) Ant. tec.

## III.

*Se tutte le ragioni fossero uguali, e però le grandezze fossero continuamente proporzionali, cioè* A *a* B *come* B *a* C, *e* C *a* D, *la ragione della prima* A *alla terza* C *sarebbe* duplicata *della ragione della prima* A *alla seconda* B; *siccome la ragione della prima* A *alla quarta* D *sarebbe* triplicata *della ragione della prima* A *alla seconda* B. Fig. 16.

Poichè, essendo per ipotesi tutte le ragioni uguali fra loro, la ragione della prima alla terza, che è composta di due ragioni fra loro uguali, sarà duplicata di una sola di quelle; e la ra-

gione della prima alla quarta, che è composta di tre ragioni fra loro uguali, sarà triplicata di una di quelle per esempio della ragione, che è fra la prima A, e la seconda B.

IV.

Fig. 18. Similmente ancora *se due ragioni sieno uguali fra loro, e si ritrovino in quattro grandezze proporzionali, cioè sia* A *a* B *come* C *a* D, *la ragione composta dalle due date ragioni sarà duplicata di una di quelle.*

Facciasi come G ad A così C ad H, e sarà invertendo H a C come A a G; ma come A a G, ovvero A B, così supponesi C a D; dunque H sarà a D come C a D, onde le tre grandezze H, C, D saranno continuamente proporzionali, e però (*a*) la ragione di H a D, la quale è composta delle due date ragioni di A a B, e di C a D, sarà duplicata della ragione di H a C, cioè di A a G, ovvero di A a B, ovvero di C a D.

(*a*) *Ant.*

V.

Fig. 21. *Se le ragioni di* A *a* B *e di* C *a* D *sieno reciproche, cioè sia* A *a* B *come* D *a* C *ovvero* B *ad* A *come* C *a* D, *la ragione loro composta sarà ragione di ugualità.*

Perchè G e B sono fra loro uguali, sarà G ad A come B ad A (*b*), ma come G ad A così è C ad H, e come B ad A così ponesi C ad D; dunque C ad H sarà come C a D, e però (*c*) H e D saranno fra loro uguali, e la ragione di H a D, che è composta delle ragioni di A a B e di C a D, sarà ragione di ugualità.

(*b*) *Assi.* 1.

(*c*) *Assi.* 5.

VI.

*E se la ragione composta di* H *a* D *sia ragione di ugualità, le ragioni componenti di* A *a* B *di* C *a* D *saranno reciproche, cioè sarà* A *a* B *come* D *a* C.

Per-

Perchè la ragione composta di H a D è ragione di ugualità, saranno H e D fra loro uguali, e però (*a*) H a C sarà come D a C; ma come H a C così è A a G, dunque A a G, ovvero A a B, sarà come D a C, e però le ragioni componenti saranno reciproche. (*a*) *Assi.* 1.

## VII.

*Se due ragioni di* A *a* B *e di* C *a* D *compongano la ragione di* H *a* D, *e le due ragioni di* M *ad* N *e di* O *a* P *compongano la ragione di* V *a* P, *e sieno le due ragioni componenti di* A *a* B *e di* M *ad* N *fra loro uguali, saranno le ragioni composte fra loro come le altre due componenti; cioè la ragione composta di* H *a* D *sarà alla ragione composta di* V *a* P *come la ragione di* C *a* D *è alla ragione di* O *a* P. Fig. 10. 21.

Poichè ponesi A a B come M ad N, sarà A a G come M ad L, ma come A a G così è H a C; e come M ad L così è V ad O; dunque sarà H a C come V ad O: ma (*b*) come H a C così sta la ragione di H a D alla ragione di C all'istessa D, e come V ad O così sta la ragione di V a P alla ragione di O all'istessa P; dunque sarà la ragione di H a D alla ragione di C a D come la ragione di V a P alla ragione di O a P, e permutando la ragione composta di H a D sarà alla ragione composta di V a P come la ragione componente di C a D sta alla ragione componente di O a P. (*b*) *Assi.* 4. 1.

## VIII.

*Se* dunque *le ragioni componenti di* C *a* D *e di* O *a* P *sieno fra loro uguali, anche le ragioni composte saranno uguali; e* però *le ragioni, che sono composte di ragioni simili ed uguali, saranno simili ed uguali fra loro.*

## I X.

E ſimilmente ancora *ſe le ragioni compoſte ſieno fra loro uguali, anche le ragioni, che le compongono, ſaranno fra loro uguali.*

## X.

Ma *ſe le ragioni componenti foſſero diſuguali, diſuguali ancora ſarebbero le ragioni compoſte.*

## X I.

E *ſe* finalmente *le ragioni compoſte foſſero diſuguali, diſuguali ancora ſarebbero le componenti.*

## X I I.

Fig. 21. *Se ſieno due ragioni di* A *a* B, *e di* C *a* D, *e preſa come unità la grandezza* G *uguale a* B, *ſi moltiplichino gli antecedenti* A, C, *ſicchè ne riſulti l' antecedente* H, *e dalla moltiplicazione dei conſeguenti* B, D *riſulti il conſeguente* I, *ſarà la ragione di* H *ad* I *compoſta delle ragioni di* A *a* B, *e di* C *a* D.

Poichè nel moltiplicarſi i conſeguenti ſi pone G a B come D ad I, ed è G uguale a B, ſarà anche D uguale ad I, e perciò (*a*) la ragione di H ad I ſarà la ſteſſa, che la ragione di H a D: ma per eſſere G ad A come C ad H, la ragione di H a D è compoſta delle ragioni di A a B, e di C a D; dunque anche la ragione di H ad I ſarà compoſta dalle due date ragioni di A a B, e di C a D.

(*a*) *Aſſi.* 5.

X. Quindi ſi può facilmente intendere il ſenſo della 5. Definizione del VI. Libro di Euclide, la quale per altro è oſcuriſſima, e piuttoſto riputar ſi deve Teorema da dimoſtrarſi, che Definizione da ſupporſi come chiariſſima.

Dice dunque Euclide, *che allora una ragione dicesi compoſta di più ragioni, quando le quantità*

*di*

*di dette ragioni moltiplicate insieme producano quella ragione*; ovvero, come spiega il Galileo, *quando moltiplicando insieme le quantità, o le valute delle date proposizioni*, o ragioni *semplici*, *si produce la quantità, o la valuta della proporzione*, o ragione, *la quale poi si chiama composta di quelle*. Poichè in fatti si è dimostrato, che moltiplicandosi gli antecedenti e i conseguenti, la ragione dell' antecedente prodotto al suo conseguente prodotto è composta delle due date ragioni. Perchè nondimeno Euclide, Scrittore per altro diligentissimo, non si è giammai servito di quella Definizione, giudicano molti, che ella vi sia stata inserita, ed aggiunta da qualche Interprete. In fatti Euclide per dimostrare la Prop. 23. del Lib. VI. *che i rettangoli sono in ragione composta de' loro lati*, si fonda sopra quest' altro Principio, che *in tre grandezze la ragione della prima all' ultima è composta delle due ragioni frapposte*, cioè della prima alla seconda, e della seconda alla terza; il quale Principio, benchè verissimo, non è però punto più chiaro di quella definizione, con la quale conviene nondimeno nel senso, e nella sostanza, come si è nella Prop. I. e XII. dimostrato; e perciò Euclide sempre sarà biasimevole, o per aver posta quella definizione senza giammai servirsene, o più tosto per essersi servito di un' altra definizione, o Principio, che era egualmente oscuro del primo, e dovevasi prima spiegare, e dimostrare, o fare almeno conoscere, che egli conveniva, nè faceva senso diverso dalla prima Definizione. E quì per ultimo si riflette, che secondo tutte le varie idee, e definizioni, che dai Geometri sono date della ragione composta, e della moltiplicazione, ovvero composizione delle ragioni; sempre si è dimostrato, che di tre grandezze la ragione della prima all' ultima è composta delle ragioni della prima alla seconda, e della seconda alla terza, che è il Teorema, o Principio, dal quale come da copiosissimo fonte de-

derivano altri infiniti; essendosi già da me dimostrato, che tutte le varie definizioni fra loro nella sostanza convengono; e che quella ragione, che chiamasi *composta* nel senso di una definizione, è altresì composta nel senso di tutte le altre: sicchè in una incertezza, o ambiguità vi rimanga intorno alle ragioni, ed a quelle proprietà, che competono alle ragioni medesime, e che nei passati Libri si sono distintamente spiegate.

# LIBRO III.

## *Delle Linee rette, che concorrono, o si congiungono insieme; e degli angoli, che da quelle sono formati.*

Estendosi parlato finora delle Grandezze in generale, ovvero di qualsivoglia genere di quantità, e spiegate nel primo Libro le varie ragioni, che si ritrovano fra le grandezze medesime, e nel secondo le proprietà, che competono alle ragioni, e così dimostrati i principj, e copiosissimi semi di tutta la Matematica; ora si deve, secondo l' ordine già stabilito, trattare distintamente de varj generi della Grandezza, o quantità continua, la cognizione della quale appartiene, come si disse, alla più nobile e riguardevole parte della Matematica, che chiamasi *Geometria*. E perchè la prima, e più semplice spezie della grandezza continua sono le Linee, nelle quali ritrovasi una sola estensione, cioè lunghezza senza larghezza alcuna, o profondità; ne tre Libri, che seguono, si parlerà delle Linee, dovendosi poi trattare ordinatamente negli altri delle superficie, e dei corpi. E poichè le linee rette si possono paragonare o fra loro, ovvero con altra linea curva, o circonferenza di un circolo, parlerò in primo luogo nel Libro Terzo delle linee rette, che s' incontrano o si congiungono insieme, e degli angoli, che ne risultano, o da quelle sono formati; indi nel Quarto Libro di quelle linee rette, che non mai concorrono insieme, e perciò chiamare si sogliono *equidistanti*, o *parallele*; per poi trattare nel Quinto Libro di quelle rette, che s' incontrano con la circonferenza di un circolo, o pure s' incontrano

insie-

insieme, e formano gli angoli dentro del circolo istesso.

# DEFINIZIONI.

## I.

IL *punto* è quello, che è indivisibile, o che non ha parti.

## II.

La *linea* è una lunghezza senza larghezza.

## III.

Se due linee, sovraponendosi una all'altra, perfettamente si adattino, sicchè la lunghezza dell'una non ecceda la lunghezza dell'altra, saranno fra loro uguali; siccome ancora, se sieno fra loro uguali, sovraponendosi una all'altra, perfettamente si adatteranno.

## IV.

La linea *retta* è la più breve di tutte quelle, che si possono tirare da un punto all'altro.

## V.

E perchè fra gli stessi due punti non possono tirarsi due diverse linee brevissime, non si potranno altresì fra gli stessi due punti tirare due linee rette diverse; onde due linee rette non potranno giammai chiudere, o contenere spazio veruno.

## VI.

Fig. 28. E però, se tre linee rette A B, B C, C A concorrano, o si congiungano insieme nelle loro estremità A, B, C, qualsivoglia di quelle A B, essendo retta, e perciò più corta di tutte quelle, che vanno a terminare agli stessi punti A, B, sarà minore dell'altre due A C, C B prese insieme; ovvero le stesse due A C, C B prese insieme saranno sempre maggiori della rimanente A B.

## VII.

VII.

La *superficie* è una lunghezza insieme, e larghezza, senza altezza alcuna, o profondità.

VIII.

Superficie *retta*, o *piana*, dicesi quella, nella quale si possono per qualsivoglia verso, o parte tirare linee rette.

IX.

Siccome *i termini*, o *l'estremità* della linea sono i punti, così i termini, o l'estremità della superficie sono le linee.

X.

L' *angolo* è l' inclinazione di due linee rette, che non essendo poste per diritto, s' incontrano, e prolungate si segano in un punto, che chiamasi *vertice*, *cima*, o *punta* dell'angolo.

XI.

D'onde apparisce, che se negli angoli B A C, H G I ponendosi un vertice A sopra dell' altro vertice G, e un lato A B sovra d' un lato G H, anche l'altro lato A C cada, e si adatti sopra dell' altro lato G I, gli angoli B A C, H G I saranno simili ed eguali fra loro. E, se due angoli siano simili ed uguali fra loro, ponendosi il vertice d'uno sopra il vertice dell'altro, ed un lato sopra d' un lato, anche l' altro lato dovrà cadere sopra dell' altro lato. Fig. 29.

XII.

Cadendo una linea retta C D, ovvero E D sovra di un' altra linea retta A B, formerà con quella due angoli C D A, C D B, ovvero E D A, E D B, che si chiamano angoli *conseguenti*, o *posti accanto*. Fig. 27.

XIII.

Se questi angoli conseguenti sieno fra loro eguali, l'uno e l'altro di quelli si dirà angolo *retto*.

XIV.

Che se fossero disuguali, il maggiore chiamasi *ottuso*, ed il minore dicesi *acuto*.

XV.

XV.

È la linea retta CD, che nel cadere sovra di un'altra AB è egualmente inclinata verso dell'una e dell'altra parte, e perciò forma gli angoli retti ed uguali, dicesi *perpendicolare*; ma quella ED, che è più inclinata verso una parte, che l'altra, e forma gli angoli disuguali, dicesi *obliqua*.

XVI.

D'onde ne segue, che tutti gli angoli retti sono fra loro eguali. Poichè ponendosi la linea (*a*) Fig. 31. retta AC (*a*) sopra la retta AB (*b*) in maniera tale, che il punto, o cima dell'angolo DCa (*b*) Fig. 27. da sopra il punto, o cima dell'angolo D, anche la perpendicolare BD deve cadere sopra la perpendicolare CD; e però l'angolo retto ADB deve adattarsi, ed essere uguale all'altro angolo retto ADC: altrimenti, se le perpendicolari non coincidessero, l'una, o l'altra di quelle non sarebbe egualmente inclinata sopra le linee AB, AC, e perciò non sarebbe veramente perpendicolare.

XVII.

La *figura* è una superficie chiusa, o compresa da una, o più linee, come da termini, o sia contorno.

XVIII.

Fig. 24. Il *circolo* è una figura compresa da una sola linea curva, o rotonda, ciascun punto della quale è egualmente lontano da un punto medesimo A, posto dentro del circolo.

XIX.

Fig. 24. Il circolo si genera, o si produce da una linea retta AC, che stando immobile, e fissa con un suo termine, o punto A, coll'altro punto C gira d'intorno finchè ella ritorni al luogo d'onde si era partita.

XX.

Quel punto immobile A chiamasi *centro* del circolo; e la linea curva descritta dall'altro punto

to mobile C chiamasi *circonferenza*, e le sue parti si dicono *archi*.

XXI.

Le linee rette AC, AI, AB, AH, che congiungono il centro A con qualsivoglia punto C, I, B, H, della circonferenza, diconsi *raggi*; e perchè sono sempre uguali all'istessa retta, che rivolgendosi descrive il circolo, sono anche sempre uguali fra loro.

XXII.

Donde apparisce, che in qualsivoglia maniera giri, o si rivolga il raggio AC intorno del centro A, il punto C, che è termine, o estremità dell'istesso raggio, deve sempre cadere, o terminare in punto della circonferenza: siccome ancora, se le rette, o raggi AC, AI, AB, AH fossero fra loro uguali, la circonferenza del circolo, che si descriva con uno di questi raggi intorno del centro A, dovrà sempre passare per l'estremità di qualsivoglia altro raggio, o per i punti I, B, H.

XXIII.

Il *triangolo* è una figura compresa da tre linee rette, che si congiungono insieme, o concorrono nelle loro estremità.

XXIV.

Due linee rette del triangolo, chiamansi *lati* di quello, e la rimanente dicesi *base*.

## POSTULATI.

I.

DA un punto a qualsivoglia altro punto tirare una linea retta.

II.

Stendere, o prolungare in infinito una data linea retta finita, o terminata.

III.

Dato un punto A come centro, ed un altro Fig. 24.

pun-

punto C come intervallo, ovvero data una linea retta AC come raggio, descrivere il circolo,

I V.

Intorno, o accanto al dato punto A, *descrivendo un circolo con qualsivoglia intervallo*, tagliare dalla data linea retta CD due parti, o linee rette uguali AC, AB.

# PROPOSIZIONI.

## I.

Fig. 23. **D***Ividere in mezzo la data retta* A B.

Intorno a i centri A, B col medesimo raggio A B descrivansi (*a*) i circoli CBD, FAG, che concorrano insieme, o si seghino ne i punti H, I, e tirisi (*b*) la retta HI, che dividerà in mezzo la data linea AB nel punto E. Imperciocchè tirati i raggi AI, AH, BI, BH, sarà (*c*) ciascuno di questi raggi eguale all'istesso raggio A B, onde saranno anche uguali fra loro; e perciò (*d*) facendosi centro in H, e circonferenza in B, il circolo, che si descrive, PB dovrà passare per l'uno, e l'altro de' punti B, A, per essere questi l'estremità de' raggi, o linee rette fra loro uguali HB, HA: siccome ancora facendosi centro in I, e circonferenza in B, il circolo, che si descrive, NBM dovrà passare per l'uno, e l'altro de' punti B, A, per essere questi l'estremità de' raggi, e linee rette fra loro uguali IB, IA. Ora si concepiscano i raggi HB, BI, e la retta BE, ovvero tutta la superficie, in cui sono descritti que' raggi HB, BI, e la retta BE, rivoltarsi intorno alla linea retta HI, e cadere sopra la parte opposta, in cui sono descritti i raggi HA, AI, e la retta AE. Il primo B, come estremità del raggio HB dovrà cadere (*d*) in un punto della sua circonferenza

(*a*) *Post.* 3.
(*b*) *Post.* 1.
(*c*) *def.* 21.
(*d*) *def.* 22.
(*d*) *def.* 22.

PB

PBAO; e l'istesso punto B, come estremità dell' altro raggio I B, dovrà cadere in un punto della sua circonferenza N B A M, e però il punto B dovrà cadere in un punto, che sia comune all'una e all' altra circonferenza; ma le circonferenze non hanno altro punto comune, che il punto A, nel quale si segano, o per il quale si è dimostrato, che passano tutte due; dunque il punto B dovrà cadere sopra del punto A, e perciò tutta la retta, o parte sinistra B E caderà, e si adatterà sopra la retta, o parte destra E A, e però (*a*) le parti A F, E B saranno fra loro eguali, e la linea A B sarà divisa in mezzo nel punto E. (*a*) *Def.* 3.

## I I.

*Sopra la data linea retta* C D *dal punto* E *dato in essa alzare la perpendicolare.* Fig. 14.

Intorno al dato punto E si taglino (*b*) le parti uguali E A, E B, sicchè la linea retta A B sia divisa in mezzo nel punto E, e facendosi centro in A ed in B, coll'istesso raggio A B descrivansi (*c*) due circoli, i quali si seghino ne' punti H, I, poi tirisi la retta H I, la quale dovendo passare (*d*) per il punto, che divide in mezzo la retta A B, passerà per il dato punto E, d'intorno al quale si sono prese le parti uguali E A, E B, e sarà la retta E I perpendicolare sopra l'A B. Poichè tirati, come sopra, i raggi A H, A I B H, B I, e rivolgendosi intorno alla linea retta H I i raggi H B, B I, con la retta B E, ovvero la superficie, nella quale sono descritti i raggi H A, A I, con la retta A E, si è dimostrato (*e*) che il punto B deve cadere sopra del punto A, e la retta B E sopra la retta A E, anche l'angolo B E I caderà sopra l'angolo A E I; e perciò (*f*) saranno gli angoli fra loro uguali, e la retta E I sarà (*g*) perpendicolare sopra la data retta A B.

(*b*) *Post.* 4.
(*c*) *Post.* 3.
(*d*) *Antec.*
(*e*) *Antec.*
(*f*) *Def.* 11.
(*g*) *Def.* 15.

## III.

Fig.25. *Sopra la data linea retta* A B *dal punto* C *dato fuori di essa tirare la perpendicolare.*

A qualsivoglia punto D della data retta linea A B tirisi la retta C D; e se ella non è perpendicolare alla data retta A B, facendosi centro in C coll'intervallo, o raggio C D descrivasi il circolo D F, che seghi la data retta nel punto E, al quale tirisi il raggio C E: poi facendosi centro in D ed in E con gl'intervalli, o raggi D C, E C descrivansi due circoli, i quali si seghino ne' punti C, I, e tirinsi le rette C I, D I, E I, e sarà la retta C O perpendicolare sopra l'A B. Poichè, essendo i raggi D C, D I, che partono dal centro D, fra loro uguali, ed uguali ancora fra loro i raggi E C, E I, che partono dal centro E, siccome i due raggi D C, E C, che partono dal centro C, sono fra loro uguali, così ancora uguali saranno i raggi, o rette I D, I E; e perciò facendosi centro in I, e circonferenza in E, il circolo, che si descrive, G E H dovrà passare per il punto D. Concepiscansi adesso i raggi I E, E C con la retta E O, ovvero la superficie, nella quale sono descritti, rivoltarsi intorno alla retta linea C I, e cadere sopra la superficie opposta, nella quale sono descritti i raggi I D, D C con la retta D O; e perchè (*a*) il punto E come estremità de i raggi I E, C E deve cadere in un punto tanto della circonferenza G E D H, quanto della circonferenza F E D, caderà nel punto D, nel quale si è dimostrato che le circonferenze si segano, e perciò la retta E O caderà sopra la retta D O, l'angolo E O C sopra l'angolo D O C onde gli angoli E O C, D O C saranno retti ed uguali, e la retta C O sarà perpendicolare sopra la data linea retta A B.

(*a*) *Def.* 22.

## IV.

Fig.24. 25. Dall' una e l' altra delle due passate pro-

proposizioni manifestamente apparisce, che *dall' istesso punto* E, ovvero C, *non può tirarsi che una sola retta, la quale sia perpendicolare sopra l' istessa retta*, A B.

## V.

*Date due linee rette disuguali* A K, B C *tagliare dalla maggiore* A K *una parte uguale alla minore* B C. Fig. 26.

Tirisi la retta A B, e facendosi centro in A ed in B, coll' istesso intervallo, o raggio A B descrivansi i circoli, i quali si seghino nel punto D, al quale si tirino le rette A D, B D; poi fattosi centro in B descrivasi col raggio B C il circolo, o arco E C F, che seghi il lato D B prolungato nel punto G; indi facendosi centro in D descrivasi col raggio D G l'arco G H, che seghi l'altro lato D A prolungato nel punto I; e fattosi finalmente centro in A descrivasi col raggio A I l'arco I L, che seghi la data linea maggiore A K nel punto O, e sarà la retta A O uguale alla data retta B C. Poichè, se da i raggi uguali D G, D I si tolgano le parti D B, D A, che sono fra loro uguali, per essere uguali all'istesso raggio A B, saranno ancora (*a*) le parti, che restano, B G, A I, fra loro uguali; ma il raggio B C è uguale al raggio B G, e similmente il raggio A O è uguale al raggio A I; dunque anche i raggi, o le linee rette B C, A O saranno uguali fra loro. (*a*) Assi. 4.

## V I.

Quindi potrebbesi *dal punto dato* A *tirare una linea retta uguale alla data retta* B C.

Se tirandosi, e prolungandosi in infinito qualsivoglia retta A K, si tagliasse (*a*) da questa una parte A O uguale alla data retta B C.

## VII.

Fig. 27. *Se sopra la linea retta* A B *cada qualsivoglia altra linea retta* C D, *ovvero* E D, *saranno gli angoli conseguenti* C D A, C D B, *ovvero* E D A, E D B *due retti, o pure uguali a due retti.*

Se la retta linea C D sia perpendicolare sopra (a) Def. 15. la retta A B, saranno (a) gli angoli da lei formati C D A, C D B retti ed uguali. Ma se ella cada obliquamente, come la retta E D, saranno gli angoli disuguali, e l' ottuso E D A sarà maggiore del retto, l' acuto E D B sarà minore (b) 2. par. di questa. del retto. Alzisi dunque dal (b) punto D la perpendicolare D C, e togliendosi all' angolo ottuso E D A l'angolo E D C, resterà l'angolo retto C D A; ed aggiugnendosi all'angolo acuto E D B, l'istesso angolo E D C tolto all' ottuso, si formerà l' angolo retto C D B, onde l' angolo ottuso insieme con l'acuto, cioè gli angoli conseguenti insieme saranno sempre uguali a due retti.

## VIII.

D' onde ne segue, che *i quattro angoli, che si formano da due linee rette* A B, C H, *che fra loro si segano nel punto* D, *sono sempre uguali a quattro retti; siccome ancora, se fossero molte le rette, che si segano nel punto* D, *e gli angoli, che da quelle si formano intorno al punto* D, *tutti quegli angoli, che sono formati, o hanno la loro cima nel punto* D, *presi insieme saranno sempre uguali a quattro retti.*

## IX.

*Se due linee rette* A B, F E *si seghino nel punto* D, *saranno gli angoli opposti* A D F, B D E, *ovvero gli angoli* A D E, B D F *fra loro uguali.*

Poi-

Poichè tanto gli angoli conſeguenti A D F, A D E, quanto gli angoli conſeguenti B D E, A D E ſono uguali a due retti (*a*) e perciò uguali ancora fra loro (*b*), tolto di comune l'angolo A D E, ſarà l' angolo rimanente A D F uguale all' angolo rimanente, ed oppoſto B D E: e perchè tanto l'angolo A D E coll'angolo A D F, quanto l'angolo B D F coll' iſteſſo angolo A D F ſono eguali a due retti, e perciò uguali ancora fra loro, tolto l' angolo comune A D F, ſaranno anche gli angoli rimanenti, ed oppoſti A D E, B D F fra loro uguali.

(*a*) 13. qu.
(*b*) Def. 16.

## X.

*Se dallo ſteſſo punto* D *della linea retta* A B *ſi tirino due linee rette* D E, D F, *che facciano gli angoli oppoſti* A D F, B D E *uguali fra loro; ovvero gli angoli conſeguenti* A D E, A D F *uguali a due retti, ſaranno le linee* D E, D F *poſte per diritto fra loro, ovvero formeranno una linea retta* F E.

Poichè ſe non foſſero poſte per diritto, e non formaſſero una linea retta, prolunghiſi la linea retta F D (*c*) e formiſi la linea retta F D G. Sarebbe dunque l'angolo B D G uguale all' angolo oppoſto A D F (*d*), ma per ipoteſi ancora l'angolo B D E era eguale all' iſteſſo angolo A D F; dunque gli angoli B D G, B D E ſarebbero fra loro uguali, e però la parte uguale al tutto, il che è impoſſibile. Similmente ancora, ſe F D G foſſe una linea retta gli angoli conſeguenti A D F A D G ſarebbero uguali a due retti (*e*); ma per ipoteſi anche gli angoli A D F, A D E ſono uguali a due retti, dunque (*f*) ſarebbero gli angoli A D F, A D G uguali agli angoli A D F, A D E, e tolto l'angolo comune A D F, ſarebbe l'angolo A D G uguale all'angolo A D E, il maggiori al minore, il che è impoſſibile.

(*c*) Poſtul. 1.
(*d*) Ant.
(*e*) 13. qu.
(*f*) Def. 16.

## XI.

Fig. 28. 29. *Se nei triangoli* A C B, G I H *fia la baſe* A B *uguale alle baſe* G H, *e gli angoli ſopra la baſe ſieno uguali fra loro, cioè l' angolo* C A B *uguale all' angolo* I G H, *e l' angolo* C B A *uguale all' angolo* I H G, *ſaranno ancora i lati che corriſpondono agli angoli uguali, uguali fra loro; cioè il lato* A C *uguale al lato* G I, *e l' altro lato* B C *uguale all' altro lato* H I, *e l' angolo* A C B *uguale all' angolo* G I G.

Intendaſi che la baſe A B ſi ſovrapponga alla baſe G H, e per eſſergli uguale ſegli addati perfettamente (*a*), ſicchè il punto A cadendo ſopra del punto G, anche il punto B cada ſopra del punto H; e perchè l'angolo C A B poneſi uguale all'angolo I G H, cadendo il lato, o baſe A B ſopra del lato, o baſe G H, anche il lato A C caderà (*b*) ſopra del lato G I; ſiccome per eſſere l'angolo C B A uguale all'angolo I H G, anche il lato C B caderà ſopra il lato I H, e perciò il punto C, nel quale concorrono i lati A C B C, caderà ſopra il punto I, nella quale concorrono gli altri lati G I, H I, onde il lato A C ſi adatterà, e ſarà uguale al lato G I; e l'altro lato B C ſi adatterà, e ſarà uguale all'altro lato H I, ed in conſeguenza anche (*a*) l' angolo A C B s'adatterà, e ſarà uguale all'angolo G I H.

(*a*) *Def.* 3.

(*b*) *Def.* 11.

## XII.

Fig. 28. 29. *Se ne' triangoli* A C B, G I H *ſieno due lati uguali a due lati, cioè il lato* A B *uguale al lato* G H, *e l' altro lato* A C *uguale all' altro lato* G I, *e di più gli angoli contenuti da i lati uguali, ſieno uguali fra loro, cioè l' angolo* C A B *uguale all' angolo* I G H, *ſaranno ancora le baſi fra loro uguali; cioè la baſe* C B *uguale alla baſe* I H, *egli an-*

*angoli, che corrispondono a' lati uguali fra loro, cioè l' angolo* A C B *uguale all' angolo* G I H, *e l' angolo* C B A *all' angolo* I H G.

Sovrappongasi il lato A B al lato G H, ed essendogli uguale, il punto A caderà sopra G, ed il punto B sopra H; e perchè l'angolo C A B ponesi uguale all'angolo I G H, anche il lato A C caderà sopra il lato G I, ed essendogli uguale, il punto C caderà sopra il punto I; dunque cadendo i punti C, B sopra i due punti I, H, tutta la retta, o base C B caderà (*a*) sopra la retta, o base I H, onde gli sarà uguale; ed in conseguenza anche l'angolo A C B sarà uguale all'angolo G I H, e l'angolo C B A all'angolo I H G. (*a*) Def. 5.

## XIII.

*Se ne' triangoli* A C B, G I H *sieno tutti tre i lati, cioè il lato* A B *uguale al lato* G H, *il lato* A C *al lato* G I, *il lato* C B *al lato* I H, *saranno ancora tutti gli angoli, che corrispondono a i lati uguali, uguali fra loro; cioè l' angolo* B A C *uguale all' angolo* H G I, *l' angolo* A C B *uguale all' angolo* G I H, *e l' angolo* C B A, *uguale all' angolo* I H G. Fig. 29. 30.

Sovrappongasi, e per essergli uguale, si adatti il lato G H sopra del lato A B, anche il punto I dovrà cadere sopra del punto C, ed in conseguenza i lati G I, I H, caderanno sopra i lati A C, C B, e gli angoli ancora, che corrispondono a i lati uguali, caderanno sopra gli angoli.

Imperocchè, se cadendo il lato G H sopra del lato uguale A B, non cadesse ancora il punto I sopra del punto C, caderebbe questo, o dentro il triangolo nel punto D, o in un lato del triangolo nel punto E, o fuori del triangolo nel punto F. Cada prima, s'egli è possibile, nel punto D, sicchè i due lati A D, D B sieno uguali a i

lati G I, I H; e prolungata l'A D fino in E;
(a) Def. 5. saranno (a) le due rette AC, CE maggiori della retta AE, cioè delle due rette AD, DE, ed aggiunta di comune la retta E B, saranno ancora le tre rette AC, CE, EB maggiori delle tre rette AD, DE, EB; ma le due rette DE, EB sono maggiori della retta DB, ed in conseguenza le tre AD, DE, EB sono maggiori delle
(b) Ass. 10. due sole AD, DB; dunque (b), se le tre rette AC, CE, EB sono maggiori delle tre rette AD, DE, EB, molto più saranno maggiori delle due sole AD, DB, cioè i due lati AC, CB sarebbero maggiori de i due lati AD, DB, ovvero dei lati GI, IH, contro la suppoſizione. Che ſe il punto I cadeſſe nel punto E, ed il lato HI ſopra la retta, o parte BE, ſiccome il lato CB è maggiore del lato, o parte BE, così ſarebbe l'iſteſſo lato CB maggiore ancora del lato HI contro la ſuppoſizione. Cada finalmente il punto I nel punto F, ſicchè la retta BF dicaſi uguale alla retta HI, o per ipoteſi alla retta BC, e la retta AF alla retta GI, o per ipoteſi alla retta AC. Siccome dunque le due rette AE, EC ſono maggiori della retta AC, così ſaranno maggiori ancora della retta AF, cioè delle due rette AE, EF, e perciò tolta di comune la retta AE, ſarà la rimanente EC maggiore della rimanente EF, ed aggiunta di comune la retta EB, ſaranno le due rette CE, EB maggiori delle due rette EF, EB; ma le due rette EF, EB ſono maggiori della retta BF; dunque molto maggiori ſarebbero le rette CE, EB della retta BF, cioè il lato CB del lato FB, ovvero del lato IH contro la ſuppoſizione: non potendo dunque il punto I cadere in maniera alcuna fuori del punto C, dovrà cadere ſopra del medeſimo punto C, e perciò i lati caderanno ſopra dei lati, e gli angoli ſopra degli angoli; onde gli angoli, che corriſpondono a i lati uguali, ſaranno uguali fra loro.

*Eſſen-*

*Essendosi dimostrato nelle tre passate Proposizioni, che tutti tre i lati di un triangolo devono cadere sopra i tre lati dell' altro triangolo, potrebbe quì di passaggio manifestamente inferirsi, che* se due triangoli avranno

I. Sopra le basi uguali angoli uguali;

II. O un angolo uguale contenuto da lati uguali,

III. O tutti tre i lati uguali,

i triangoli medesimi saranno uguali fra loro; *ma questo più opportunamente si osserverà nelle tre prime Proposizioni del Libro* VI.

## XIV.

*Se ne' triangoli* A C B, G I H *sieno bensì i due lati* C A, A B *uguali a due lati* I G, G H, *ma un angolo contenuto* C A B *sia maggiore dell' angolo contenuto* I G H, *anche la base, o lato rimanente* C B, *che corrisponde all' angolo maggiore* C A B, *sarà maggiore della base o lato rimanente* I H, *che corrisponde all' angolo minore* I G H. Fig. 29. 30.

Poichè l'angolo I G H ponesi minore dell'angolo C A B, sovrapponendo il lato G H al lato uguale A B, dovrà l'altro lato G I cadere sotto del lato A C, e però il punto I dovrà cadere o in D, o in E, o in F, sicchè la retta I H fosse uguale alla retta D B, o E B, o F B; come in ciascheduno di questi casi si è dimostrato (*a*), che (*a*) *Ant.* la base, o lato D B, o E B, o F B è sempre minore della base, o lato C B; dunque anche il lato, o base I H sarà minore della base, o lato B C.

## XV.

Similmente ancora *se ne' triangoli* A C B, G I H *sieno bensì due lati* C A, A B *uguali a' due lati* I G, G H, *ma però l' altro lato, o base* C B *sia maggiore dell' altro lato, o base* I H, *anche l' angolo* C A B *che*

cor-

*corrisponde al lato maggiore* C B, *sarà maggiore dell' angolo* I G H, *che corrisponde al lato minore* I H.

Poichè, se oltre a i lati IG, GH uguali per ipotesi ai lati CA, AB fosse anche l'angolo contenuto IGH uguale all'angolo contenuto CAB, (a) 12. di qu. anche la base IH sarebbe (a) uguale alla base CB contro la suppozione; e se l'angolo IGH fosse maggiore dell'angolo CAB, anche la base (b) Ant. IH sarebbe (b) maggiore della base CB; il che similmente ripugna alla suppozione.

## XVI.

Fig. 31. *Se nel triangolo* A B C *sieno i lati* A B, C B *uguali fra loro, anche gli angoli* B A C, B C A, *che sono sopra la base, saranno fra loro uguali.*

Dividasi in mezzo, o in due parti uguali, la (c) 1. di qu. base AC, nel punto D (c), e tirisi la retta BD. Perchè ne' triangoli ABD, CBD in lato AB ponesi uguale al lato CB, e il lato AD si è fatto uguale al lato CD, e il lato BD è comune; anche gli angoli BAD, BCD, ovvero BAC, BCA, che corrispondono a i lati uguali, saran- (d) 11. di qu. no (d) uguali fra loro.

## XVII.

Fig. 32. *Ma se i lati* A C, C B *fossero disuguali, anche gli angoli sopra la base sarebbero disuguali; e l' angolo* B A C, *che corrisponde al lato maggiore* C B, *sarebbe maggiore dell' angolo* B C A, *che corrisponde al lato minore* A B.

Dividasi in mezzo la base AC, e tirisi la retta BD. Poichè ne' triangoli ADB, CDB sono bensì i due lati AD, DB uguali a' due lati CD, DB, ma però la base CB ponesi maggiore del- (e) 15. di qu. la base AB, anche l'angolo CDB sarà (e) maggiore dell'angolo ADB; onde la retta DB non

sarà

sarà perpendicolare sopra la AC; alzisi dunque (a) sopra la retta AC dal punto D la perpendicolare DE, che segherà il lato maggiore in un punto E, al quale tirisi la retta AE. Perchè ne i triangoli ADE, CDE i due lati AD, DE sono uguali a i due lati CD, DE, e gli angoli contenuti ADE, CDE sono retti ed uguali, sarà anche l'angolo EAD uguale all'angolo ECD; e perciò, siccome l'angolo BAC è maggiore dell'angolo EAD, così sarà maggiore ancora dell'angolo ECD, ovvero BCA. (a) 12. di qu.

## XVIII.

*Se nel triangolo* A B C *gli angoli sopra la base* B A C, B C A, *sieno fra loro uguali, anche i lati* A B, C B *saranno uguali.*

Poichè, se i lati fossero disuguali, anche gli angoli, che corrispondono a i lati disuguali, sarebbero disuguali (b) contro la suppositione. (b) Ant.

## IX.

Ma *se nel triangolo* A B C *gli angoli sopra la base* B A C, B C A *fossero disuguali, anche i lati* A B, C B *sarebbero disuguali; ed il lato* C B, *che corrisponde all'angolo maggiore* B A C, *sarebbe maggiore del lato* A B, *che corrisponde all'angolo minore* B C A. Fig. 31.

Poichè l'angolo BAC ponesi maggiore dell'angolo BCA, concepiscasi l'angolo EAC uguale all'istesso angolo BCA, e sarà (c) nel triangolo AEC ancora il lato AE uguale all'altro lato CE, ed aggiunta di comune la retta EB, saranno le due rette AE, EB uguali alla retta CB; ma le due rette AE, EB sono maggiori della retta AB; dunque la retta ancora, o lato CB sarà maggiore della retta, o lato AB. (c) Ant.

## X X.

Fig.33. *Dividere in mezzo l' angolo dato* A B C.

Facendoſi centro nel punto B con qualſivoglia raggio B E deſcrivaſi un circolo, che ſeghi l'altro lato in punto F, e tirata l' EF dividaſi queſta di mezzo nel punto D, e ſi congiunga BD. Perchè dunque nei triangoli EDB, FDB i raggi, o lati BE, BF ſono uguali, ed ugnali ancora ſi ſono poſti i lati ED, FD, ed il lato BD è comune, ſaranno (*a*) anche gli angoli EBD, FBD uguali fra loro, e perciò l'angolo ABC ſarà diviſo in mezzo dalla retta BD.

(*a*) 13. *di qu.*

## X X I.

Fig.34. *In qualſivoglia punto* G *della data retta* G H *formare un angolo uguale all' angolo dato* B E F.

Da qualſivoglia punto B (*b*) tiriſi la perpendicolare BD, e tagliandoſi (*c*) dalla GH la parte G I uguale ad ED, ſi alzi (*d*) la perpendicolare IK, e ſi ponga (*e*) IK uguale a DB, e tiriſi la retta GK. Perchè ne i triangoli EDB, GIK intorno agli angoli retti ed uguali EDB (*f*) GIK, ſono i lati ED, DB uguali a i lati GI, IK, ſarà anche l'angolo KGI uguale all'angolo BED, ovvero all'angolo dato BEF.

(*b*) 3. *di qu.* (*c*) 5. *di qu.* (*d*) 2. *di qu.* (*e*) 5. *di qu.* (*f*) 5. *d. qu.*

## X X I I.

Fig.34. 35. *Dati due angoli diſuguali* H G K, *ed* M, *ſi taglierà dal maggiore* H G K *una parte uguale al minore* M.

Se nell'iſteſſo punto, ovvero cima dell'angolo maggiore G ſi formerà l'angolo HGL uguale all'angolo dato M.

# LIBRO IV.

## *Delle Linee rette, che mai non s' incontrano insieme, o sono Parallele.*

UNA delle più nobili ed illustri scoperte, che fatte fossero dagli antichi Geometri, ed a noi tramandate, devesi certamente riputare la dottrina di quelle rette, che non incontrandosi giammai fra loro, ed essendo sempre egualmente lontane una dall'altra, *Equidistanti*, o *Parallele* si chiamano: non solamente, perchè da quelle, come da fonte, derivano, e si dimostrano moltissime proprietà degli angoli, figure, e superficie; ma ancora perchè risplende in esse l'idea, o qualche immagine dell'infinito; ed in conseguenza ancora la mirabile forza, vivacità, ed estensione di nostra mente. Pareva nondimeno, che a questa sì nobile, e sì ragguardevole parte della Geometria mancasse quella chiarezza ed evidenza, che giustamente s'ammirano in tutte l'altre, essendochè la natura e proprietà delle linee parallele solevasi dimostrare, e dedurre o dall'essere queste prolungate in infinito, o da qualche altro principio negativo ed ambiguo, atto bensì a convincere, ma non già ad illuminare il nostro intelletto. Quindi è che chiarissimi Geometri si posero ad illustrare, e confermare con vario metodo questa dottrina, come si può conoscere dalle loro Opere; ed io medesimo sull'esempio loro, benchè con altr' ordine e metodo, ho trattata questa materia, e dalla sola definizione, e semplice idea delle linee parallele ho con prove chiarissime, ed affermative dimostrate tutte le proprietà, che competono alle parallele medesime, ed alle figure, che da quelle sono composte.

DE-

## II.

Fig.37. *Se cadendo sopra le linee rette* A B, C D *la retta* E F *faccia gli angoli alterni* AEF, E F D *uguali fra loro, le rette* A B, C D *saranno parallele.*

Dividasi in mezzo la retta EF nel punto I, dal quale sopra la retta C D tirisi la perpendicolare I G, che prolungata seghi la retta A B nel punto H. Perchè nei triangoli I E H, I F G le basi, o lati I E, I F si pongono fra loro uguali, e l'angolo I E H ponesi uguale all'angolo I F G, (*a*) 9. III. e l'angolo E I H è uguale (*a*) all'angolo opposto F I G, sarà ancora (*b*) l'angolo I H E ugua- (*b*) 11. III. le all'angolo I G F; ma l'angolo I G F è retto, dunque l'angolo I H E sarà retto, onde la retta G H sarà perpendicolare ad ambedue le rette A B, (*c*) *Ant.* C D, e perciò (*c*) le rette medesime A B, C D saranno parallele.

## III.

Fig.37. *Se cadendo sopra le rette* A B, C D *la retta* L F *faccia l'angolo esterno* L E B *uguale all'angolo interno ed opposto* L F D, *ovvero i due angoli interni, e dalla medesima parte* B E F, E F D *uguali a due retti, saranno le rette* A B, C D *parallele.*

Poichè, essendo l'angolo A E F uguale all'an- (*d*) 9. III. golo opposto L E B (*d*), se l'angolo esterno L E B ponesi uguale all'angolo interno L F D, ovvero E F D, anche l'angolo A E F sarà uguale all'an- (*e*) *Ant.* golo alterno E F D, e però (*b*) le rette A B, C D saranno parallele. Similmente ancora, se l'angolo B E F insieme coll'angolo E F D è uguale a due retti, poichè l'istesso angolo B E F insieme coll'angolo conseguente A E F è uguale (*c*) a due (*f*) 7. III. retti, saranno gli angoli B E F, E F D uguali agli angoli B E F, A E F; e tolto di comune l'angolo B E F rimarà l'angolo E F D uguale all'angolo alterno A E F, e però (*b*) le due rette A B, C D saranno paralle.

IV.

Si potrà dunque *per il dato punto* E *tirare una retta linea parallela alla datta retta* C D. Fig. 37.

Se tirandosi a qualsivoglia punto F la retta E F facciasi (*a*) l'angolo A E F uguale all'angolo alterno E F D; poichè, ponendosi gli angoli alterni A E F, E F D fra loro uguali, le linee rette A B, C D saranno (*b*) parallele. (*a*) 21. III (*b*) 2. di qu.

V.

*Se le rette linee* A B, C D *sieno parallele*; *e tirisi la retta* E F *perpendicolare ad una di quelle* C D, *ella sarà perpendicolare ancora all'altra* A B. Fig. 36.

Si taglino (*c*) d'intorno al punto F le parti, o rette uguali F G, F H, e s'alzino sopra la C D le perpendicolari G I, H K, le quali, per essere le rette A B, C D parallele, saranno uguali fra loro (*d*): poi si tirino le rette G E, H E. Perchè nei triangoli G F E, H F E i lati G F, F E sono uguali a i lati H F, F E, e gli angoli contenuti G F E, H F E sono retti ed uguali, sarà (*e*) la base G E uguale alla base H E, l'angolo F E G uguale all'angolo F E H, e l'angolo retto F G I è uguale all'angolo retto F H K; dunque l'angolo rimanente E G I sarà uguale all'angolo rimanente E H K, e perciò ne' triangoli E G I, E H K, essendo i lati E G, G I uguali ai lati E H, H K, ed uguali anche gli angoli contenuti E G I, E H K, sarà anche l'angolo G E I uguale all'angolo H E K; onde aggiunti questi agli angoli uguali F E G, F E H, saranno gli angoli F E A, F E B uguali, e perciò (*f*) retti; onde la retta E F sarà perpendicolare sopra la retta A B. (*c*) Post. 4. III. (*d*) Def. 2. di qu. (*e*) 12. III. (*f*) Def. 15. III.

VI.

*Se le rette* A B, C D *sieno parallele*, *e cada sopra di quelle la retta* E F, *farà gli* Fig. 38.

*angoli alterni* A E F, E F D *uguali fra loro*.

Tirisi dal punto E la perpendicolare EG sopra la retta C D, e sopra l'istessa retta CD dal punto F si alzi la perpendicolare F H, e saranno (*a*) queste perpendicolari ancora alla retta A B, ed uguali fra loro (*b*): e perchè la retta F G è perpendicolare alle due rette G E, F H, saranno (*c*) queste parallele fra loro; e però le due rette F G, H E, che cadono perpendicolari sopra le parallele G E, F H, saranno fra loro uguali (*b*), e perciò nei triangoli F H E, E G F sarà il lato F H uguale al lato E G, il lato H E uguale al lato G F, ed il lato F E comune; ed in conseguenza (*d*) anche l'angolo H E F sarà uguale all'angolo G F E, ovvero l'angolo A E F uguale all'angolo alterno E F D.

(*a*) *ant.* (*b*) *def.* 2. *di. qu.* (*c*) 5. *di. qu.* (*d*) 13. III.

## III.

Fig. 37. Similmente ancora *se le due rette* A B, C D *sieno parallele, e cada sopra di quelle la retta* L F, *sarà l'angolo esterno* L E B *uguale all'angolo interno ed opposto* L F D: *siccome gli angoli interni, e dalla medesima parte* B E F, E F D *saranno uguali a due retti*.

Poichè, se le rette sono parallele, l'angolo A E F sarà (*e*) uguale all'angolo alterno E F D, ed in conseguenza anche l'angolo esterno L E B, che uguaglia l'angolo opposto A E F (*f*), sarà uguale all'istesso angolo interno ed opposto L E D. Similmente ancora, se le rette A B, C D siano parallele, gli angoli alterni A E F, E F D saranno fra loro uguali; ed aggiunto di comune l'angolo B E F saranno gli angoli A F F, B E F uguali agli angoli E F D, B E F; onde, siccome gli angoli conseguenti A E F, B E F sono uguali a due retti (*g*), così ancora gli angoli interni,

(*e*) *ant.* (*f*) 9. III. (*g*) 7. III.

e dal-

è dalla medesima parte BEF, EFD saranno uguali a' due retti.

## VIII.

*Le linee rette* A B, C D, *che sono parallele ad un' istessa retta* G H, *sono parallele ancora fra loro.* Fig. 39.

Tirisi qualsivoglia retta E F, e perchè le rette A B, G H si pongono parallele, sarà l'angolo A E I uguale all'angolo alterno E I H (*a*); ma, per essere le rete G H, C D parallele, anche l'angolo interno E F D, ovvero I F D è uguale all'istesso angolo esterno E I H (*b*); dunque gli angoli A E I, I F D saranno uguali all'angolo esterno E I H, e perciò uguali fra loro; onde, se gli angoli alterni A E F, E F D sono fra loro uguali; le linee rette A B, C D saranno parallele (*c*).

(*a*) 6. *di. qu.*
(*b*) *ant.*
(*c*) 2. *di. qu.*

## IX.

*Se due linee rette* A B, C D *sieno parallele, ed uguali, anche le rette* A C, B D, *che le congiungono, saranno parallele ed uguali.*

Tirisi la retta B C, che cadendo sopra le parallele A B, C D farà gli angoli alterni A B C, B C D uguali (*d*), ed essendo questi contenuti da i lati A B, B C uguali a i lati D C, C B, sarà (*e*) la base A C uguale alla base B D, e l'angolo A C B uguale all'angolo alterno D B C, e perciò (*f*) le rette A C, B D saranno ancora parallele.

(*d*) 6. *di. qu.*
(*e*) 12. III.
(*f*) 2. *di. qu.*

## X.

*In qualsivoglia parallelogrammo* A B D C, *i lati, e gli angoli opposti sono uguali fra loro.*

Tirisi la retta B C, la quale per essere le rette B D, A C parallele, farà gli angoli alterni D B C, A C B uguali (*g*), siccome ancora, per essere le

(*g*) 6. *di. qu.*

rette A B, C D parallele, gli angoli alterni
(a) 6. di. qu. A B C, D C B saranno uguali (a); onde nei triangoli A B C, D C B sopra la base comune B C,
(b) 11. III. saranno gli angoli A B C, A C B uguali agli angoli D C B, D B C, e perciò (b) il lato A B sarà uguale al lato opposto C D, il lato A C al lato opposto D B, l'angolo B A C all'angolo opposto C D B, e tutto l'angolo A B D a tutto l'angolo opposto D C A.

## X I.

Fig. 41. Si potrà dunque *descrivere un quadrato sopra la data retta* A B.

Se tirandosi dal punto A la perpendicolare alla data retta A B, si tagli (a) da quella la parte A D uguale all'istessa A B, e dal punto D
(a) 4. III. (b) 4. di. qu. tirisi (b) la parallela all'A B, e dal punto B la parallela all'A D. Poichè nel rettangolo A D C B
(c) ant. tutti i lati sarebbero fra loro uguali (c), ed uguali ancora e retti sarebbero i quattro angoli.

## X I I.

Fig. 42. *Se nel triangolo* A B C *prolunghisi il lato* A C *in* D, *sarà l'angolo esteriore* B C D, *uguale agli angoli interiori ed opposti* C A B, A B C *presi insieme*.

Tirisi dal punto C la retta C E parallela al
(d) 4. di. qu. lato opposto A B (d), e perchè sovra le paralle-
(e) 6. di. qu. le A B, C E cade la retta D A, sarà (e) l'angolo esterno D C E uguale all'interno C A B; sic-
(f) 6. di. qu. come, cadendo sopra le stesse parallele A B, C E la retta C B, sarà (f) l'angolo E C B uguale all'angolo alterno A B C; e però tutto l'angolo esteriore B C D sarà uguale agli angoli interiori ed opposti C A B, A B C presi insieme.

## X I I I.

Fig. 42. *Tutti tre gli angoli di un triangolo* A B C *presi insieme sono sempre uguali a due retti*.

Poi-

Poichè, se all'angolo esteriore BCD, e a' due interiori ed opposti CAB, ABC, che gli sono uguali, si aggiunga di comune l'altro angolo interiore di BCA, saranno tutti tre gli angoli interiori presi insieme uguali a i due angoli conseguenti BCD, BCA, vale a dire a due retti (*a*). (*a*) 7. III.

## XIV.

E perchè due retti sono sempre uguali ad altri retti (*a*) *saranno ancora tutti i tre angoli d' un triangolo presi insieme, sempre uguali a tutti i tre angoli di qualsivoglia altro triangolo presi insieme.* (*b*) def. 16.

## XV.

Onde *se in un triangolo sieno due angoli uguali a' due angoli di un altro triangolo, anche l' angolo rimanente di uno sarà uguale all' angolo rimanente dell' altro.*

## XVI.

*L' angolo esteriore di qualsivoglia triangolo*, essendo uguale a i due interiori ed opposti insieme (*b*), *sarà sempre maggiore di qualsivoglia angolo interiore ed opposto.*

## XVII.

Siccome, essendosi dimostrato che tutti tre gli angoli interiori sono uguali a' due retti (*c*) *due angoli interiori di un triangolo presi in qualsivoglia maniera saranno minori di due retti.* (*c*) 17. di. qu.

## XVIII.

*In qualsivoglia quadrilatero* ABDC *i quattro angoli interiori presi insieme sono uguali a' quattro retti.*

Poichè tirandosi la retta BC, e però dividendosi il quadrilatero in due triangoli, saranno gli angoli del triangolo ABC uguali a' due retti, siccome gli angoli ancora del triangolo BDC saranno uguali a' due retti; onde tutti gli sei angoli dei due triangoli, ovvero i quattro angoli del quadrilatero, presi insieme, saranno uguali a' quattro retti.

## XIX.

Fig. 43. *In qualsivoglia figura* ABCDEF *il numero degli angoli retti, ai quali equivagliono tutti gli angoli interiori della figura medesima, è doppio del numero dei lati della figura, toltine quattro angoli retti.*

Pigliasi dentro la figura un punto I, dal quale si tirino agli angoli, o punte della figura le rette IA, IB, IC, ID, IE, IF, e sarà divisa la figura in tanti triangoli quanti sono i lati della figura medesima; ma i tre angoli di ciascun triangolo sono uguali a' due tetti (*a*); dunque il numero degli angoli retti, a' quali equivagliono tutti gli angoli insieme di questi triangoli, è doppio del numero dei triangoli stessi, ovvero dei lati della figura; e perchè gli angoli dei triangoli, che sono intorno al punto I, sono uguali a' quattro retti (*b*), sarà il numero degli angoli retti, ai quali equivagliono tutti insieme gli angoli rimanenti dei triangoli, cioè tutti gli angoli della figura doppio del numero dei triangoli, ovvero dei lati della figura, toltine quattro angoli retti.

(*a*) 13. *di. qu.*

(*b*) 8. III.

## XX.

*Prolungandosi tutti i lati della figura medesima, tutti gli angoli esteriori, che ne risultano, sono uguali a' quattro retti.*

Poichè qualsivoglia angolo esteriore con l'angolo interiore, che gli è accanto, è uguale a' due an-

angoli retti (*a*), ſarà il numero degli angoli retti, ai quali equivagliono tutti gli angoli interiori ed eſteriori inſieme della figura, doppio del numero degli angoli interiori, ovvero de i lati della figura; ma il numero degli angoli retti, ai qual equivagliono tutti gli angoli interiori ſoli, è doppio (*b*) del numero degli ſteſſi lati, toltine quattro retti; dunque tutti gli angoli eſteriori ſaranno uguali a queſti retti.

(*a*) 7. III.

(*b*) antec.

# LIBRO V.

*Delle linee rette, che s' incontrano con la circonferenza del circolo, o fra loro dentro del circolo, e degli Angoli che da quelle ſono formati.*

SIccome è nobile e maravigliosa fra tutte l'altre figure la natura del circolo, così mirabili ancora e ſingolari ſono le proprietà, che competono a quelle rette, che s' incontrano con la circonferenza del circolo iſteſſo, ovvero ſi congiungono inſieme, e formano gli angoli dentro del circolo. Saranno dunque le più ragguardevoli ed utili di queſte proprietà brevemente ſpiegate nel quinto Libro, che ſegue; dovendoſi poi trattare nell' ottavo della figura, eſtenſione, o miſura del circolo iſteſſo, e delle figure rettilinee, che dentro, o d'intorno a lui ſi deſcrivono.

## DEFINIZIONI.

I.

LA linea retta, che paſſando per il centro del circolo arriva dall' una e dall' altra parte la circonferenza, diceſi *diametro*; e la metà del circolo che è contenuta dal diametro, e mezza circonferenza, diceſi *ſemicircolo*.

II.

Che ſe la retta, che taglia la circonferenza, non paſſi per il centro, e però divida il circolo in parti diſuguali, diceſi *corda*; e le porzioni di-

ſu-

ſuguali del circolo da lei diviſo, diconſi *porzioni*, o *ſeguenti*.

III.

I circoli, che ſi deſcrivono con raggi uguali, ſono uguali fra loro, e ſoprapponendo i loro centri, anche le loro circonferenze ſi adattano perfettamente.

IV.

*Circoli concentrici* diconſi quelli, che ſono deſcritti intorno al medeſimo centro, ovvero che ſono compreſi da circonferenze deſcritte da vari punti dell'iſteſſa retta, che rivolgeſi intorno ad un ſuo punto immobile, come centro; come per eſempio rivolgendoſi la retta OD intorno al punto O, il punto D deſcrive la circonferenza del circolo FGDH, ed il punto I deſcrive la circonferenza del circolo ABIC. Fig. 47.

V.

Donde ne ſegue, che nei circoli concentrici i loro raggi OD, OH, OI, OC tagliano parti ſimili della loro circonferenze, o archi ſimili; ſicchè l'arco DH ſia alla ſua circonferenza FG DH come l'arco IC è alla ſua circonferenza ABIC. Imperocchè movendoſi con moto equabile ed uniforme la retta OD, ovvero i ſuoi due punti D, I, nel deſcrivere le loro circonferenze, qual parte ſarà l'arco deſcritto DH dell'intera ſua circonferenza FGDH, tal ſarà l'arco deſcritto IC dell'intera ſua circonferenza ABIC.

VI.

E però, ſe nella circonferenza eſteriore gli archi DH, DG ſieno fra loro uguali, anche nella circonferenza interiore gli archi corriſpondenti IC, IB ſaranno uguali fra loro.

VII.

L'angolo ſi dice *inſiſtere*, o *poſare* ſopra di un' arco, o circonferenza quando le rette, che formano l'angolo iſteſſo, taglino l'arco, ovvero

la

Fig. 46. la circonferenza: come l'angolo A E F, che termina al centro, ovvero l'angolo A D F, che termina alla circonferenza, insistono, o posano sopra l'arco A F.

VIII.

L'angolo si dice *inscritto nel semicircolo*, ovvero *nel segmento* del circolo, quando l'estremità delle rette, che formano l'angolo, coincidono con estremità della mezza circonferenza, o di quell'arco; e la cima dell' angolo tocca in un punto quell'arco istesso: come l'angolo A D B è inscritto nel semicircolo; e l'angolo A D F è inscritto nel segmento, o porzione A D B F.

IX.

Il triangolo ancora, il quadrilatero, e qualsivoglia altra figura si dice essere *inscritta nel circolo*, quando con tutti i suoi angoli tocca la circonferenza, o coincide con qualche punto di quella.

X.

Ed allora dicesi *circoscritta*, ovvero *descritta intorno al circolo*, quando con tutti i suoi lati contiene, e tocca la circonferenza del circolo, o coincide con qualche punto di quella.

XI.

La linea retta dicesi *tangente* del circolo, quando ella tocchi la circonferenza in un punto, e prolungata dall' una e l' altra parte non lo seghi, ma tutta cada fuori della circonferenza.

XII.

Che s'ella entrasse dentro del circolo, e segasse la circonferenza, si chiamarebbe *seccante*.

PRO-

# PROPOSIZIONI.

## I.

*SE la retta* A B *passi per il centro del cir-* Fig. 44.
*colo* C, *e divida in mezzo nel punto* F *la retta, o corda* D E, *sarà perpendicolare sopra di quella, o la dividerà ancora ad angoli retti: e se ella sia perpendicolare sopra di quella, la dividerà in mezzo nel punto* F.

Tirinsi i raggi CD, CE, e perchè nei triangoli CDF, CEF i raggi, o lati CD, CE sono uguali, siccome per ipotesi ancora i lati DF, EF sono fra loro uguali, ed il lato C F è comune, gli angoli ancora C F D, CFE saranno uguali, (*a*) e però retti, onde la retta AB sarà perpendicolare sopra la corda DE. Che se la retta A B sia perpendicolare sopra la corda D E, essendo nel triangolo DCE i lati, o raggi CD, CE fra loro uguali, saranno gli angoli CDF, C E F (*b*) fra loro uguali; ma per ipotesi uguali ancora sono gli angoli retti CFD, CFE; dunque anche gli angoli rimanenti DCF, E C F saranno (*c*) uguali fra loro: ed essendo questi contenuti dai lati DC, CF uguali ai lati EC, CF, sarà anche la base DF uguale alla base EF (*d*), e però la retta, o corda D E sarà divisa in mezzo nel punto F.

(*a*) 13. III.
(*b*) 16. III.
(*c*) 16. IV.
(*d*) 12 III.

## II.

Poichè dal punto F, nel quale dividesi in mezzo la retta, o corda DE, non può alzarsi veruna altra perpendicolare, che sia diversa della retta F A, che passa per il centro C (*e*), manifestamente appariſce, che *dividendosi in mezzo qualsivoglia corda* DE,

(*e*) 4. III.

D E, *ed alzandosi sopra di quella la perpendicolare* F A, *il centro del circolo dovrà sempre essere dentro la perpendicolare* F A.

III.

Si potrà dunque *trovare il centro del dato circolo* D A E.

Se tirandosi, e dividendosi in mezzo qualsivoglia corda DE nel punto F, si tiri da quello la perpendicolare FA, che prolungatasi in B dividasi in mezzo nel punto C. Poichè dovendo essere (*a*) il centro del dato circolo nella perpendicolare BA, sarà questo il punto C, nel quale divideſi in mezzo l'istessa perpendicolare, o diametro A B.

(*a*) *Ant.*

IV.

*Se da un punto* C *preso dentro del circolo* A B *cadano alla circonferenza tre linee rette uguali fra loro* C G, C D, C E, *sarà il punto* C *centro del circolo.*

Si tirino le rette, o corde GD, DE, e dividendole in mezzo nei punti I, F si titino per il punto C le rette IH, FA. Perchè nei triangoli DCF, ECF sono per ipotesi le rette DC, EC uguali, ed uguali ancora si sono fatte le rette DF, EF, e la retta CF è comune saranno (*b*) gli angoli DFC, EFC uguali e retti; onde la retta FA sarà perpendicolare sopra la corda DE, ed il centro del circolo sarà dentro della perpendicolare FA (*c*). Similmente ancora dimostrassi, che gli angoli GIC, DIC sono uguali e retti, ed in conseguenza (*d*) il centro del circolo sarà dentro della perpendicolare I H: dovrà dunque essere il centro nel punto C, nel quale solo s'incontrano le due perpendicolari F A, I H, e dal quale cadono le tre rette uguali CG, CD, CE.

(*b*) 13. III.

(*c*) 2. *dis qu.*

De-

V.

*Descrivere un circolo, che passi per tre punti dati* G, D, E, *che non sieno posti per diritto fra loro, cioè per i quali non si possa tirare una linea retta.*

Tirinsi le rette GD, DE, e dividendole in mezzo nei punti I, F, si alzino le perpendicolari IH, FA, ed il punto C, nel quale si segano, sarà il centro del circolo, che passerà per i tre punti dati G, D, E. Imperciocchè, essendo nei triangoli DFC, EFC, due lati DF, FC uguali ai due lati EF, FC, e gli angoli contenuti DFC, EFC retti ed uguali, saranno ancora (*a*) i lati DC, EC uguali fra loro: e perchè similmente si proveranno nei triangoli GIC, DIC uguali fra loro i lati GC, DC, facendo centro in C il circolo, che si descriva col raggio CG, dovrà passare ancora per gli altri punti D, E (*b*).

(*a*) 12. III.

(*b*) Def. 22. III

V I.

*Dato qualsivoglia arco* GBE *si potrà descrivere, o compire l'intera sua circonferenza.*

Se pigliando nell'arco dato qualsivoglia punto D trovisi, come sopra, il centro, e raggio del circolo, che passi per i tre punti G, D, E, e farà questo il centro, e raggio ancora del circolo, del quale è parte l'arco GBE.

V I I.

*Se sopra l'istesso arco, o parte di circonferenza* AB *insista l'angolo* AIB, *che termina al centro* I, *ed insieme l'angolo* ACB, *ovvero* ADB, *ovvero* AEB, *che termina alla circonferenza, sarà l'angolo al centro sempre doppio di quello, che termina alla circonferenza.* Fig. 48.

Coincidano nel primo caso i lati AI, AG, e per essere uguali i raggi, o lati IC, IB, gli angoli

(a) 16. III. goli ICB, IBC saranno uguali fra loro (a), e però l'angolo esteriore AIB, che è uguale a tut-
(b) 12. IV. ti due presi insieme (b), sarà doppio del solo angolo opposto ACB.

Nel secondo caso, nel quale i lati AD, DB comprendono i lati AI, IB, tirisi di diametro
(c) 1. par. di qu. DIG, e sarà (c) l'angolo AIG doppio dell'angolo ADG, e l'angolo GIB doppio dell'angolo GDB; ed in conseguenza tutto l'angolo AIB doppio di tutto l'angolo ADB.

Nel terzo caso, in cui i lati BE, AI si segano, tirisi il diametro EIF, e sarà (d) l'angolo AIF doppio dell'angolo AEF, e l'angolo BIF doppio dell'angolo BEF; onde anche l'angolo rimanente AIB sarà doppio dell'angolo rimanente AEB.

## VIII.

*Gli angoli* ACB, ADB, AEB, *che insistono sopra il medesimo arco* AGB, *e vanno a terminare a qualsivoglia punto della circonferenza* C, D, E; *sono sempre uguali fra loro.*

(d) Ant. Poichè essendo (d) ciascuno di quelli la metà dell'angolo AIB, che posa sopra l'istesso arco;
(e) Assi. 7. e termina al centro, tutti saranno fra loro uguali (e).

## IX.

Fig. 46. *L'angolo* ADB, *che s'inscrive nel semicircolo, è sempre retto; ed intorno a qualsivoglia angolo retto* ADB *si potrà sempre descrivere un semicircolo* ADB.

Tirisi il diametro DEF, e sarà l'angolo AEF doppio dell'angolo ADF, e l'angolo FEB dop-
(f) 9. di qu. pio dell'angolo FDB (f), onde essendo gli an-
(g) 9. III. goli AEF, FEB uguali a due retti, (g) gli angoli ADF, FDB, cioè l'angolo intero ADB,
(h) 13. IV. sarà la metà di due retti, ovvero un angolo retto. Che se l'angolo ADB sia retto, e perciò (h)

ugua-

uguale ai due angoli DAB, DBA, pongasi (a) l'angolo ADE uguale all'angolo DAE, e sarà anche l'angolo BDE uguale all'angolo DBE, e però le rette AE, BE saranno uguali all'istessa retta ED (b), ed in conseguenza ancora fra loro; onde il semicircolo, che si descriva col centro E, e col raggio EA, passerà per i punti D, B, o sarà descritto intorno all'angolo retto ADB. (a) 21. III. (b) 16. III.

## X.

Donde chiaramente apparisce, che *qualsivoglia angolo* CED *inscritto in un segmento maggiore del semicircolo è sempre acuto; e qualsivoglia angolo* CFD *inscritto in un segmento minore del semicircolo è sempre ottuso.* Fig. 49.

Poichè tirato il diametro CG, e congiunte le EG, FG, sicchè gli angoli CEG, CFG inscritti nel semicircolo sieno retti, l'angolo CED sarà minore dell'angolo retto CEG, e perciò sarà acuto; e l'angolo CFD sarà maggiore dell'angolo retto CFG, e però sarà ottuso.

## XI.

*Se nell'istesso circolo, ovvero in due circoli uguali, sieno gli angoli al centro* DCE, MON *uguali fra loro, anche gli archi* DBE, MLN *su' quali insistono, saranno uguali: e se gli archi, su' quali insistono, sieno fra loro uguali, saranno uguali anche gli angoli.* Fig. 44. 45.

Sovrapponga si il centro C al centro O, e per essere i circoli uguali, saranno uguali anche i raggi (c), e però caderà il raggio CD sopra il raggio OM; siccome, per essere l'angolo DCE uguale all'angolo MON, anche il raggio CE caderà sopra il raggio ON (d), e però tutto l'arco DBE caderà sopra l'altro arco MLN, onde gli archi saranno uguali. Similmente ancora, se gli archi sieno uguali, sovrapponendosi il centro C al centro O, e l'arco DBE all'arco uguaMLN, (c) Def. 3. di qu. (d) Def. 12. III.

MLN, caderanno i punti D, E sopra i punti M, N; ed in conseguenza anche i lati DC, CE sopra i lati MO, ON, e però l'angolo DCE sarà uguale all'angolo MON.

## XII.

Similmente ancora, *se nell' istesso circolo, ovvero in due circoli uguali, sieno le corde* DE, MN *fra loro uguali, taglieranno archi uguali* DBE, MLN; *e se gli archi tagliati sieno uguali, anche le corde saranno uguali.*

Imperocchè, se le corde DE, MN sono uguali, essendo uguali anche i lati, o raggi DC, CE, ai lati, o raggi MO, ON, uguali ancora saranno gli angoli DCE, MON (*a*), e però gli archi DBE, MLN, sovra dei quali insistono, saranno uguali (*b*). Similmente ancora, se gli angoli DCE, MON, (*b*) e per essere questi angoli uguali contenuti dai lati, o raggi DC, CE, uguali a i lati, o raggi MO, ON, (*c*) saranno nei triangoli DCE, MON anche le basi, o corde DE, MN uguali fra loro.

(*a*) 13. III.
(*b*) *Ant.*
(*c*) 12.

## XIII.

Fig. 45. Si potrà dunque *dividere in mezzo l' arco dato* MLN.

Se, trovato il centro O, e tirati i raggi MO, NO, dividasi in mezzo l'angolo MON col raggio OL; poichè facendosi l'angolo MOL uguale all' angolo LON, anche l' arco ML sarà uguale all'arco LN (*d*).

(*d*) 13. *di qu.*

## XIV.

*Tutto quello, che si è trovato finora degli angoli, che terminano al centro, paragonandosi con gli archi, o corde, sopra le quali insistono,*

*no,*

*no, intendesi ancora degli angoli, che terminano alla circonferenza.*

Imperocchè gli angoli, che terminano alla circonferenza, sono (*a*) metà di quelli, che terminano al centro, ed in conseguenza hanno fra loro l'istessa proporzione dei loro doppj, vale a dire degli angoli, che terminano al centro. (*a*) 9. *dif. qu.*

## XV.

*Se nell' estremità del semidiametro, o raggio del circolo* AB *si alzi la perpendicolare* BC, *questa sarà tangente dell' istesso circolo nel punto* B, *cioè prolungata caderà tutta fuori del circolo.* Fig. 46.

Cada, se egli è possibile, dentro del circolo, e seghi la circonferenza nel punto D, ed a quello tirisi il raggio ED. Perchè dunque i lati, o raggi EB, ED sono uguali, saranno anche uguali gli angoli EBD, EDB (*b*); onde, siccome l'angolo EBD, ponesi retto, anche l'angolo EDB sarebbe retto, e però nel triangolo BED i due angoli EBD, EDB sarebbero uguali a' due retti, il che è impossibile (*c*). (*b*) 16. *III.* (*c*) 17. *IV.*

## XVI.

*Se dal punto* B, *nel quale la retta* CB *tocchi il circolo, si tiri il raggio* BE, *sarà questa perpendicolare alla tangente* BC: *e se la retta* BE *sia tirata perpendicolare sopra la tangente* BC, *questa passerà per il centro, o sarà raggio del circolo.*

Imperciocchè, dovendo essere la tangente del circolo perpendicolare al raggio, (*d*) dovrà essere scambievolmente anche il raggio perpendicolare alla tangente; e però se l'EB è raggio, sarà perpendicolare la tangente BC; e se gli sia perpendicolare, sarà raggio. (*d*) *Ant.*

XVII.

Fig.47. *Dal dato punto* D *tirare la tangente al dato circolo* ABC.

Tirisi al centro del dato circolo O la retta O D, sopra la quale, come diametro, descrivasi un semicircolo, che seghi il circolo dato nel punto E, al quale tirisi la retta DE, che sarà tangente, poichè forma col raggio DE l'angolo OED che sarà retto per essere inscritto nel semicircolo OED (*a*).

(*a*) 11. *di. qu.*

XVIII.

Fig.49. *Se la retta* AB *tocchi il circolo nel punto* C, *e da quello si tiri la secante, o corda* CD, *l'angolo* BCD *fatto dalla tangente con la secante sarà sempre uguale a qualsivoglia angolo* CED, *che si descrive nel segmento opposto* CED; *siccome l'angolo* ACD *sarà uguale a qualsivoglia angolo* CFD, *che si descrive nel segmento opposto* CFD.

Tirisi dal punto C il diametro CG, il quale sarà perpendicolare sopra la tangente AB (*b*), e congiungasi EG, FG, e perchè l'angolo CEG inscritto nel semicircolo è retto (*c*), e perciò uguale all'angolo retto BCG; ed ancora l'angolo GED è uguale all'angolo GCD, che insiste sopra l'istesso arco GD (*d*), sarà anche l'angolo rimanente CED, uguale all'angolo rimanente BCD.

(*b*) 18. *di. qu.* (*c*) 11. *di. qu.* (*d*) 10. *di. qu.*

Similmente ancora, perchè l'angolo CFG inscritto nel semicircolo è retto, e perciò uguale all'angolo retto ACG, e l'angolo ancora DFG, è uguale all'angolo DCG, che insiste sopra l'istesso arco GD, ancora l'angolo intero ACD sarà uguale all'angolo intero CFD.

XIX.

Siccome dunque gli angoli conseguenti

BCD,

BCD, AGD sono uguali a' due retti (*a*) così ancora *gli angoli opposti* CED, CFD *saranno uguali a' due retti*. E perchè i quattro angoli dei quadrilateri sono uguali a quattro retti (*b*), anche i due angoli opposti ECF, EDF saranno uguali a' due retti; onde *nei quadrilateri inscritti nel circolo gli angoli opposti saranno sempre uguali a' due retti*. (*a*) 7. III. (*b*) 18. IV.

## XX.

*Togliere dal dato circolo* EDF *una porzione, o segmento, che contenga un angolo uguale all' angolo dato* MON. Fig. 49. 51.

Tirisi a qualsivoglia punto del circolo C la tangente AB, e facciasi l'angolo ACE uguale all' angolo dato MON. Perchè qualsivoglia angolo CDE, che si descriva nel segmento CDE, è (*c*) sempre uguale all'angolo ACE, la porzione tagliata del circolo conterrà l'angolo CDE sempre uguale all'angolo ACE, ovvero all'angolo dato MON. (*c*) 20. di. qu.

## XXI.

*Nel dato circolo inscrivere un triangolo equiangolo al triangolo dato* MON. Fig. 50. 51.

Tirandosi a qualsivoglia punto C la tangente AB facciasi (*d*) l'angolo ACE uguale all'angolo OMN, l'angolo BCD uguale all' angolo ONM, e congiungasi ED. Sarà dunque l'angolo CDE uguale all'angolo ACE, ovvero all' angolo OMN (*e*); l'angolo CED all'angolo BCD, ovvero all' angolo ONM: e però (*f*) anche l'angolo rimanente ECD sarà uguale all' angolo rimanente MON, onde il triangolo CED inscritto nel circolo sarà equiangolo al triangolo MON. (*d*) 23. III. (*e*) 20. di. qu. (*f*) 5. IV.

## XXII.

*Descrivere intorno al dato circolo un triangolo equiangolo al triangolo dato* MON.

Fig. 50. 51. Prolungandosi il lato MN in P, Q, tirinsi dal centro del dato circolo i raggi HC, HE, HD, che facciano l'angolo CHE uguale all'angolo PMO; e l'angolo CHD all'angolo QNO, e per i tre punti C, E, D si tirino le perpendicolari ai raggi HC, HE, HD, le quali saranno (a) 18. *di. qu.* (a) perciò tangenti del circolo nei punti C, E, D; e sarà il triangolo AFB equiangolo al triangolo dato MON. Imperocchè, essendo nel quadrilatero AEHC i quattro angoli uguali a' (b) 18. *IV.* quattro retti (b), ed essendo retti i due angoli ACH, AEH, i due rimanenti CHE, CAE saranno uguali a' due retti; ma uguali ancora a' due retti sono i due angoli conseguenti PMO, OMN, dei quali l'angolo PMO si è posto uguale all'angolo CHE, dunque il rimanente OMN sarà uguale al rimanente CAE, o BAF. Nella stessa maniera si proverà, che l'angolo ONM è uguale all'angolo CBD, o ABF, ed in conseguenza anche l'angolo rimanente MON all'angolo rimanente AFB; dunque il triangolo AFB circoscritto al circolo sarà equiangolo al triangolo dato MON.

## XXIII.

*Descrivere un circolo intorno al dato triangolo* CDE.

Fig. 50. Se dividendo in mezzo due lati CE, ED nei punti K, I si alzino le perpendicolari, che con(c) 5. *di. qu.* corrano insieme nel punto H. Poichè, come (c) sopra, si proveranno le tre rette HC, HE, HD, uguali fra loro; onde descrivendosi col centro H, e qualsivoglia di quelle tre rette come raggio il circolo, passerà questo per tutti i punti, ed angoli C, E, D.

XXIV.

XXIV.

*Inſcrivere un circolo nel dato triangolo* AFB.

Se dividendoſi in mezzo due angoli BAF, AFB con le rette AD, FC, dal punto H, nel quale queſte concorrono, ſi tirino ai lati del triangolo dato le perpendicolari HC, HE, HD. Poichè eſſendo nei triangoli HCA, HEA ſopra la baſe uguale, o comune HA gli angoli retti HCA, HEA fra loro uguali ſiccome uguali ancora ſi pongono gli angoli CAH, EAH ſaranno uguali anche i lati, o perpendicolari HC, HE (*a*); e perchè nell'iſteſſo modo ſi proveranno ne' triangoli HEF, HDF fra loro uguali le perpendicolari HE, HD, ſaranno le tre rette HC, HE, HD fra loro uguali; e però deſcrivendo il circolo col centro H, e col raggio HE, toccherà queſto tutti i lati ne' punti C, E, D, o ſarà deſcritto nel triangolo dato. (*a*) II. III.

# LIBRO VI.

*Delle superficie, ovvero delle figure rettilinee, e delle loro proporzioni, e misure.*

IL secondo genere di grandezza, o quantità continua, contiene la superficie, nella quale ritrovasi lunghezza insieme, e larghezza; e perchè la superficie medesima non si considera quì come infinita, ma bensì come compresa, e ristretta da linee quasi da termini, vale a dire come ridotta in figure, si dovrà quì ragionare delle varie figure paragonandole insieme, e dimostrando la loro proporzione, e misura. Ed affinchè l'ordine, e serie delle cose sia naturale, e chiaro quanto essere egli potrà, nel Sesto Libro si parlerà delle figure rettilinee in generale, paragonando insieme quelle ancora, che abbiano il numero de' loro lati, ed angoli disuguale; per poi riconoscere nel Settimo Libro le proprietà di quelle figure, che per avere ugual numero di lati; ed uguaglianza degli angoli, si chiamano *simili*; e finalmente nell'Ottavo le figure, o poligoni *regolari*, che hanno tutti gli angoli, e lati uguali fra loro.

## DEFINIZIONI.

### I.

Fig. 53. L'altezza dei parallelogrammi, o triangoli è la perpendicolare, che si tira dalla loro cima, o angolo superiore sopra la base: come l'altezza del parallelogrammo ABCD, o del triangolo ACD è la perpendicolare CF, ovvero BE.

On-

II.

Onde i parallelogrammi ABCD, EBCF, ovvero i triangoli ACD, EBA, che sono contenuti dalle medesime parallele ED, BC, hanno l'altezze uguali, per essere sempre uguali le perpendicolari CF, BE.

III.

E se il parallelogrammo EBCF, ovvero il triangolo FCD, sia rettangolo, le loro altezze saranno gli stessi lati BE, CF.

IV.

Quindi apparisce, che nei parallelogrammi, o triangoli, che abbiano l'istessa altezza, o siano fra le medesime parallele, si potrà tirare egual numero di linee rette parallele alla loro base. Poichè tirandosi per qualsivoglia punto R della perpendicolare BE una retta RU parallela alla base EF, questa sarà parallela ancora alla base AD, ed il numero di queste rette è misurato, o determinato dall'una, o dall'altra delle perpendicolari BE, CF, che sono fra loro uguali.

## PROPOSIZIONI.

I.

*Se nei triangoli* ACB, GIH *sia la base, o lato* AB *uguale alla base, o lato* GH, *e due angoli* CAB, CBA *uguali agli due angoli* IGH, IHG, *sarà il triangolo* ACB *uguale al triangolo* GIH. Fig. 28. 29. Tav. II.

II.

*Se nei triangoli* ACB, GIH *sieno i due lati* AC, AB *uguali ai due lati* GI, GH, *e l'angolo contenuto* CAB *uguale all'angolo contenuto* IGH, *saranno i triangoli fra loro uguali.*

III.

*Se nei triangoli* ACB, GIH *sieno tutti i*

*tre lati* AC, CB, BA *uguali a' tre lati* GI, IH, HG, *anche i triangoli ſaranno uguali.*

La prova di queſte tre propoſizioni ſi può facilmente inferire da quello, che ſi è dimoſtrato nel III. Libro alla prop. 11. 12. 13. Poichè eſſendoſi ivi già dimoſtrato, che in qualſivoglia di queſti tre caſi ſovrapponendo un lato AB al lato uguale GH, tutti gli altri lati devono cadere ſopra degli altri lati; ſiccome allora ſe ne inferì l'ugualità de' lati e degli angoli, così facilmente potrà inferirſene ancora l'ugualità de' triangoli iſteſſi quanto alla ſuperficie, o figura.

IV.

Fig. 53. *Qualſivoglia parallelogrammo* ABCD *ſempre è diviſo nel mezzo dal diametro* AC.

Poichè nei triangoli ABC, CDA ſono i due lati AB, BC uguali ai due lati oppoſti CD, DA (*a*), ed il terzo lato AC è comune, ſarà il triangolo ABC uguale al triangolo CDA (*b*), e perciò il parallelogrammo ſarà diviſo in mezzo dal diametro AC.

(*a*) 10. IV.

(*b*) ant.

V.

Fig. 55. *Se nel parallelogrammo* IBHF *per qualſivoglia punto* D *preſo nel diametro* IH *ſi tirino le rette* AE, GC *parallele ai lati* BH, FH, *ſaranno i parallelogrammi* ABCD, DEFG, *che ſono ſegati dal diametro, e ſi chiamano* complementi, *o* ſupplementi, *uguali fra loro.*

Imperciocchè, ſe dai triangoli IBH, HFI, che ſono fra loro uguali (*a*), ſi tolga il triangolo IAD uguale al triangolo DGI, ed il triangolo DCH uguale al triangolo HED (*c*), ſarà il parallelogrammo, che reſta, ABCD uguale al parallelogrammo, che reſta, DEFG.

(*c*) ant.

VI.

Fig. 53. *Se dato qualſivoglia parallelogrammo* ABCD *ſi tirino le perpendicolari* BE, CF, *e però ſi for-*

*formi il rettangolo* BEFC, *questo sarà sempre uguale al parallelogrammo* BADC, *che abbia l'istessa base* BC.

Imperocchè tirandosi da qualsivoglia punto R della perpendicolare BE la retta RU parallela a BC, saranno sempre (*a*) la retta RT nel rettangolo, e la corrispondente retta SU nel parallelogrammo uguali all'istessa retta; o lato opposto BC, e perciò uguali fra loro; onde raccogliendo tutte le rette linee nel rettangolo, cioè il rettangolo istesso, saranno sempre uguali a tutte insieme le rette linee nel parallelogrammo, cioè all'istesso parallelogrammo. (*a*) 10. IV.

*Ovvero* per essere le rette EF, AD uguali all'istessa retta, o lato opposto BC, e perciò uguali fra loro, tolta la parte comune AF, sarà la retta EA uguale alla retta FD; onde, essendo anche i lati EB, BA uguali ai lati opposti FC, CD (*a*), sarà il triangolo EBA uguale al triangolo FCD, ed aggiunto il trapezio comune ABCF, il rettangolo EBCF sarà eguale al parallelogrammo ABCD.

VII.

*I parallelogrammi* ABCD, EFGH, *che* Fig. 52. *hanno l'istessa altezza, o sono fra le medesime parallele, sono fra loro come le basi.*

Per qualsivoglia punto I del lato AB tirisi la retta IM parallela alla base AH, e sarà sempre nel parallelogrammo ABCD la retta IK uguale alla base, o lato opposto AD; e nel parallelogrammo EFGH la retta LM uguale alla base, o lato opposto EH (*b*), onde sarà sempre la retta IK alla corrispondente LM come AD ad EH, e però raccogliendo tutte insieme le rette, che compongono il parallelogrammo ABCD, saranno a tutte insieme le rette, che formano il parallelogrammo EFGH, cioè l'istesso parallelogrammo ABCD all'istesso parallelogrammo EFGH, come la base AD alla base EH. (*b*) 10. IV.

VIII.

VIII.

Anche *i triangoli* ACD, EGH, *che hanno l'istessa altezza, ovvero sono nelle medesime parallele* AH, BG, *sono fra loro come le basi* AD, EH.

Si tirino dai punti A, E le rette AB, EF parallele ai lati DC, HG, e saranno fra loro (*a*) *ant.* (*a*) i parallelogrammi ABCD, EFGH come (*b*) 13. *del I.* le basi AD, EH; dunque (*b*) anche i triangoli ACD, EGH, che sono la metà degl'istessi (*c*) 4. *di qu.* parallelogrammi (*c*), saranno fra loro come l'istesse basi AD, EH.

IX.

Che *se i parallelogrammi* ABCD, GHIK Fig. 53. 45. *abbiano bensì le basi uguali* AD, GK, *ma l'altezze loro, ovvero le perpendicolari* BE, HL *sieno disuguali, saranno i parallelogrammi fra loro come l'istesse altezze, o perpendicolari* BE, HL.

Si tirino le perpendicolari CF, IM, e compiti i rettangoli EBCF, LHIM, concepiscasi il lato, o perpendicolare BE, come base del rettangolo ABCF, ed il lato, o perpendicolare HL come base del rettangolo LHIM; e perchè nei rettangoli le altezze, o perpendicolari BC, HI si pongono fra loro uguali, sarà il rettangolo EBCF al rettangolo LHIM come la base BE alla base HL; ma il rettangolo EBCF è ugua- (*d*) *di qu.* le al parallelogrammo ABCD (*a*), ed il rettangolo LHIM è uguale al parallelogrammo GHIK, dunque i parallelogrammi ABCD, GHIK sono fra loro come le perpendicolari BE, HL.

X.

Anche *i triangoli* ACD, GIK, *che abbiano uguali basi* AD, GK, *e disuguali altezze*

*tezze* CF, IM, *saranno fra loro come loro altezze medesime, o perpendicolari*, CF, IM.

Poichè compiti i parallelogrammi ABCD, CHIK, saranno questi fra loro come l'altezze, o perpendicolari CF, IH (*a*); dunque anche i triangoli, che sono la metà degl'istessi parallelogrammi, saranno fra loro come le loro altezze CF, IM. (*a*) *ant.*

X I.

Se dunque *i parallelogrammi, o triangoli abbiano l'istessa base, o basi uguali, ed abbiano l'istessa base, o basi uguali, ed abbiano ancora l'istessa altezza, o sieno contenuti dall'istesse parallele, saranno uguali fra loro.*

Poichè, essendo fra loro i parallelogrammi, o triangoli, che abbiano uguale altezza, come le basi, se queste si suppongono uguali, i triangoli ancora, o parallelogrammi saranno uguali.

X I I.

E se *i parallelogrammi, o triangoli sieno fra loro uguali, ed abbiano uguali basi, avranno ancora l'istessa altezza, o saranno nelle medesime parallele.* Siccome, *se sieno fra loro uguali, ed abbiano l'istessa altezza, o sieno fra le medesime parallele, avranno ancora ugual base.*

Poichè, se nel primo caso l'altezze, o nel secondo le basi fossero disuguali, anche i parallelogrammi, o triangoli sarebbero (*b*) disuguali. (*b*) 9. e 10. *di qu.*

X I I I.

Che *se si paragonino insieme i parallelogrammi* ABCD, GHNO, *che abbiano basi, ed altezze disuguali, saranno fra loro in ragione composta delle loro basi* AD, GO, *ed altezze* BE, HL.

Pon-

Pongasi il parallelogrammo GHIK, che abbia la base GK uguale alla base AD del parallelogrammo ABCD, e sarà (*a*) il parallelogrammo ABCD al parallelogrammo GHNO in ragione composta del parallelogrammo ABCD al parallelogrammo GHIK, cioè (*b*) dell'altezza BE all'altezza HL, e dell'istesso parallelogrammo GHIK al parallelogrammo GHNO, cioè (*c*) della base GK, ovvero AD, alla base GO.

(*a*) 2. II.
(*b*) 9. di. qu.
(*c*) 7. di. qu.

XIV.

Ancora *i triangoli* ACD, GNO, *che abbiano le basi ed altezze loro disuguali, saranno fra loro in ragione composta delle basi* AD, GO, *e dall' altezze* BE, HL, *ovvero* CF, NP.

Poichè i triangoli sono fra loro nell'istessa ragione dei loro doppj, cioè dei parallelogrammi ABCD, GHNO, la quale (*d*) è composta delle ragioni delle loro basi ed altezze.

(*d*) ant.

XV.

*Se* dunque *nei parallelogrammi, o triangoli sieno le basi* AD, GO *reciproche all' altezze* BE, HL, *i parallelogrammi, o triangoli saranno uguali; e se i parallelogrammi, o triangoli sieno uguali, avranno le loro basi reciproche all' altezze.*

Poichè, essendo i parallelogrammi, o triangoli in ragion composta delle loro basi ed altezze (*e*), se le ragioni componenti sieno reciproche, la ragione da loro composta sarà ragione d'ugualità (*f*); e se la ragione da loro composta sia ragione d'ugualità, le ragioni componenti delle loro basi ed altezze saranno reciproche (*g*).

(*e*) ant.
(*f*) 5. II.
(*g*) 6. II.

XVI.

Fig. 55. *I parallelogrammi* ABCD, GDEF, *siccome ancora i triangoli* ADC, GDE, *che abbiano*

*abbiano l' angolo* ADC *uguale all' angolo opposto* GDE, *ed in conseguenza i lati posti per diritto, sono in ragion composta delle ragioni dei lati, cioè della ragione di* AD *a* DE, *e della ragione di* GD *a* DC.

Prolungandosi i lati BC, FE, sicchè concorrano in H, sarà (*a*) nei tre parallelogrammi ABCD, DCHE, GDEF la ragione del primo al terzo composta delle ragioni del primo al secondo, e del secondo, e al terzo; ma la ragione del primo al secondo è la stessa, che la ragione del lato AD a DE e la ragione del secondo al terzo è la stessa, che la ragione del lato CD a DG (*b*), dunque i parallelogrammi ABCD, GDEF, siccome ancora i triangoli ADC, GDE, che sono le loro metà, sono in ragione composta delle ragioni dei loro lati. (*a*) 2. del II. (*b*) 7. di. qu.

## XVII.

*Se* dunque *nei parallelogrammi equiangoli* ABCD, GDEF *sieno i lati reciprocamente proporzionali, cioè* AD *a* DE, *come* GD *a* DC, *saranno uguali: e se sono uguali, avranno i lati reciprocamente proporzionali.*

Poichè, essendo fra loro i parallelogrammi in ragione composta de i loro lati (*c*), se i lati sieno reciprocamente proporzionali, ovvero le ragioni de i lati sieno reciproche, la ragione composta, che ne risulta, cioè la ragione de i parallelogrammi, sarà ragione d'ugualità (*d*); che se la ragione composta, ovvero la ragione de i parallelogrammi, sia ragione d'egualità, le ragioni componenti saranno reciproche, ovvero i lati saranno reciprocamente proporzionali (*e*). (*c*) ant. (*d*) 5. II (*e*) 6. II.

## XVIII.

*Se* dunque *quattro linee rette sieno proporzionali, e sia* AD *a* DE *come* GD *a* DC,

sarà

*ſarà il parallelogrammo dell' eſtreme* AD, DC *uguale al parallelogrammo equiangolo dell' intermedie* DE, GD: *e ſe il parallelogrammo dell' eſtreme ſia uguale al parallelogrammo equiangolo dell' intermedie, le quattro linee rette ſaranno proporzionali.*

Poichè, eſſendo le linee proporzionali, cioè AD a DE come GD a DC, i parallelogrammi ABCD, DEFG avrebbero i lati reciprocamente proporzionali, e perciò (*a*) ſarebbero fra loro uguali; e, ſe foſſero fra loro uguali, avrebbero i lati reciprocamente proporzionali, cioè AD a DE, come GC a DC, e perciò le rette ſarebbero proporzionali.

(*a*) *ant.*

XIX.

E *ſe tre linee ſieno proporzionali, cioè* AD *a* DE, *come* DE *a* DC, *ſarà il parallelogrammo dell' eſtreme uguale al parallelogrammo equiangolo, ovvero al quadrato dell' intermedia* DE; *e ſe il parallelogrammo dell' eſtreme ſia uguale al parallelogrammo equiangolo, ovvero al quadrato dell' intermedia, ſaranno proporzionali.*

Poichè figurandoſi un' altra intermedia GD uguale a DE, ſarebbero le quattro rette proporzionali, e perciò (*b*) il parallelogrammo dell' eſtreme ſarà uguale al parallelogrammo dell' intermedie DE, GD; cioè della ſola intermedia DE; e ſe foſſero uguali i parallelogrammi dell' eſtreme, e dell' intermedie, ſarebbero le rette proporzionali, cioè AD a DE come GD, cioè l' iſteſſa DE, a DC.

(*b*) *ant.*

XX.

*Tutto quello, che ſi è dimoſtrato dei parallelogrammi equiangoli, ſi verifica ancora delle loro metà, cioè dei triangoli equiangoli.*

XXI.

XXI.

Siccome ancora può facilmente inferirsi, che *i triangoli* ADC, GDE, *che abbiano un' angolo uguale ad un angolo, sono fra loro come i rettangoli, che si formassero dai loro lati* AD, DC, GD, DE, *che sono d' intorno agli angoli uguali* ADC, GDE.

XXII.

*Se sopra l' istessa base* AC, *ovvero basi uguali* AC, CF, *e dentro l' istesse parallele* AF, DB *sia il parallelogrammo* ADEC, *ed il triangolo* ABC, *ovvero* CBF, *sarà il parallelogrammo doppio del triangolo.* Fig. 56.

Tirisi il diametro CD, e (*a*) sarà il triangolo ADC uguale al triangolo ABC, ovvero CBF; dunque, siccome il parallegrammo ADEC è doppio del triangolo ADC (*b*), così sarà doppio ancora del triangolo ABC, ovvero CBF. (*a*) 11. *di. qu.* (*b*) 4. *di. qu*

XXIII.

*Descrivere un parallelogrammo, che sia uguale al triangolo dato* ABF, *ed abbia un angolo dato* X. Fig. 56. 57.

Dividasi in mezzo la base AF nel punto C, nel quale facciasi (*c*) l'angolo ACE uguale all' angolo dato X, e (*d*) dai punti A, B si tirino le rette AD, BD parallele ai lati CE, AF. Sarà dunque tanto il triangolo ABF (*e*), quanto il parallelogrammo (*f*) ADEC doppio dell' istesso triangolo ABC, e perciò uguali fra loro. (*c*) 21. *III.* (*d*) 4. *IV* (*e*) 8. *di. qu.* (*f*) *ant.*

XXIV.

*Descrivere sopra la data retta linea* GD *un parallelogrammo, che abbia un angolo uguale all'angolo dato* X, *e sia uguale al triangolo dato* ABF. Fig. 55. 56. 57.

Descrivasi (*g*) il parallelogrammo ABCD, che abbia l' angolo ADC uguale all' angolo dato X, e sia uguale al triangolo dato; e posta la (*g*) *ant.*

GD

GD per diritto a DC, si tiri per il punto G la parallela a BC, la quale concorra con la BA prolungata nel punto I, dal quale tirisi il diametro ID, che concorra col lato BC prolungato nel punto H, e per esso tirisi la HF parallela alla CG, e compiscasi il parallelogrammo IBHF. Sarà dunque (*a*) l'angolo GDE uguale all'angolo opposto ADC, ovvero all'angolo dato X, ed il parallelogrammo GDEF sarà uguale al parallelogrammo, o complemento ABCD (*b*), ovvero al triangolo dato ABF.

(*a*) 9. III.

(*b*) 5. di qu.

XXV.

Fig. 58. *Ridurre qualsivoglia figura rettilinea* ABC DEF *ad un triangolo uguale, ovvero fare un triangolo uguale al dato rettilineo.*

Prolungandosi dall'una, e dall'altra parte la retta AF, e tirate le AC, FD, tirisi per il punto B la retta BG parallela all'AC, siccome per il punto E la EH parallela alla FD, e sarà (*c*) il triangolo AGC uguale al triangolo ABC, ed il triangolo FHD al triangolo FED, e però il trapezio GCDH uguale al rettilineo ABCDEF. Congiungasi similmente GD, e per il punto C tirisi la retta CI parallela alla GD, e sarà il triangolo GID uguale al triangolo GCD, e però il triangolo IDH sarà uguale al trapezio GCDH, cioè al rettilineo dato ABCDEF.

(*c*) 11. di qu.

XXVI.

Si potrà dunque *formare sopra la data linea retta, e coll'angolo dato un parallelogrammo uguale a qualsivoglia rettilineo dato.*

(*d*) ant. (*e*) 24. di qu. Se prima riducasi (*d*) il rettilineo dato ad un triangolo, e poi facciasi (*e*) sopra la linea data, e coll'angolo dato un parallelogrammo uguale all'istesso triangolo.

XXVII.

## XXVII.

*Se nel triangolo* ABC *fia la retta* DE *parallela alla baſe* AC, *ſaranno i lati* AB, CB *ſegati proporzionalmente, cioè ſarà* AD *a* DB *come* CE *ad* EB: *e, ſe i lati ſieno diviſi proporzionalmente, la retta* DE *ſarà parallela alla baſe* AC. Fig. 59.

Si tirino le rette AE, CD, e ſaranno i triangoli AED, CED poſti ſopra l'iſteſſa baſe DE, e fra l'iſteſſe parallele DE, AC uguali fra loro (*a*), e però ſarà il triangolo AED al triangolo DEB come il triangolo CED all'iſteſſo triangolo DEB; ma il triangolo AED al triangolo DEB ſta (*b*) come la retta AD a DB, ed il triangolo CED ſta al triangolo DEB come la retta CE ad EB (*b*); dunque ſarà la retta AD, a DB come la retta CE ad EB, e perciò i lati ſaranno ſegati proporzionalmente. Che ſe foſſero i lati ſegati proporzionalmente, e foſſe AD a DB come CE ad EB ſarebbe ancora (*c*) il triangolo AED al triangolo DEB come l'altro triangolo CED all'iſteſſo triangolo DEB, e perciò (*c*) i triangoli AED, CED ſarebbero fra loro uguali, ed avendo l'iſteſſa baſe DE ſarebbero nell'iſteſſe parallele (*d*), onde le rette AC, DE ſarebbero parallele.

(*a*) 11. *di qu.*
(*b*) 8. *di qu.*
(*c*) *Aſſ.* 1. I.
(*d*) 12. *di qu.*

## XXVIII. Fig. 60.

*Se nel triangolo* AEB *la retta* DE *divida in mezzo l'angolo* AEB, *ſaranno le parti della baſe* AB *proporzionali ai lati loro contigui, cioè* AD *a* DB *come* AE *ad* EB; *e, ſe le parti della baſe ſieno proporzionali ai lati loro contigui, l'angolo ſarà diviſo nel mezzo.*

Tiriſi dal punto A alla retta DE la parallela, che concorra col lato BE prolungato nel punto C, e per eſſere l'angolo eſterno BED uguale all'angolo interno BCA (*e*) l'angolo DEA ugua-

(*e*) 7.

(a) 6. IV. le all' angolo alterno EAC (a), se gli angoli BED, DEA si pongano fra loro uguali, anche gli angoli BCA, ovvero ECA, ed EAC saranno uguali, onde (b) anche uguali saranno i lati AE, CE; e però, siccome CE sta ad EB come AD a DB (c), così ancora sarà AE ad EB come AD a DB. Che se fosse come AD a DB, cioè CE ad EB, così AE ad EB, i lati AE, CE sarebbero fra loro uguali (d); e perciò (e) l'angolo EAC, ovvero l'alterno DEA, sarebbe uguale all'angolo ECA, cioè all'esterno BED, e però l'angolo AEB sarebbe diviso nel mezzo.

(b) 18. III.

(c) ant.

(d) Ass. 1.

(e) 10. III.

## XXIX.

*Dividere la data linea* AC *nell' istessa ragione, nella quale sia divisa la retta* CB *nel punto* E.

Tirisi la retta AC, alla quale per il punto E tirisi la parallela ED, e saranno (f) i lati AB, CB divisi nell'istessa ragione, cioè sarà l'AD a DB come CE ad EB, ovvero componendo AB a BD come CB a BE.

(f) 17. di. qu.

## XXX.

Fig. 59. Si potrà ancora *dalla data linea retta* AB *tagliare qualsivoglia parte richiesta, per esempio una terza.*

Se tirando dal punto B qualsivoglia retta BC si piglino in essa tre parti uguali BE, EG, GC, e poi congiunta l'AC gli si tiri dal punto E la parallela ED; poichè, essendo AB a BD come CB a BE, ed invertendo BD a BA come BE a BC, siccome BE è la terza parte della BC, così BD sarà la terza parte della BA.

## XXXI.

Fig. 60. *Date due linee rette* BD, DA *trovare la terza loro proporzionale.*

Pongasi la BE uguale alla seconda DA, e congiunta DE gli si tiri dal punto A la parallela, che

che ſeghi il lato BE prolungato nel punto C, e ſarà la (a) BD alla DA come la BE, cioè l'iſteſſa DA, alla EC; e però l'EC ſarà la terza proporzionale. (a) 17. di. qu.

## XXXII.

*Date tre linee rette* BD, DA, BE *trovare la quarta proporzionale.*

Si diſpongano le date linee, ſicchè la prima e terza formino un'angolo, e congiunta la DE gli ſi tiri dal punto A la parallela, che ſeghi la retta BE prolungata nel punto C, e ſarà (b) BD a DA come BE ad EC, e però l'EC ſarà la quarta proporzionale. (b) 17. di. qu.



# LIBRO VII.

## *Delle figure simili, loro proporzione, e misura.*

POichè la varietà delle figure dipende dalla varietà dei lati e degli angoli, che esse contengono, siccome grandissima ed infinita esser può la varietà degli angoli istessi e dei lati, che non conservano fra loro una certa costante legge di numero, o di grandezza, così grandissima ed infinita esser deve la varietà delle figure, che si possono paragonare fra loro, come nel passato Libro si è dimostrato. Più nobile nondimeno, e più dilettevole è la cognizione di quella spezie di figure, che contenendo egual numero di lati, e tutti gli angoli uguali, si chiamano ***Figure simili***; onde anche più nobili, e più distinte sono le loro proprietà. Di queste parlerò dunque nel settimo Libro, che segue, osservando, ed avvertendo quì di passaggio, che tutto quello, che generalmente si è dimostrato delle figure nel passato Libro, devesi altresì intendere dimostrato, ed applicare alle figure simili, che altro non sono, che una spezie più riguardevole di figura.

## DEFINIZIONI.

### I.

FIgure *simili* sono quelle, che essendo composte di ugual numero di lati hanno tutti gli angoli uguali, ed intorno a ciascun angolo uguale i lati proporzionali.

II.

II.

Onde appariſce, che le figure che ſono ſimili ad una terza, ſaranno ſimili anche fra loro; poichè, ſe i loro angoli ſono uguali agli angoli di una terza figura, ſaranno ancora uguali fra loro; e ſe i loro lati ſono proporzionali ai lati di una terza figura, lo ſaranno ancora fra loro (*a*). (*a*) *Aſſ.* 10. *I.*

III.

La linea retta diceſi diviſa *in eſtrema, e media ragione*, quando tutta la linea ſta alla parte maggiore come l'iſteſſa parte maggiore ſta alla minore.

## PROPOSIZIONI.

### I.

SE *i triangoli* ABC, DEF *ſieno equiangoli, ſaranno ſimili, ed intorno agli angoli uguali avranno i lati proporzionali; e ſarà* AC *a* CB *come* DF *ad* FE; CB *a* BA *come* FE *ad* ED, BA *ad* AC *come* ED *a* DF. Fig. 61

Si taglino (*b*) dai lati maggiori CA, CB le parti CI, CG uguali ai lati FD, FE, e per eſſere gli angoli contenuti ICG, DFE fra loro uguali, ſaranno (*c*) anche uguali le baſi IGD E, l'angolo CIG uguale all'angolo FDE, cioè per ipoteſi all'angolo CAB, onde (*d*) la retta IG ſarà parallela alla retta AB: tiriſi (*e*) finalmente la GH parallela alla retta AC. Per eſſere dunque IG, AB parallele, ſarà (*f*) AC a CI come BC a CG, e permutando AC a CB come IC a CG, ovvero DF ad FE; e per eſſere parallele le rette HG, AC, ſarà BC a CG come BA ad AH, e permutando BC a BA come CG ad AH, ovvero (*g*) ad IG, cioè come FE

(*b*) *III.* 3.
(*c*) *III.* 11.
(*d*) 3. *IV.*
(*e*) 4. *IV.*
(*f*) 7. *IV.*
(*g*) 10.

FE ad ED; ed essendosi dimostrato AC a CB come DF ad FE, e CB a BA come FE ad ED, sarà per egualità ordinata BA ad AC come ED a DF.

II.

*Se nel triangolo* ABC *si tiri qualsivoglia retta* HG *parallela alla base* AC, *il triangolo* HBG *sarà sempre simile al triangolo* ABC; *e perciò la base* AC *sarà alla base* HG *come il lato* AB *a* BH, *ovvero* CB *a* BG.

III.

*Se due triangoli* ABC, DEF *abbiano intorno agli angoli uguali* ACB, DFE *i lati proporzionali, cioè* AC *a* CB *come* DF *ad* FE, *averanno ancora tutti gli altri angoli uguali agli altri angoli, e d' intorno a quelli i lati proporzionali, ovvero saranno simili.*

Ponganſi i lati CI, CG uguali ai lati FD, FE, e perciò il triangolo IGC uguale al triangolo DEF; ed essendo per ipotesi AC a CB come DF ad FE, cioè come IC a CG, sarà permutando AC a CI come BC a CG, e però (*a*) la retta GI sarà parallela alla retta BA, il triangolo ABC sarà simile al triangolo IGC, ovvero DEF (*b*), ed in conseguenza saranno tutti gli angoli corrispondenti fra loro uguali, ed intorno ad essi i lati proporzionali (*c*).

(*a*) 27. IV.
(*b*) ant.
(*c*) 1. di. qu.

IV.

Fig. 55. Tav. III. *Se per qualsivoglia punto* D *preso nel diametro* IH *del parallelogrammo* IBHF *si tirino le rette* AE, GC, *parallele ai lati* BH, FH, *saranno i parallelogrammi* IADG, DCHE, *che divisi sono dal diametro, simili*

*si fra loro, ed all' intero parallelogrammo* IBHF.

Essendo le rette AD, BH parallele, e perciò simili i triangoli IAD, IBH, sarà IA ad AD come IB a BH; e per essere (*a*) IA uguale a GD, ed AD uguale ad FH, e BH uguale ad IF, sarà ancora AI ad IG come BI ad IF, ed in conseguenza, per essere nei parallelogrammi IADG, IBHF tutti gli angoli uguali, ed intorno ad essi i lati proporzionali, sarà (*b*) il parallelogrammo IADG simile al parallelogrammo IBHF; e perchè nell' istessa maniera si proverà anche il parallelogrammo DCHE simile al parallelogrammo istesso IBHF, saranno (*c*) i parallelogrammi IADG, DCHE simili ancora fra loro,

(*a*) 10. IV.

(*b*) Def. 1. di qu.

(*c*) Def. 1. di qu.

V.

*E se i parallelogrammi* IADG, DCHE *sieno simili fra di loro, o all' intero parallelogrammo* IBHF, *saranno intorno all' istesso diametro; cioè i loro diametri, o le rette* DI, DH *saranno per diritto, e formeranno il diametro dell' intero parallelogrammo* IBHF.

Perchè i parallelogrammi IADG, DCHE sono simili, anche i triangoli IAD, DCH saranno simili, ed in conseguenza l' angolo ADI sarà uguale all'angolo CHD, ovvero all' angolo alterno HDE; e però, se gli angoli ADI, HDE fatti dalla retta GC con le rette DI, DH sono fra loro uguali, l'istesse rette DI, DH saranno poste per diritto, o formeranno una linea retta (*d*).

(*d*) 10. III.

VI.

E però *se il parallelogrammo intero* IBHF *fosse quadrato, anche i due parallelogrammi simili* IADG, DCHE *sarebbero quadrati; e se i due parallelogrammi simili* IADG,

DCHE *fossero quadrati, anche tutto il parallelogrammo intero* IBHF *sarebbe quadrato.*

VII.

Fig.63. *Se due linee rette* AB, CD *si seghino dentro del circolo nel punto* I, *sarà il rettangolo delle due parti di una* AI, IB *uguale al rettangolo delle due parti dell' altra* CI, ID.

Si tirino la AC, DB, e saranno gli angoli (a) 9. III. opposti AIC, DIB uguali (a), siccome uguali sono gli angoli ABD, ACD, che insistono sopra l'arco medesimo AD, e gli angoli CAB, CDB, che insistono sopra l'arco medesimo CB; (b) 10. V. (b) e però i triangoli AIC, DIB saranno equi- (c) 18. di qu. angoli, ed avranno intorno agli angoli uguali i lati proporzionali (c), cioè AI ad IC come DI (d) 18. VI. ad IB, onde (d) il rettangolo dell'estreme AI, IB sarà uguale al rettangolo delle intermedie CI, ID.

VIII.

Fig.64. *Se da qualsivoglia punto* A, *che si pigli fuori del circolo, si tiri la tangente* AB, *e qualsivoglia altra retta* AC, AD, *che passi o no per il centro, sarà sempre il rettangolo fatto da tutta l'* AC, *e dalla parte* AE, *ovvero da* AD *in* AF, *uguale al quadrato della tangente* AB.

(e) 20. V. Si tirino le rette BF, BE, BI, BC, BD, e sarà (e) l'angolo ABE fatto dalla tangente AB, e dalla secante BE uguale all'angolo BCE, che si descrive nella porzione opposta; e però i triangoli CAB, BAE, che hanno l'angolo CAB (f) 15. IV. comune, e l'angolo BCA uguale all'angolo ABE, avranno ancora (f) l'angolo rimanente (g) 1. di qu. CBA uguale all'angolo rimanente BEA, onde (g) saranno equiangoli, e simili, ed intorno all'

an-

angolo uguale e comune CAB avranno i lati proporzionali, e sarà CA ad AB come AB ad AE, e però (a) il rettangolo dell'estreme CA, AE sarà uguale al quadrato fatto dall'intermedia o tangente AB. Similmente ancora si proveranno simili i triangoli DAB, ABF, e però DA ad AB sarà come AB ad AF, ed il rettangolo dell'estreme DA, AF sarà uguale al quadrato dell'intermedia o tangente AB. (a) 19. VI.

IX.

*Essendo* dunque *i rettangoli* CAE, DAF *uguali all'istesso quadrato della tangente* AB, *saranno sempre uguali fra loro; siccome ancora, essendo i quadrati delle due tangenti* AB, AG *uguali all'istesso rettangolo* CAE, *saranne sempre uguali fra loro, onde anche le tangenti istesse saranno fra loro uguali.*

X.

*I triangoli simili* ABC, DEF *sono in duplicata ragione dei loro lati omologhi* AC, DF. Fig. 61.

Pongasi il triangolo IGC uguale al triangolo DEF, e per essere questi triangoli simili, sarà AC a CI come BC a CG, e tirisi la BI. Il triangolo ABC al triangolo IGC è (b) in ragione composta della ragione del triangolo ABC al triangolo IBC, e della ragione dell'istesso triangolo IBC al triangolo IGC; ma la ragione del triangolo ABC al triangolo IBC è la stessa, che la ragione di AC a CI (c), e la ragione del triangolo IBC al triangolo IGC è la stessa, che la ragione di BC a CG, cioè la stessa che la ragione di AC a CI, ovvero di AC a DF; dunque la ragione del triangolo ABC al triangolo IGC, o DEF è composta di due ragioni uguali di AC a DF, e perciò (d) è duplicata della ragione dei lati omologhi AC, DF. (b) 1. II. (c) 8. VI. (d) 3. II.

XI.

XI.

Fig.62. *I poligoni simili* ABCDE, FGHIK *sono in duplicata ragione dei loro lati omologhi* AE, FK.

Si dividano i poligoni in altrettanti triangoli con le rette BE, BD, GK, GI. Poichè intorno agli angoli uguali EAB, KFG sono i lati EA, AB proporzionali ai lati KF, FG, sarà (a) 3. diqu. (a) il triangolo EAB simile al triangolo KFG, onde sarà AE ad EB come FK a KG, e gli angoli AEB, FKG saranno uguali; e togliendo questi dagli angoli AED, FKI, che per ipotesi sono uguali, resterà l'angolo BED uguale all'angolo GKI; e perchè era in ipotesi DE ad EA come IK a KF, e si è provato EA ad EB come KF á KG, sarà per egualità ordinata DE ad EB, come IK a KG, e perciò ancora i triangoli BED, GKI che intorno agli angoli uguali BED, GKI hanno i lati proporzionali saranno simili, siccome ancora si proverà nell'istessa maniera esser simili i triangoli BCD, GHI, e però ciascun triangolo del poligono maggiore sarà al suo triangolo corrispondente nel poligono minore in duplicata ragione del lato omologo del poligono maggiore al lato omologo corrispondente nel poligono minore; ma queste ragioni sono sempre uguali, per essere nei poligoni simili i lati omologhi fra loro proporzionali; dunque tutti i triangoli insieme del poligono ABCDE, cioè il poligono istesso, saranno a tutti insieme i triangoli del poligono FGHIK, cioè al poligono istesso, in duplicata ragione di un lato omologo AE al lato omologo FK.

XII.

Fig.61. 62. *Se* dunque *dopo i lati omologhi* AC, DF *si pigli la terza proporzionale* X, poichè tanto la ragione della retta, o lato AC ad X quanto la ragione del triangolo ABC

al

BC al triangolo DEF è duplicata della ragione della prima linea AC alla seconda DF (a), *sarà la ragione del triangolo* ABC *al triangolo* DEF *uguale alla ragione della prima linea* AC *alla terza* X: e per la stessa ragione si proverà che *ponendosi dopo le due* AE, FK *la terza proporzionale* Z, *il poligono* ABCDE *al poligono* FGHIK *sarà come la prima linea* AF *alla terza* Z. (a) 3 II.

XIII.

*Se le quattro rette* AC, DF, AE, FK *sieno proporzionali, e sopra le due prime si descrivano due figure simili* ABC, DEF, *e sopra le due seconde figure simili* ABCDE; FGHIK, *saranno ancora le figure proporzionali, cioè* ABC *a* DEF *come* ABCDE *ad* FGHIK; *e se le figure sieno proporzionali, anche i loro lati omologhi saranno proporzionali.*

Imperocchè, essendo le figure in duplicata ragione dei loro lati omologhi, se per essere i lati proporzionali, la loro ragione semplice, o diretta sia uguale, anche la loro ragione duplicata, cioè quella delle loro figure, sarà uguale; e se per essere le figure proporzionali, la loro ragione composta, o duplicata sia uguale, anche la loro ragione semplice, e diretta, cioè quella dei loro lati omologhi sarà uguale.

XIV.

*Se dalla cima* B *del triangolo rettangolo* ABC *si tiri la perpendicolare* BD *sopra la base* AC, *saranno i triangoli* ADB, BDC *simili all'istesso triangolo* ABC, *e fra loro.* Fig. 66.

I tri-

I triangoli ABC, ADB, oltre l'angolo comune CAB, hanno anche uguali gli angoli retti ABC, ADB, onde anche gli angoli, che restano, ACB, ABD saranno uguali, ed i triangoli saranno simili; nella stessa maniera si proverà, che i triangoli ABC, BDC sono simili, e perciò l'angolo CAB sarà uguale all'angolo CBD. Perchè dunque nei triangoli ADB, BDC, oltre agli angoli retti uguali ADB, BDC, sono anche i due angoli ABD, BAD uguali a due angoli BCD, CBD, saranno (*a*) i triangoli stessi equiangoli, e simili fra loro.

(*a*) 1. di qu.

XV.

E però *i lati* AB, BC *saranno medii proporzionali fra l'intera base, e le parti di lei, che sono ad essi contigue; siccome la perpendicolare* BD *sarà media proporzionale fra l'istesse parti della base* AD, DC.

Poichè, essendo simili i triangoli CAB, BAD, sarà CA ad AB come AB ad AD; ed essendo simili i triangoli ACB, BCD, sarà AC a CB come CB a CD; ed essendo finalmente simili anche i triangoli ADB, BDC, sarà AD a DB come DB a DC.

XVI.

Onde *il quadrato di* AB *sarà uguale al rettangolo di* CA *in* AD; *il quadrato di* CB *uguale al rettangolo di* AC *in* CD; *ed il quadrato di* DB *uguale al rettangolo di* AD *in* DC (*b*).

(*b*) 19. VI.

XVII.

Si potrà dunque *trovare la media proporzionale fra le due date linee rette* AD, DC.

Se, disponendole in linea retta, quando prima non fossero, sopra l'intera AC come diametro si des-

descriva il semicircolo, e si alzi la perpendicolare DB. Imperocchè, tirate le AB, CB, l'angolo ABC inscritto nel semicircolo è sempre retto (*a*), (*a*) 11. V. e perciò la perpendicolare BD sarà media proporzionale fra le parti della base (*b*), cioè fra le (*b*) Am. date rette AD, DC.

XVIII.

E si potrà *fare un quadrato uguale al rettangolo, che si formasse dalle due rette* AD, DC.

Se trovandosi fra i lati AD, DC la media proporzionale BD si descriva (*c*) il quadrato dell'(*c*) 11. IV. istessa retta BD. Poichè, essendo le rette AD, BD, DC continuamente proporzionali, il rettangolo dell'estreme sarà uguale al quadrato dell'intermedia BD (*d*). (*d*) 19. VI.

XIX.

*Se sopra i tre lati del triangolo rettangolo* ABC *si descrivessero tre figure fra loro simili, sarebbe la figura descritta sopra la base* AC *uguale alle due figure descritte sopra i lati* AB, BC *prese insieme.*

Tirandosi dal punto B la perpendicolare BD sopra la base AC, sarà (*e*) CA ad AB come (*e*) 15. VI. AB ad AD, e perciò la figura descritta sopra la base AC sarà (*f*) alla figura simile descritta so- (*f*) 12. di qu. pra il lato AB come la retta AC ad AD: e perchè similmente sta AC a CB come CB a CD, sarà la figura descritta sopra la base AC alla figura simile descritta sopra il lato CB come l'istessa AC a CD, e però congiungendo la figura descritta sopra la base sarà alle due figure insieme descritte sopra dei lati come la retta AC alle due rette insieme AD, DC, cioè uguale.

XX.

Dunque *il quadrato della base* AC, *sarà* Fig. 66. *sempre uguale ai quadrati, che si fanno dai*

*rati*

*lati* AB, BC; *e però, se i lati* AB, BC *fossero uguali, il quadrato della base* AC *sarebbe doppio del quadrato della sola* AB; *onde nel quadrato* ABCD *il quadrato del diametro* DB, *è sempre doppio del quadrato di un lato* AB.

Fig.72.

## XXI.

*Il diametro* AC *del quadrato è sempre incommensurabile al lato* AB.

Fig.63.

Imperocchè non si potranno giammai ritrovare due numeri, che esprimano la ragione delle rette AC, AB, ovvero due numeri, i quadrati de' quali sieno fra loro come il 16. all'8. non essendo l'8. numero quadrato, vale a dire non potendosi ritrovar alcun numero, che moltiplicato in se stesso produca l'8.

*Ovvero* Se le due rette AC, AB fossero commensurabili, trovisi qualsivoglia loro comune misura X; e, dividendosi in mezzo l'angolo ABC con la retta AE, si tiri la perpendicolare ED, e la EF parallela ad AC, e sarà (*a*) nei triangoli rettangoli ADE, ABE l'lato AB uguale alla retta AD, e la retta DE uguale a BE; e però, siccome CE è maggiore (*b*) di DE, ovvero di BE, così ancora (*c*) AF sarà maggiore di FB, cioè più che la metà del lato AB. Similmente ancora diviso in mezzo l'angolo BFE con la retta FH, e tirata la HI parallela ad FE, e la perpendicolare HG, sarà FG uguale ad FB, e la GE, o GH uguale ad HB, e però la EH maggiore di HB, ovvero la FI maggiore di IB, ed in conseguenza FI sarà più che la metà di FB, così seguitando a togliere dai lati AB, FB le parti AF, FI sempre maggiori della metà degli stessi lati, si giunga finalmente a lasciare la particella IB minore della grandezza X. Perchè dunque la grandezza X misura tutta

(*a*) I. VI.

(*b*) 14. III.

(*c*) 27. VI.

la

la AC, e la parte AD uguale ad AB, misurerà ancora (*a*) la rimanente DC, ovvero DE, o BE; e misurando tutta la CB, e la parte BE, misurerà ancora (*a*) la CE, o FE; e mirando la FE, e la FB, o FG, misurerà ancora la GE, o GH, o HB, o IB; il che è impossibile per essere la IB minore di X. (*a*) Def. 10. I.

XXII.

*Se la linea* AC *si divida in qualsivoglia maniera nel punto* D, *il rettangolo di* AC *in* CD *sarà uguale al quadrato di* CD *insieme col rettangolo delle parti* AD DC. Fig. 56.

Descritto sopra l'AC il semicircolo ABC tirino la perpendicolare DB, ed i lati AB, BC, e sarà il rettangolo di AC in CD uguale (*b*) al quadrato di CB, cioè al quadrato di CD insieme col quadrato di DB (*c*), cioè col rettangolo delle parti AD, DC. (*b*) 16. di qu. (*c*) 2. di qu.

XXIII.

*Il quadrato di tutta l'*AC *sarà uguale ai quadrati delle parti* AD, DC *insieme col rettangolo delle parti* AD, DC *preso due volte*.

Il quadrato dell'AC è uguale al quadrato delle AB, BC (*d*), cioè ai quadrati delle AD, DC insieme col quadrato della DB, ovvero (*e*) col rettangolo delle parti AD, DC preso due volte. (*d*) 20. di qu. (*e*) 16. di qu.

XXIV.

*Il quadrato dell'*AC *è uguale ai rettangoli di tutta l'*AC *nelle due parti* AD, DC; *cioè al rettangolo di* AC *in* AD *insieme col rettangolo dell'istessa* AC *in* DC.

Il quadrato dell'AC è uguale al quadrato dell'AB, ovvero (*f*) al rettangolo dell'AC in AD, insieme col quadrato della CB, ovvero (*g*) col rettangolo della AC in DC. (*f*) 16. di qu.

XXV.

## XXV.

*I quadrati delle due* AC, CD *sono uguali al quadrato dell' altra parte* AD *insieme col rettangolo dell'* AC *in* CD *preso due volte.*

Il quadrato dell'AC è uguale ai quadrati delle AD, DC insieme col rettangolo dell' AD in DC preso due volte (*a*), dunque i quadrati del-
(*a*) 23. *di qu.* le AC CD saranno uguali al quadrato dell'AD insieme col quadrato di DC preso due volte, ed il rettangolo di AD in DC preso anche esso due volte; ma il rettangolo di AD in DC col qua-
(*b*) 22. *di qu.* drato della CD è uguale (*b*) al rettangolo di AC in CD; dunque i quadrati delle AC, CD saranno uguali al quadrato di AD insieme col rettangolo della AC in CD preso due volte.

## XXVI.

*Se la retta* AC *sia divisa in mezzo, o in parti uguali nel punto* E, *ed in parti disuguali nel punto* D, *sarà il quadrato della metà* EC *uguale al quadrato dell' intermedia* ED *insieme col rettangolo delle parti* AD, DC.

Il quadrato della EG, ovvero dell'EB, è uguale al quadrato di ED insieme col quadrato
(*c*) 20. *di qu.* di DB (*c*) ovvero (*d*) col rettangolo delle
(*d*) 16. *di qu.* parti AD, DC.

## XXVII.

*Se la retta* CE *dividasi in mezzo nel punto* I, *ed aggiungasi qualsivoglia parte* EA, *sarà il rettangolo di tutta la* CA *nella parte* AE *insieme col quadrato dell' intermedia, o metà* IE, *uguale al quadrato di* IA.

(*e*) 9. *V.* Descritto sopra la CE il circolo CGED, e
(*f*) 8. *di qu.* tiratagli (*e*) la tangente AB, che sarà perpendicolare al raggio IB, sarà (*f*) il rettangolo di

CA

CA in AE uguale al quadrato della AB; ed aggiunti i quadrati uguali delle rette uguali, IE, IB, sarà il rettangolo di CA in AE insieme col quadrato della IE uguale ai quadrati delle rette AB, BI, cioè (*a*) al solo quadrato della retta IA. (*a*) 20. *di qu.*

## XXVIII.

*Dividere in estrema, e media ragione la data retta* AB. Fig. 67.

Descrivasi il quadrato ABCD, e dividendosi in mezzo il lato DA nel punto E si tiri l'EB, a cui pongasi (*b*) uguale l'EF, e sopra l'AF descrivasi il quadrato AFGI, del quale prolunghisi il lato GI fino in H (*c*). (*b*) 5. *III.* (*c*) 11. *IV.*

Perchè alla retta DA divisa in mezzo si è aggiunto il pezzo AF, sarà (*d*) il rettangolo della DF in FA insieme col quadrato della EA uguale al quadrato della EF, ovvero dell'EB, cioè (*e*) al quadrato dell'AB insieme col quadrato dell'istessa AE, e perciò tolto di comune il quadrato di AE, resterà il rettangolo di DF in FA, cioè il rettangolo DFGH, uguale al quadrato della AB, cioè al quadrato ABCD; e tolto di comune il rettangolo DAIH, resterà il rettangolo di CB in BI, cioè di AB in BI, uguale al quadrato della AI, onde (*f*) le rette BA, AI, IB saranno proporzionali, e la retta AB sarà divisa in estrema e media ragione nel punto I. (*d*) 29. *di qu.* (*e*) 20. *di qu.* (*f*) 19. *VI.*

## XXIX.

*Nel triangolo ottusangolo* ABC *tirata la perpendicolare* BD *sopra del lato* AC *prolungato, il quadrato del lato* AB *opposto all' angolo ottuso* ACB *è maggiore dei quadrati degli altri lati; ed è uguale ai quadrati degli stessi lati* AC, CB *insieme col rettangolo di* AC *in* CD *preso due volte.* Fig. 68.

(a) 20. di qu. Il quadrato di AB è uguale (a) al quadrato di BD insieme col quadrato di AD, cioè (b) (b) 23. di qu. con i quadrati delle parti AC, CD, ed il rettangolo dell'istesse parti AC, CD preso due volte; se dunque in vece dei quadrati delle due BD, CD, si pigli il quadrato della sola BC, che gli uguaglia, sarà il quadrato della AB uguale ai quadrati dei lati AC, CB insieme col rettangolo di AC in CD preso due volte.

Fig. 69.

## XXX.

*Nel triangolo acuziangolo* ABC *tirata la perpendicolare* BD *sopra di un lato* AC, *il quadrato del lato* AB *opposto all' angolo acuto* ACB *è minore dei quadrati degli altri lati; ed è uguale al quadrato degli stessi lati* AC, CB *senza il rettangolo di* AC *in* CD *preso due volte.*

Il quadrato di AC è uguale ai quadrati di AD, DC insieme col rettangolo delle parti AD, DC preso due volte (c), ed il quadrato di CB è (c) 23. di qu. uguale ai quadrati di CD, DB (d); dunque i (d) 20. di qu. due quadrati di AC, CB saranno uguali ai quadrati di AD, DB insieme col quadrato di DC preso due volte ed il rettangolo di AD in DC preso due volte; ma i quadrati di AD, DB sono uguali al quadrato di AB, ed il quadrato di DC col rettangolo di AD in DC è uguale al (e) 22. di qu. rettangolo di AC in CD (e), dunque i quadrati di AC, CB sono uguali al quadrato di AB insieme col rettangolo di AC in CD preso due volte, e però il quadrato di AB è uguale ai quadrati dei lati AC, CB senza il rettangolo di AC in CD preso due volte.

## XXXI.

Fig. 66. *Se il quadrato del lato* AC *sia uguale ai qua-*

*quadrati dei lati* AB, BC, *l'angolo* ABC *ſarà retto.*

Poichè, ſe l'angolo ABC foſſe maggiore del retto, o ottuſo, anche il quadrato della baſe AC ſarebbe maggiore dei quadrati de' lati AB, BC (*a*); e ſe foſſe minore del retto, o acuto, il quadrato della baſe AC ſarebbe minore dei quadrati de' lati AB, BC (*b*) il che ripugna all'ipoteſi. (*a*) 31. *di qu.* (*b*) *Ant.*

Quello, che ſi è dimoſtrato nelle tre paſſate Propoſizioni dei quadrati, s'intende ancora di tutte le altre figure ſimili, che ſi deſcrivano ſopra gl'iſteſſi lati; poichè elle hanno l'iſteſſa ragione dei quadrati, cioè duplicata dei lati omologhi (*c*). (*c*) 11. *di qu.*

## XXXII.

*Se nel diametro del ſemicircolo* ABC *ſi piglino due punti* F, G *egualmente lontani dal centro* E, *e da quelli ſi tirino a qualſivoglia punto della circonferenza* B, H *le rette* FB, BG, *ed* FH, HG, *ſaramo ſempre i quadrati delle due* FB, BG *uguali ai quadrati delle due* FH, HG. Fig. 70.

Alzato il raggio perpendicolare EI ſi ritirino le rette FI, GI, EB, e la perpendicolare BD, e ſarà (*d*) nel triangolo ottuſiangolo FEB il quadrato di FB uguale ai quadrati di FE, EB, ovvero di FE, EI, cioè (*e*) al quadrato di FI, inſieme col rettangolo di FE in ED, ovvero di EG in ED preſo due volte. Similmente ancora nel triangolo EGB ſarà il quadrato di EB uguale ai quadrati di GB, EG inſieme col rettangolo di EG in GD preſo due volte, ed aggiunto di comune il quadrato di EG, ſaranno i due quadrati di EB, EG, ovvero di EI, EG, cioè il quadrato di GI, uguale al quadrato di GB inſieme col quadrato di EG preſo due volte, ed il rettangolo di EG in GD preſo due volte, cioè (*d*) 31. *di qu.* (*e*) 20. *di qu.*

insieme col rettangolo di EG in ED preso due volte; dunque il quadrato di EB è uguale al quadrato di FI col rettangolo di EG in ED preso due volte; ed il quadrato di GB insieme con l'istesso rettangolo di EG in ED preso due volte è uguale al quadrato di GI; e però tolto di comune il rettangolo, resteranno i quadrati delle due FB, BG uguali ai quadrati delle due FI, IG, e poichè si proveranno ancora i quadrati delle due FH, GH uguali agli stessi quadrati di FI, IG, saranno sempre i quadrati delle due FH, HG, uguali ai quadrati delle due FB, BG.

# LIBRO VIII.

## *Dei Poligoni regolari, loro formazione e misura.*

SE ragguardevoli sono le proprietà, che competono alle figure simili per essere in quelle solamente gli angoli uguali, ed i lati proporzionali, incomparabilmente più nobili sono quelle, che si ritrovano nelle figure, o poligoni regolari, i quali oltre all'avere tutti gli angoli uguali, ed essere perciò simili, hanno ancora i lati fra loro uguali, onde equiangoli sono, ed insieme equilateri, ed a riguardo appunto di questa costante egualità dei lati insieme e degli angoli, si chiamano *regolari*. Dopo aver dunque trattato nel passato Libro delle figure simili, parlerò nell'ottavo, che segue, di tutti i poligoni regolari, dimostrando le loro proprietà, e di quelli singolarmente, che si possono descrivere dentro, ovvero d'intorno al dato circolo, e finalmente del circolo istesso poligono, e figura più nobile e maravigliosa di tutte l'altre; esponendo le proprietà singolari, che gli competono, e la misura di tutto, o di qualsivoglia sua parte, ed abbracciando così non solamente quello, che dimostrò Euclide nel suo quarto Libro, ed in qualche proposizione ancora del dodicesimo, ma varie proposizioni altresì, che con infinita gloria e felicità ritrovate furono da Pappo ed Archimede, benchè dimostrate fossero con metodo infinitamente più lungo e difficile, come potrebbe conoscersi dal loro confronto.

# DEFINIZIONI.

I.

Figura, o poligono *regolare* è quello, nel quale ſono tutti gli angoli, e lati uguali.

II.

I poligoni pigliano il loro nome dal numero dei loro lati: come *triangolo* diceſi quello di tre, *quadrato* di quattro, *pentagono* di cinque, *eſagono* di ſei, *decagono* di dieci lati &c.

III.

Poligoni *ſimili* ſono quelli, che hanno egual numero di lati, o l'iſteſſo nome.

IV.

Eſſendo il poligono inſcritto, o circoſcritto al circolo, le linee rette IA, IB, IC, che ſi tirano dal centro agli angoli del poligono, ſi dicono *raggi*; e la retta IH, che ſi tira dal centro perpendicolare ſopra di un lato AB, diceſi *perpendicolare*, o *cateto*.

V.

Il *perimetro*, o *contorno* della figura, o poligono ſono tutti inſieme i lati, che formano la figura, o poligono: come nei poligoni rettilinei le linee rette, e le circonferenze nei circoli.

VI.

Figure, o poligoni *iſoperimetri* ſono quelli che hanno ugual perimetro, o contorno; ovvero quelli, nei quali l'eſtenſione, o lunghezza di tutti i lati inſieme è uguale.

VII.

Allora ſi dice un poligono *inſcritto* nel circolo, quando con tutti i ſuoi angoli tocca la circonferenza; ed allora diceſi *circoſcritto*, quando con tutti i ſuoi lati tocca l'iſteſſa circonferenza del circolo.

VIII.

VIII.

*Settore* del circolo è una porzione di circolo compresa da due raggi, e dell' arco segato, e contenuto dagl' istessi raggi.

IX.

*Settori simili* sono quelli, che comprendono angoli uguali, o sono porzioni simili dei loro cerchj.

X.

Una linea retta si dice *applicata* nel circolo, quando colle sue estremità tocca, o sega la circonferenza; onde nel circolo non può adattarsi linea retta maggiore del diametro; e però nel circolo ABCD si applicherà una retta uguale a qualsivoglia retta X minore del diametro, se presa nel diametro la parte AF uguale ad X, e descritto l'arco BF si tiri la AB, che sarà uguale alla AF, ovvero alla X. Fig. 72. 73.

# PROPOSIZIONI.

## I.

*NEl dato circolo* ABC *descrivere un triangolo equilatero.*

Tirisi il diametro BD per il centro G, e dividasi in mezzo raggio GD nel punto E, per il quale si tiri perpendicolare all' istesso raggio la corda AC, e sarà questa il lato del triangolo equilatero, del quale gli altri lati saranno AB, BC.

Perchè nei triangoli GEC, DEC i lati GE, EC si pongono uguali ai lati DE, EC, e gli angoli contenuti GEC, DEC sono retti ed uguali, sarà l'angolo EGC uguale all' angolo EDC (*a*), e perciò, siccome l' angolo BGC è doppio dell' angolo BDC, ovvero EDC (*b*), sarà anche doppio dell' angolo DGC; ma per essere i triangoli AEG, CEG uguali (*c*) ed in con-

(*a*) 12. III.
(*b*) 9. V.
(*c*) 1. V.

seguenza anche gli angoli AGE, CGE uguali; l'angolo AGC è doppio dell'angolo DGC; dunque gli angoli BGC, AGC saranno uguali fra loro: e perchè nell' istessa maniera si proverà, che l'angolo BGA è uguale all' angolo AGC, saranno uguali gli angoli BGA, AGC, CGB; onde (a) gli archi BA, AC, CB, ed i lati AB, AC, CB saranno uguali fra loro, ed il triangolo ABC sarà equilatero.

(a) 13. V.

II.

Donde appariſce, *che il lato del triangolo equilatero ſempre divide in mezzo il raggio, che lo ſega perpendicolarmente.*

III.

E perchè la retta CD, che ſega in mezzo l'arco ADC, ovvero ſega e contiene la ſeſta parte del circolo, ſi è dimoſtrata uguale al raggio GC, *ſarà il lato dell' eſagono deſcritto nel circolo ſempre uguale al raggio dell' iſteſſo circolo.*

IV.

Si potrà dunque *deſcrivere l'eſagono nel dato circolo.*

(b) 16. V. Se ſi divida in mezzo (b) l'arco del triangolo ADC, ovvero ſe ſi applichi alla circonferenza la retta CD uguale al raggio GC.

V.

Fig. 72. *Deſcrivere nel dato circolo* ABCD *il quadrato.*

Si tirino per il centro E i diametri AC, BD, che ſi ſeghino ad angoli retti, e ſi congiunga AB, BC, CD, DA. Perchè i quattro angoli intorno al centro ſono retti ed uguali, saranno (c) uguali le rette AB, BC, CD, DA; siccome gli angoli ABC, BCD, CDA, DAB, che ſono deſcritti nei ſemicircoli, saranno retti

(c) 13. 14. V.

ti (*a*), e perciò il quadrilatero ABCD sarà quadrato. (*a*) 11. V.

VI.

*Descrivere nel dato circolo* A B C D *il pentagono.* Fig. 74.

Dividasi il raggio GA in estrema e media ragione nel punto F (*b*), e prolungato il raggio AG in L, pongasi la retta, o corda AE uguale al segmento maggiore GF, e tirisi l'EG ed EF. Perchè AG a GF sta come GF ad FA, sarà GA ad AE come AE ad AF, e però i triangoli GAE, EAF, che intorno all'angolo GAE comune ed uguale hanno i lati proporzionali, saranno simili (*c*), onde l'angolo AFE sarà uguale all'angolo GEA, ovvero (*d*) GAE, e l'angolo AEF uguale all'angolo AGE; e perciò, siccome l'angolo GEA è doppio dell'angolo AEF per essere GE ad EA come GF ad FA, ed in conseguenza (*e*) diviso in mezzo l'angolo GEA, anche l'angolo AFE, ovvero GAE sarà doppio dell'angolo AGE; ma l'angolo LGE è doppio dell'angolo GAE (*f*), dunque l'angolo IGE sarà quadruplo dell'angolo AGE, e l'arco LDE quadruplo dell'arco EA, onde l'arco EA sarà la quinta parte della mezza circonferenza AEDL, e perciò la decima parte di tutta la circonferenza; e la retta EA sarà il lato del decagono inscritto nel dato circolo; onde preso l'angolo AGB doppio dell'angolo AGE, però l'arco AE doppio dell'arco AE, e congiunta la AB sarà la retta AB il lato del pentagono, che si descrive nel dato circolo ABCDE.

(*b*) 30. di qu.

(*c*) 3. VII.

(*d*) 16. III.

(*e*) 28. VI.

(*f*) 9. V.

VII.

*Il quadrato della retta* BC *lato del pentagono è sempre uguale ai quadrati delle rette* BG, CK *lati dell'esagono e decagono descritti nell'istesso circolo.*

Ti-

Tirisi la retta GI, che divida in mezzo, e ad angoli retti la CK lato del decagono, e congiunta la OK sarà (*a*) il triangolo equicrure BKC, simile al triangolo equicrure COK, e però sarà BC a CK come CK a CO, onde il quadrato di CK sarà (*b*) uguale al rettangolo di BC in CO. Similmente ancora, perchè i quattro angoli del quadrilatero GCKB sono uguali a' quattro retti (*c*) e l'angolo BGC è la quinta parte di quattro retti, saranno i tre angoli GCK, CKB, KBG, ovvero i quattro angoli GCK, CKG, GKB, KBG uguali a' quattro quinti di quattro retti; ed essendo tutti fra loro uguali (*d*), sarà l'angolo KBG la quinta parte di quattro retti, e perciò uguale all'angolo BGC; ma l'angolo KBC è uguale all'angolo IGC per esser l'uno (*e*) e l'altro (*f*) metà dell'angolo KGC, dunque l'angolo rimanente CBG sarà uguale all'angolo rimanente BGO, e però il triangolo equicrure BGC sarà simile al triangolo equicrure BOG, onde (*g*) sarà BC a BG come BG a BO, ed il quadrato di BG sarà (*b*) uguale al rettangolo di BC in BO; ma il quadrato di CK si è dimostrato uguale al rettangolo di BC in CO, dunque i quadrati delle BG, CK saranno uguali ai rettangoli di BC in BO, e di BD in CO, cioè (*i*) al quadrato di BC.

(*a*) 1. VII.
(*b*) 19. IV.
(*c*) 18. IV.
(*d*) 16 III.
(*e*) 10. V.
(*f*) 13. V.
(*g*) 1. VII.
(*b*) 19. VI.
(*i*) 24. VII.

## VIII.

*Se al lato del decagono* AE *si aggiunga la* EM *uguale al lato dell'esagono, o al raggio* EG, *sarà tutta la retta* AM *divisa in estrema e media ragione nel punto* E.

Poichè i lati GE, EM si pongono uguali, saranno (*k*) uguali gli angoli EGM, EMG, e però (*l*) l'angolo esteriore AEG sarà doppio dell'angolo interiore EGM, ed essendo egli doppio ancora dell'angolo AGE (*m*), saranno uguali gli angoli AGE, EGM, ed uguali ancora

(*k*) 16. III.
(*l*) 12. IV.
(*m*) 3. di qu.

gli

gli angoli AGM, GAM, ed i lati MG, MA onde sarà MG a GA, ovvero MA ad ME, come ME ad AE.

IX.

*Se* dunque *una linea sia divisa in estrema e media ragione, e la sua porzione minore sia il lato del decagono, l' altra porzione maggiore sarà il lato dell' esagono, e se la parte maggiore sia lato dell' esagono, l' altra porzione minore sarà il lato del decagono, che ci descrivano nell' istesso circolo.*

X.

*La linea* GM *sarà parallela ad* FE; e però volendo *prolungare la data retta* AE, *ficchè resti divisa in estrema e media ragione*, basta dividere in quella ragione qualsivoglia retta AG in F, e congiunta la FE tirargli la parallela GM.

XI.

E però *se il raggio del circolo* AE *si prolungasse finchè la retta* AF *fosse divisa in estrema e media ragione, la retta* EF *sarebbe il lato del decagono, e la retta* BF, *il di cui quadrato uguaglia i quadrati di* BE, EF (*a*) *sarebbe il lato del pentagono descritto nell' istesso circolo.* Fig. 72. (*a*) 7. di qu.

XII.

*Descrivere nel dato circolo il quintidecagono, o poligono regolare di quindici lati.* Fig. 77.

Descrivasi, o si adatti nel dato circolo (*b*) dall'istesso punto M il lato del triangolo equilatero MU, ed il lato del pentagono ML, e sarà l'arco MU la terza parte della circonferenza, cioè cinque (*b*) 1. 6 di qu.

par-

parti delle quali l' intera circonferenza è quindici, e l'arco M L quinta parte della circonferenza sarà tre dell' istesse parti ; e però l' arco L U sarà due, e la sua metà L X sarà una di quelle quindici parti, cioè la quindicesima parte dell' intera circonferenza ; e però distinguendo nella circonferenza quindici parti uguali ad L X, e tirando le corde fra loro uguali, sarà descritto il quintidecagono.

## XIII.

Fig. 75. *Intorno al dato circolo descrivere qualsivoglia dei sopraddetti poligoni regolari.*

Debbasi descrivere per esempio un esagono. Intendasi prima descritto nel dato circolo l'esagono che tocchi la circonferenza nei punti G, H, Z; e però faccia uguali gli archi GH, HZ, e per i punti, G, H, Z si tirino le tangenti del circolo, che concorrano insieme nei punti A, B, C, D, E, F, e sarà descritto intorno al circolo l'esagono. Si tirino dal centro I ai punti del contatto G, H le rette IG, IH, e le rette IA, IB, IC, e saranno tanto i quadrati delle due IG, GB, quanto i quadrati delle due IH, HB (a) 20. VII. uguali all'istesso quadrato della IB (a), e perciò uguali fra loro, onde essendo il quadrato del raggio IG uguale al quadrato del raggio IH, sarà anche il quadrato della GB uguale al quadrato della HB, e la retta GB uguale alla retta HB, (b) 3. II. onde (b) saranno uguali i triangoli IGB, IHB, e l'angolo GIB uguale all'angolo HIB, e l'angolo GBI uguale all' angolo HBI ; e perciò tutto l' angolo GIH doppio dell' angolo HIB, e l'angolo GBH doppio dell'angolo HBI: nella stessa maniera si proverà la retta ZC uguale alla retta CH, e l'angolo HIZ doppio dell'angolo HIC, e l'angolo HCZ doppio dell'angolo HCI; ma l'angolo GIH è uguale all'angolo HIZ, poichè posano sopra gli archi uguali (c) 13. V. GH, HZ (c), dunque anche gli angoli HIB, HIC,

HIC, che ſono le loro metà, ſaranno uguali; e perciò nei triangoli CIH, BIH eſſendo il lato IH comune, e gli angoli BIH, CIH uguali, ed uguali ancora gli angoli retti IHB, IHC, ſaranno anche uguali gli angoli IBH, ICH, e perciò i loro doppj, cioè gli angoli GBH, HCZ ſaranno uguali fra loro; ed eſſendo uguali le rette BH, HC, e per la ſteſſa ragione le CZ, ZD, ſaranno le rette BC, CD doppie delle rette HC, CZ: ma le rette HC, CZ ſi ſono provate uguali, dunque anche uguali ſaranno i lati BC, CD, e perchè ſimilmente ſi dimoſtreranno uguali tutti gli altri lati ed angoli del poligono ABCDEF, ſarà queſto il poligono regolare, che ſi doveva deſcrivere intorno al dato circolo.

## XIV.

*Intorno a qualſivoglia poligono regolare* KLMNOP *deſcrivere un circolo.* Fig. 76.

Dividanſi in mezzo gli angoli uguali KLM, LMN con le rette LU, MU, che ſi incontrino inſieme nel punto U, dal quale ſi tirino le rette UN, UO, UP, UK. Perchè nei triangoli KLU, MLU i lati KL, ML ſono uguali, il lato LU è comune, ed uguali ſono gli angoli contenuti KLU, MLU, ſarà la (a) baſe KU uguale alla baſe MU, e l'angolo LMU uguale all'angolo LKU; e ſiccome l'angolo LMN era diviſo in mezzo dalla retta MU, così l'angolo uguale LKP ſarà diviſo in mezzo dalla retta KU, onde ſi proverà anche la retta UP uguale alla retta UL, e così per ordine tutte le rette UK, UP, UO, UN ſi proveranno fra loro uguali; onde facendo centro in U, e circonferenza in qualſivoglia punto K, il circolo paſſerà per tutti i punti K, L, M, N, O, P, ovvero ſarà deſcritto intorno al poligono dato.

(a) 12. III.

## XV.

XV.

*Il poligono regolare ha l' istesso centro, e l' istesso raggio, che il circolo circonscritto*, onde si potrà *ritrovare il centro del poligono dato*.

O circonscrivendogli il circolo, e ritrovandone il centro; ovvero dividendo in mezzo due angoli del poligono; poichè si è dimostrato, che tutti i raggi, che si tirano dal punto U, nel quale si segano le due rette LU, MU, sono uguali, ed il punto U è il centro del circolo circonscritto.

XVI.

Fig.75. *Dentro qualsivoglia poligono regolare descrivere un circolo.*

Trovisi il centro I del poligono, dal quale si tirino i raggi IA, IB, IC fra loro uguali, e dividendosi in mezzo i lati AB, CB si tirino le IG, IH. Perchè nei triangoli AIG, BIG tutti i lati sono uguali, saranno anche uguali e retti gli angoli AGI, BGI, cioè l' IG sarà perpendicolare sopra l' AB, siccome si dimostrerà similmente IH perpendicolare alla BC, ed essendo AB, BC fra loro uguali, anche BG, BH saranno uguali, e per essere anche uguali gli angoli GBI, HBI, ed il lato BI comune, saranno uguali le basi, o perpendicolari IG, IH; e verificandosi lo stesso di tutte le perpendicolari tirate a tutti i lati del poligono dal punto I, facendosi centro in I, e circonferenza in G, il circolo toccherà tutti i lati del poligono, e sarà inscritto nel dato poligono.

XVII.

Fig.75. 76. *Sopra la data retta linea* AB *descrivere qualsivoglia poligono regolare.*

Intendasi un poligono regolare simile a quello che chiedesi, descritto in un circolo, dal centro del quale U si tirino i raggi UL, UM agli angoli

goli del poligono inscritto; poi facciasi sopra la data retta linea AB il triangolo equicrure AIB simile al triangolo equicrure LUM, e fatto centro in I descrivasi con i raggi IA, IB il circolo ABCDEF, nel quale per essere l'angolo AIB uguale all'angolo LUM, anche l'arco AB (a) sarà simile all'arco LM, e perciò il poligono; che coll'applicata AB si descriva dentro del circolo ABCDEF, sarà simile al poligono LMNOP. (a) Def. 5. V.

## XVIII.

*Qualsivoglia poligono regolare* KLMNOP *si può dividere in tanti triangoli fra loro simili ed uguali, quanti sono i lati dell'istesso poligono.* Fig. 76.

Trovisi il centro U del dato poligono, che sarà anche centro del circolo, che si descriva intorno al dato poligono, e tirandosi i raggi UK, UL, UM, UN, UO, UP si formino i triangoli, che abbiano per basi i lati del poligono, e però sieno altrettanti quanti son gli stessi lati. Perchè tutte le corde KL, LM, ec. ovvero tutti i lati del poligono sono uguali, saranno (b) anche tutti gli angoli intorno ad U uguali, e per essere ciascuno compreso dai lati proporzionali, che sono uguali, saranno (c) tutti i triangoli simili ed uguali fra loro. (b) 14. V. (c) 3. VII.

## XIX.

*Se i poligoni regolari* ABCDEF, KLMNOP *sieno simili, saranno i loro ragi* IB, UL, *ovvero le loro perpendicolari* IH, UQ *fra loro come i lati* BC, LM. Fig. 75. 76.

Perchè nei poligoni simili gli angoli BIC LUM sono uguali fra loro (d), anche le loro metà, cioè gli angoli BIH, LUQ saranno uguali, siccome uguali sono gli angoli (d) Def. 1. VII.

retti

(a) 15. IV. retti BHI, LQU, e però (a) i triangoli BIH, LUQ sono eguiangoli e simili, e sarà IB a BH come UL ad LQ, e permutando BI ad LU, come BH ad LQ, o BC ad LM; siccome ancora, per essere IH ad HB come UQ a QL, sarà permutando la perpendicolare IH ad UQ come HB a QL, cioè BC ad LM.

XX.

*I perimetri degli stessi poligoni sono fra loro come i raggi, o le perpendicolari.*

Poichè, essendo nei poligoni simili eguale il numero dei lati, saranno i perimetri egualmente multiplici dei loro lati; e però saranno fra loro come i loro lati, cioè come i raggi, o come le perpendicolari.

XXI.

E perchè *i poligoni simili* ABCDEF, KLMNOP sono fra loro in duplicata ra-
(b) 11. VII. gione dei loro lati BC, LM (b), *saranno altresì in duplicata ragione dei loro raggi, o perpendicolari, o perimetri.*

XXII.

Fig. 75. 79. *Qualsivoglia poligono regolare* ABC, DEF *è uguale ad un triangolo rettangolo* STZ, *del quale un lato* ST *sia uguale alla perpendicolare* IH, *e l'altro* SZ *uguale al perimetro* ABCDEF; *ovvero il poligono sarà la metà dell'intero rettangolo* STXZ.

Perchè nel poligono tirandosi dal centro I i raggi IA, IB, ec. sono tanti triangoli simili ed uguali fra loro, quanti sono i lati nel perimetro, cioè il poligono è tanto multiplice del solo triangolo BIC, quanto il perimetro ABC DEF, ovvero la retta o base SZ è multiplice del lato o base BC, sarà il poligono al triangolo come la base SZ alla base BC, ovvero come

me il triangolo STZ all'istesso triangolo BIC, onde il poligono ABCDEF, ed il triangolo STZ saranno uguali tra loro; e però siccome il triangolo STZ è la metà del retrangolo istesso, sarà la metà del rettangolo STXZ.

XXIII.

*Le circonferenze dei circoli* ANB, EIF *sono fra loro come i loro raggi* DA, DE. Fig. 80.

Poichè essendo i circoli poligoni simili d'infiniti lati, saranno le circonferenze, che sono i loro perimetri, come i raggi (*a*). (*a*) 20. *di qu.*

XXIV.

Anche *gli archi simili* ANB, EIF, per essere parti simili delle loro circonferenze (*b*), *saranno fra loro* come le intere circonferenze (*c*), cioè (*d*) *come i raggi*. (*b*) *Def.* 5. *V.* (*c*) 13. *I.*

XXV.

*Il circolo* ANB *è uguale al triangolo rettangolo* ADC, *il quale è formato dal raggio* AD, *e dalla retta* AC *uguale all'intera circonferenza* AB. (*d*) *Ant.*

Essendo il circolo poligono regolare di infiniti lati, il cui perimetro è la circonferenza, egli ancora sarà uguale al triangolo fatto dalla circonferenza, e dal raggio. (*e*) Ma, per dimostrarlo anche più chiaramente, tirisi per qualsivoglia punto E del raggio la retta EG parallela al lato, o tangente AC, e per l'istesso punto E descrivasi la circonferenza EIF, e sarà (*f*) nei triangoli ADC, EDG la AC alla EG come il raggio AD a DE, cioè (*g*) come la circonferenza ANB alla circonferenza FIF; e siccome la tangente AC ponesi uguale alla circonferenza ANB, così (*h*) la tangente EG sarà uguale alla circonferenza EIF, e così sempre; dunque raccogliendo tutte insieme le tangenti a tutte insieme le altrettante circonferenze loro corrispon- (*e*) *di qu.* (*f*) 2. *VII.* (*g*) 23. *di qu.* (*h*) *Def.* 21. *I.*

denti, cioè il triangolo compoſto dalle tangenti fra loro parallele, al circolo compoſto dalle circonferenze concentriche ſaranno come la prima tangente alla prima circonferenza, cioè uguali.

## XXVI.

*Qualſivoglia ſettore* ADB *è uguale al triangolo* ADO *fatto dal raggio* AD *e dalla retta* AO, *che ſia uguale all' arco* ANB *dell' iſteſſo ſettore.*

Il circolo al ſuo ſettore ANB ſta come l'intera circonferenza all'arco ANB, cioè per ipoteſi
(*a*) 8. *VI.* come la retta AC ad AO, cioè (*a*) come il triangolo ADC al triangolo ADO; dunque, ſic-
(*b*) *Ant.* come il circolo è uguale al triangolo ADC (*b*) così il ſettore ſarà uguale al triangolo ADO.

## XXVII.

*Due ſettori dell' iſteſſo, o di uguali circoli ſono fra loro come i loro archi.*

Poichè avendo l'iſteſſo, o uguali raggi, ſaranno i triangoli ad eſſi ſettori uguali, di ugual'altezza, e perciò ſaranno come le loro baſi, cioè come gli archi degli ſettori.

## XXVIII.

*I circoli* ANB, EIF *ſono in duplicata ragione de' loro raggi* DA, DE, *ovvero come i quadrati degli ſteſſi raggi* DA, DE.

Imperocchè i circoli ſono poligoni di infiniti lati, e la perpendicolare a qualſivoglia di quegli infiniti lati è l'iſteſſo raggio DA, DE; onde, a
(*c*) 20. *di qu.* ſimiglianza degli altri poligoni (*c*) ſaranno in duplicata ragione, o come i quadrati dei loro raggi.

(*d*) 23. *di qu.* *Altrimenti* per eſſere la circonferenza ANB al ſuo raggio DA come la circonferenza ANF al
(*e*) 3. *VII.* ſuo raggio DE (*d*), ſarà nei triangoli CAD,
(*f*) 10. *VII.* GED, CA ad AD come GE ad ED; e però (*e*) i triangoli ſaranno ſimili, e (*f*) in duplicata ra-

ragione dei lati omologhi DA, DB, onde anche i circoli, che ſono uguali ai triangoli, ſaranno fra loro in duplicata ragione, ovvero come i quadrati dei loro raggi DA, DE.

XXIX.

Anche *i ſettori ſimili* ANBD, EIFD, *o che comprendono l' iſteſſo angolo* ADB, *ſono in duplicata ragione dei loro raggi.*

Poichè eſſendo i detti ſettori parti ſimili dei loro circoli, ſaranno (*a*) fra loro come gli ſteſſi circoli, cioè (*b*) in duplicata ragione dei raggi. Queſto potrebbeſi ancora dimoſtrare dall'eſſere fra loro ſimili i triangoli ADO, EDM uguali ai dati ſettori, e però in duplicata ragione dei raggi o lati DA, DE.

(*a*) 13.
(*b*) *Ant.*

XXX.

Che *ſe i dati ſettori* ANBD, EID *foſſero diſſimili, ſarebbero in ragion compoſta della ragione duplicata dei loro raggi* DA, DE, *e della ragione diretta, o ſemplice degli archi* ANB, EI; *o degli angoli* ADB, EDI.

Nel circolo del minor ſettore EID facciaſi il ſettore EIFD ſimile al ſettore ANBD, e ſarà (*c*) il ſettore ANBD al ſettere EID in ragione compoſta del ſettore ANBD al ſettore EI FD, cioè (*d*) duplicata del raggio DA a DE, e dell'iſteſſo ſettore EIFD al ſettore EID, cioè dell'arco EIF all'arco EI.

(*c*) 1. *II.*
(*d*) *Ant.*

XXXI.

*Il circolo* FGDH *alla zona, faſcia, o armilla inſcritta ſta come il quadrato del raggio* OG *al rettangolo delle parti* HB, BG; *ed il circolo* ABIC *alla ſteſſa zona a sè circonſcritta ſta come il quadrato del raggio* OB *all' iſteſſo rettangolo di* HB *in* BG.

Fig. 47. Tav. III.

Il circolo FGDH è uguale al circolo ABIC insieme con la zona; ed il quadrato di OG è uguale al quadrato dell' OB insieme col rettangolo delle parti HB, BG (*a*); dunque, essendo il circolo FGDH al circolo ABIC, come il quadrato della OG al quadrato della OB (*b*), sarà per conversione di ragione il circolo FGDH alla zona come il quadrato della OG al rettangolo di HB in BG; ovvero dividendo sarà la zona al circolo inscritto ABIC come il rettangolo di HB in BG al quadrato di OB, ed invertendo il circolo alla zona come il quadrato al rettangolo.

(*a*) 26. *VII.*
(*b*) 28. *di qu.*

## XXXII.

Fig. 46. 47. *Qualsivoglia circolo* ADBF *a qualsivoglia zona* FGDHCABIC *sta come il quadrato del raggio* EB *al rettangolo di* HB *in* BG.

Il circolo ADBF al circolo FGDH sta come il quadrato del raggio EB al quadrato del raggio OG (*c*), ed il circolo FGDH alla zona inscritta sta come il quadrato del raggio OG al rettangolo di HB in BG (*d*); dunque per ugualità ordinata il circolo ADBF alla zona sarà come il quadrato del raggio EB al rettangolo di HB in BG.

(*c*) 28. *di qu.*
(*d*) *Ant.*

## XXXIII.

Si potrà dunque *descrivere un circolo uguale alla data zona* FGDHCABIC.

Se trovandosi la retta X media proporzionale fra le parti HB, BG si descriva con essa come con raggio, il circolo; poichè, essendo questo circolo alla zona, come il quadrato del raggio X al rettangolo di HB in BG (*e*), siccome il quadrato della X sarebbe uguale al rettangolo di HB in BG (*f*) così il circolo ancora sarebbe uguale alla zona.

(*e*) 31. *di qu.*
(*f*) 19. *VI.*

## XXXIV.

XXXIV.

*Se nel triangolo rettangolo* ABC *si tiri la retta* BD, *avrà la retta* CA *alla* AD *maggiore ragione, che l'angolo* CBA *all'angolo* DBA. Fig. 78.

Il triangolo BDC è maggiore del settore BDF; e però il triangolo BDC al settore BDE avrà maggior ragione di quel che abbia il settore BDF al settore stesso BDE (*a*); ma il settore BDE è maggiore il triangolo BDA, dunque la ragione del triangolo BDC al triangolo BDA sarà maggiore della ragione dell'istesso triangolo BDC al settore BDE (*b*); ma la ragione del triangolo CBD al settore BDE era maggiore della ragione del settore BDF al settore BDE, dunque molto più la ragione del triangolo BDC al triangolo BDA sarà maggiore della ragione del settore BDF al settore BDE; ma il triangolo BCD sta al triangolo BDA, perchè hanno la stessa altezza, come CD a DA, (*c*), e il settore BFD sta al settore BDE perchè hanno il medesimo raggio, come l'arco FD all'arco DE (*d*), cioè come l'angolo FBD all'angolo DBE; dunque la ragione di CD a DA sarà maggiore della ragione dell'angolo FBD all'angolo BDA, e componendo la ragione di CA ad AD sarà maggiore della ragione dell'angolo CBA all'angolo DBA.

(*a*) *Ass.* 2. *I.*
(*b*) *Ass.* 6. *I.*
(*c*) 8. *VI.*
(*d*) 27. *VIII.*

XXXV.

*Dei poligoni isoperimetri* ABCDEF, KLMN *è maggiore quello, che ha più lati.*

Pongasi per esempio il poligono ABCDEF essere esagono, ed il poligono isopimetro KLMN essere pentagono, e dividansi in mezzo i lati BC, KN con le perpendicolari IH, OQ, e pongasi PR uguale a BH. Perchè il lato KN, e la quinta parte di tutto il perimetro, e l'angolo

KON è la quinta parte de' quattro angoli retti collocati d'intorno al centro O, ed in conseguenza il lato KN è a tutto il perimetro come l'angolo KON a i quattro angoli retti intorno ad O, e tutto il perimetro KLMN, ovvero il perimetro uguale ABCDEF, sta al lato BC come i quattro angoli retti intorno ad O, ovvero ad I, all'angolo BIC, sarà per egualità ordinata il lato KN al lato BC come l'angolo KON all'angolo BIC, e pigliando la metà, il lato KP sarà al lato BH, ovvero a PR, come l'angolo KOP all'angolo BIH; ma il lato KP a PR ha maggiore ragione dell'angolo KOP all'angolo ROP (*a*), cioè l'angolo ROP è un poco maggiore per essere proporzionale pongasi dunque l'angolo SOP ficchè KP a PR sia come l'angolo KOP all' angolo SOP; ma come KP a PR, ovvero KP a BH, così era l'angolo KOP all'angolo BIH, dunque l'angolo SOP è uguale all'angolo BIH: tirisi dunque per R la RT parallela ad SO, e sarà nel triangolo RTP l' angolo RTP uguale all' angolo SOP, ovvero all' angolo BIH, l' angolo retto RPT uguale all'angolo retto BIH, e la base RP uguale alla base BH, e perciò anche il lato, o perpendicolare PT sarà (*b*) uguale al lato, o perpendicolare HI, e però la perpendicolare HI, del poligono di più lati sarà maggiore della perpendicolare PO del poligono isoperimetro di meno lati; ma il poligono ABCDEF è uguale al triangolo fatto dalla perpendicolare, e dal suo perimetro (*c*); ed il poligono KLMNO è uguale al triangolo fatto dalla sua perpendicolare, e dall'istesso suo perimetro, dunque il poligono ABCDEF è al poligono KLMNO come i triangoli stessi, i quali, per avere uguali basi, sono come l'altezze, o perpendicolari (*d*); il triangolo dunque, o poligono ABCDEF, che ha la perpendicolare maggiore

(*a*) *Ant.*

(*b*) 11. *III.*

(*c*) 25. *di qu.*

(*d*) 11. *VII.*

HI,

HI, sarà maggiore del triangolo o poligono KLMN, che ha perpendicolare minore PO.

## XXXVI.

*Il circolo è il poligono maggiore di tutti gli altri poligoni isoperimetri.*

Poichè dei poligoni isoperimetri quello è sempre maggiore, che è di più lati (*a*), il circolo, che è poligono d' infiniti lati, sarà maggiore di tutti gli altri. (*a*) *Ant.*

*Fine della Geometria Piana.*

# LIBRO IX.

## *Delle ſuperficie e ſezioni dei ſolidi, loro proprietà e miſure.*

L'Ultimo genere delle grandezze contiene i corpi, nei quali ſi trovano tre dimenſioni di lunghezza e larghezza inſieme, ed altezza; onde avendo finora nei paſſati Libri parlato delle linee e figure, che formano i primi due generi di quantità continua, deveſi adeſſo per l'ordine già ſtabilito trattare dei corpi medeſimi, e delle varie loro proprietà e miſure. E perchè negl'iſteſſi corpi ſi poſſono conſiderare o le ſuperficie, termini, o contorni, che gli contengono; ovvero la mole, o ſolidità, che in eſſi ritrovaſi, ed è contenuta dalla ſuperficie medeſima, parlerò prima nel Libro nono delle ſuperficie dei ſolidi, loro formazione, e miſura; ſiccome ancora di quelle figure, o ſezioni, che ſi deſcrivono ſull'iſteſſa ſuperficie dei corpi; per poi trattare nell'altro Libro, che ſegue, della mole e ſolidità de' corpi, paragonendoli fra loro. E benchè piccolo ſia per eſſere il numero delle Propoſizioni di queſti Libri, abbracceranno però le più nobili ed illuſtri proprietà dei ſolidi, che furono dimoſtrate da Euclide nell'XI. e XII. Libro; ſiccome alcuni Teoremi di Pappo, Sereno, del Torricelli, e ſingolarmente tutta la dottrina dell'incomparabile divino ingegno di Archimede ne' due Libri della Sfera, e del Cilindro; i quali per l'ammirabili e belliſſime proprietà, che contengono, furono dall'Autore giudicati i più nobili fra gli tanti maravigliosi ſuoi Libri, e degni perciò d'eſſere eſpreſſi con la sfera, e col cilin-

lindro; ch' egli volle essere collocata sopra del suo sepolcro. Spero contuttociò che la brevità medesima, di cui mi servo, non sia per togliere in parte alcuna, anzi piuttosto per accrescere la facilità e la chiarezza, che si richiede; e che, siccome questa ultima parte di Geometria, che *Stereometria*, o misura dei solidi chiamar si suole, supera tutte l'altre per la bellezza, utilità, ed ampiezza; così la maniera ancora di dimostrarla, singolarmente col metodo degl' Indivisibili, sia per essere assai più chiara e naturale di quella, che per l'addietro solevasi adoperare.

# DEFINIZIONI.

## I.

*Solido*, ovvero *corpo* dicesi quello, nel quale sono tre dimensioni, lunghezza, larghezza, ed insieme altezza, o profondità: come per esempio nel solido AH vi è la lunghezza AD, la larghezza AB, l'altezza, o profondità AF. Fig. 19.

## II.

Quindi i solidi sono compresi da più superficie piane, ovvero da una sola superficie curva; le quali superficie si dicono essere il *termine*, *perimetro*, o *contorno* del solido istesso.

## III.

*L'altezza* dei solidi è la linea retta, che dalla loro cima, ovvero da qualsivoglia punto del piano superiore tirisi perpendicolare sopra la base, o piano opposto: come le rette YX, OU; e però i solidi si dicono essere di uguale altezza, quando le stesse perpendicolari sieno fra loro uguali, come se i solidi fossero contenuti dai piani paralleli. Fig. 7. e 6.

## IV.

IV.

Ed allora si dice, che una linea retta EX è
Fig. 5. perpendicolare sopra la base, o piano opposto ABCD, quando ella sia perpendicolare, o faccia gli angoli retti con tutte quelle rette, AC, BD, FU, che essendo poste, o tirate nell'istesso piano, o base la tocchino nel punto X.

V.

Fig. 5. La piramide è un solido contenuto da tre almeno, o da più triangoli piani AEB, BEC, CED, DEA, che posano sopra i lati di un poligono, o figura rettilinea ABCD, ed insieme concorrono, o terminano in un punto solo E.

VI.

Quel punto E, nel quale tutti i piani, o triangoli concorrono, chiamasi *vertice*, *cima*, *apice*, o *punta* della piramide; il poligono ABCD *base*; ed i triangoli AEB, BEC, CED, DEA *lati*, o *facce* della piramide.

VII.

La piramide piglia il suo nome dalla sua base, o poligono, sopra cui posa, come *triangolare*, *quadrata* ec.

VIII.

Fig. 4. Il *prisma* è un solido, nel quale i piani, superficie, o facce opposte ABC, DEF sono parallele ed uguali; ma gli altri piani o superficie, che lo circondano, AF, FB, BD sono parallelogrammi.

IX.

Fig. 17. 18. Il *parallelepipedo* è un prisma, nel quale tutti i piani sono parallelogrammi.

X.

Fig. 19. Il *cubo* è un parallelepipedo, nel quale tutti i lati, o piani sono quadrati ed uguali; onde il cubo è contenuto da sei quadrati uguali fra loro, ed ha tutti gli angoli retti.

X I.

Il *cono* è un ſolido contenuto da un circolo come baſe, e da una curva ſuperficie *conica*, la quale ſi genera, o ſi deſcrive da una linea retta AE, che girando, o ravvolgendoſi intorno al punto immobile E come vertice, rade l'intera circonferenza del circolo, o baſe ABCD finchè ritorni al punto, dal quale s'era partita. Fig. 10.

X I I.

Il punto immobile E diceſi *vertice*, *punta*, *cima*, *apice* dell'iſteſſo cono; la retta EX, che congiunge l'apice E col centro X della baſe, diceſi *aſſe*; e la retta AE, che congiugne il vertice E con qualſivoglia punto A della circonferenza, diceſi *lato*.

X I I I.

Se l'aſſe EX cada obliquamente ſopra la baſe, il cono diceſi *obliquo*; ma, ſe egli cada perpendicolarmente ſopra di quella, diceſi *retto*; onde può concepirſi, che il cono retto ſi generi dal triangolo rettangolo AXE, che ſi rivolga, o giri intorno al lato immobile XE, e con l'altro lato XA, come con raggio, deſcriva il circolo della baſe.

X I V.

Il cilindro è un ſolido contenuto da due circoli uguali e paralleli ABCD, GHIK, e dalla curva ſuperficie *cilindrica*, la quale ſi genera, ſi produce, o deſcriveſi da una linea retta GA, che con moto equabile, ed uniforme rade ambedue le circonferenze dei circoli uguali, e paralleli. Fig. 8.

X V.

Quei circoli paralleli ed uguali ſi dicono *baſi* dell'iſteſſo cilindro; la retta XY, che congiugne i loro centri, diceſi *aſſe*; la retta AG, che radendo le circonferenze deſcrive la ſuperficie curva, diceſi *lato*.

X V I.

XVI.

Se l'asse XY sia obliquo sopra dei circoli, il cilindro dicesi *obliquo*; ma se egli cada perpendicolarmente sopra di loro, il cilindro chiamasi *retto*; onde può concepirsi che il cilindro retto si generi da un rettangolo AXYG, che si rivolga, o giri intorno al lato immobile XY, e con gli altri lati XA, YG come raggi descriva i circoli paralleli ed uguali ABCD, GHIK.

XVII.

La *sfera* è un solido rotondo compreso da una sola superficie *sferica*, la quale si genera, o si produce dalla circonferenza di un circolo, che si ravvolge intorno al suo diametro.

XVIII.

Onde, siccome tutti i punti della circonferenza sono sempre ugualmente lontani dal centro del circolo, così tutti i punti della superficie sferica saranno sempre ugualmente lontani dal centro istesso della sfera.

XIX.

Il diametro di questo circolo si disse *asse* della sfera, ed il centro del circolo *centro* della sfera.

XX.

Se la sfera dividasi in parti uguali con un piano, che passi per il centro, ciascheduna di quelle parti chiamasi *emisfero*, o *mezza sfera*.

XXI.

Che se la sfera dividasi in parti disuguali, ed il piano, che la sega, non passi per il suo centro, l'una e l'altra di quelle parti chiamasi *porzione*, o *segmento sferico*.

XXII.

Fig. 13. *Settore sferico* dicesi il solido, che è generato, o descritto da un settore di circolo ABCO, che si rivolge intorno al suo asse OB; onde è composto di un segmento sferico descritto dal segmento ABC, e d'un cono descritto dal triangolo OAG.

XXIII.

XXIII.

*Prismi*, piramidi, cilindri, e coni *simili* sono quelli, ne' quali le lunghezze, larghezze, ed altezze sono proporzionali; e però le basi sono fra loro come i quadrati dell'altezze.

XXIV.

*Sezioni del solido* si dicono quelle figure, che si descrivono nella superficie del solido quando il solido istesso, ovvero la sua superficie, o contorno è segato da un piano traverso: come le figure ABC, GHI, DEF. Fig. 4.

# PROPOSIZIONI.

## I.

*LA superficie, o i lati dell' istesso triangolo* AGB, *o quadrilatero* AGBF, *non possono ritrovarsi in diversi piani; ma devono essere tutti nell' istesso piano, o nella medesima superficie piana* AGBF. Fig. 1.

Imperciochè, se la parte AGE fosse in un piano, e la parte GBE fosse in un altro pianno diverso, anche le parti della stessa linea retta AEB non sarebbero nell'istesso piano, il che è impossibile.

## II.

*Per le due date linee rette* AB, CD, *che concorrano insieme, o si seghino nel punto* E, *si può stendere un piano.*

Imperocchè presi in qualsivoglia maniera i punti F, G, e tirate le rette AG, GB, BF, FA il triangolo AEG deve essere nell'istesso piano, nel quale sono i lati AE, GE; ma nell'istesso piano, nel quale sono le rette AE, GE, sono altresì le intere rette GF, AB, ed in conseguen-

za

za ancora i triangoli FEA, FEB, BEG; dunque tutti i quattro triangoli posti intorno ad E, ovvero tutto il quadrilatero AGBF è nell' istesso piano, che passa, o stendesi per le date rette AB, CD.

III.

Fig. 2. *La linea* EF *comune sezione di due piani* AB, CD *è linea retta.*

Imperciocchè, se non fosse, potrebbesi dai punti E, F tirare nel piano AB la linea retta EGF; e nell'altro piano CD la linea retta EIF, sicchè dagl'istessi punti E, F si tirerebbero due linee rette diverse EGF, EIF, il che è impossibile (*a*).

(*a*) *Def.* 5. *III.*

IV.

Fig. 5. *Se la linea retta* EX *sia perpendicolare all' una e all'altra delle due rette* AC, BD, *le quali si taglino insieme, e la tocchino nel punto* X, *ella sarà perpendicolare ancora sopra del piano, in cui si trovano l' istesse rette.*

Si taglino le quattro rette XA, XB, XC, XD fra loro uguali, e si tirino le AB, BC, CD, DA, EA, EB, EC, ED, e finalmente tirata per X qualsivoglia retta FU si congiunga EF, EU; e sarà (*b*) il triangolo AXB uguale al triangolo CXD, siccome ancora il triangolo UXB al triangolo FXD; la retta AB alla retta CD, e la retta UB alla retta FD. Perchè dunque nei triangoli AXE, CXE i lati AX, XE sono uguali ai lati CX, XE, e gli angoli contenuti sono retti ed uguali, sarà la base AE uguale alla base CE; e per l'istessa ragione anche la base BE uguale alla base DE, e però nei triangoli sublimi AEB, CED, per essere anche il lato AB uguale al lato CD, sarà (*c*) l'angolo ABE uguale all'angolo CDE, ovvero l'angolo UBE all'angolo FDE; onde nei triangoli sublimi UEB, FED, essendo i lati UB,

(*b*) 12. *III.*

(*c*) 13. *III.*

UB, BE uguali ai lati FD, DE, e gli angoli contenuti uguali, sarà la base UE uguale alla base FE, e però nei triangoli UXE, FXE saranno tutti i lati uguali, onde (*a*) anche gli angoli UXE, FXE saranno uguali e retti, e la retta EX sarà perpendicolare sopra la FU; il che verificandosi di qualsivoglia altra retta, che tirisi nel piano ABCD, e tocchi la linea EX in X, sarà (*b*) l'issesta EX perpendicolare sopra del piano ABCD.

(*a*) 13. III.

(*b*) Def. 4. di qu.

## V.

*Tirare dal punto sublime dato* E *la perpendicolare sopra del dato piano* ABCD.

Tirisi nel dato piano qualsivoglia retta DC, e sopra quella si tirino le perpendicolari EF, ed FU, e similmente sopra la FU si tiri dal punto E la perpendicolare EX, che sarà perpendicolare anche sopra del piano.

Prese le rette FC, FD fra loro uguali si tirino per X le CA, DB, e si taglino le rette XA, XB uguali ad XC, o XD; poi si congiungano i punti A, B, C, D, F, U fra loro, e col punto sublime E. Perchè nei triangoli EFD, EFC intorno agli angoli retti ed uguali EFD, EFC sono i lati EF, FD uguali ai lati EF, FC, sarà (*c*) la base ED uguale alla base EC, e però nei triangoli EXD, EXC gli angoli EXC, EXD saranno uguali (*d*); onde anche gli angoli conseguenti EXA, EXB saranno uguali (*e*), e però nei triangoli EXA, EXB sarà il lato EA uguale ad EB; e perciò nei triangoli AEU, BEU, per essere il lato EA uguale al lato EB, il lato AU uguale al lato BU, ed il lato EU comune, saranno anche uguali e retti gli angoli AUE, BUE; onde nei triangoli AEU, CEF, essendo i lati EU, UA uguali ai lati EF, FC, e gli angoli contenuti retti ed uguali, sarà (*f*) AE uguale ad EC; e però nei trian-

(*c*) 12. III.

(*d*) 13. III.

(*e*) 7. III.

(*f*) ant.

triangoli AXE, CXE gli angoli AXE, CXE saranno uguali e retti; e però la retta EX sarà perpendicolare sopra le rette FU, AC, onde (*a*) sarà perpendicolare sopra del piano ABCD.

(*a*) ant.

V I.

*Se i piani paralleli* ABC, DEF *sieno segati da quantisivoglia piani traversi* ADFC, ADEB, BEFC, *saranno le comuni sezioni* AC, DF; AB, DE; BC, EF *frà loro parallele.*

Imperocchè, se le sezioni non fossero parallele, dovrebbero prolungate concorrere insieme; il che non potrebbe accadere, se ancora gli piani stessi, nei quali si trovano le sezioni, non concorressero; il che è impossibile per essere in ipotesi i piani paralleli.

V I I.

Fig. 3. *Se le due sezioni* ED, EF *del piano* DFE *sieno parallele alle sezioni* BA, BC *d'un altro piano* ACB, *i piani medesimi* DFE, ACB *saranno paralleli.*

Poichè, se i piani non fossero paralleli, dovrebbero prolungati concorrere insieme; il che non potrebbe accadere se le sezioni ancora dei lati opposti, che si ritrovano nell'istesso piano segante, o traverso, non concorressero; il che è impossibile, per essere in ipotesi le sezioni medesime parallele.

V I I I.

Donde appariſce, che *se la retta* BE *sia perpendicolare tanto alle rette* DE, EF, *che si congiungono in* E, *quanto alle rette* AB, BC, *che si congiungono in* B, *saranno i piani* ABC, DEF *paralleli; e se i piani sieno paralleli, la retta, che cade perpendicolare sopra*

*pra di uno, sarà perpendicolare ancora sopra dell' altro.*

Poichè, se gli angoli DEB, EBA, siccome ancora gli angoli FEB, EBC sono retti, saranno (*a*) le rette DE, FE parallele alle rette, o sezioni AB, CB, e però (*b*) i piani sarebbero paralleli; e, se i piani fossero paralleli, ed in conseguenza (*c*) parallele ancora le sezioni DE, FE alle sezioni AB, CB, la retta BE perpendicolare alle due DE, FE sarebbe perdendicolare ancora alle altre due AB, CB, (*d*).

(*a*) 1. IV. (*b*) Ant. (*c*) 6. di qu. (*d*) 5. IV.

## IX.

E però dovendosi *tirare, o stendere per il dato punto* E *un piano parallelo al piano dato* ABC.

Basta tirare nel dato piano ABC in qualsivoglia maniera due rette BA, BC, e congiunta EB stendere per EB, BA, siecome ancora per EB BC un piano, e nei due piani stessi per il punto E tirare (*e*) le due rette EF, ED parallele alle due rette BC, BA; poichè il piano steso per le due rette EF, ED sarà (*f*) parallelo al piano dato ABC.

(*e*) 4. IV. (*f*) 7. di qu.

## X.

*Se le rette* AD, CF *sieno parallele, e per esse si tirino, o stendano due piani,* AE, CE, *i quali si seghino insieme, sarà la loro comune sezione* BE *parallela all' una e all' altra delle date rette* AD, CF.

La sezione BE deve essere parallela all'una, o all'altra delle due rette AD, CF; poichè, se ella non fosse parallela ad alcuna di loro, prolungata dovrebbe finalmente concorrere con l' una e l'altra di quelle, il che non potrebbe accadere se anche l'istesse linee AD, CF non concorressero insieme, il che è impossibile per essere paral-

lele. Pongasi dunque essere la sezione BE parallela alla retta AD, e sarà parallela ancora a CF; poichè altrimenti dovrebbe concorrere la retta CF con la retta BE in un punto del piano ADEB, ed il lato CF dovrebbe allora cadere, o ritrovarsi nell'istesso piano ADEB; onde allora del quadrilatero, o parallelogrammo ADFC due lati AD, DF sarebbero nel piano ADEB, e gli altri due AC, CF in un piano diverso ADFC, il che è impossibile (*a*)

(*a*) 1. *di qu.*

## XI.

*Se le due linee rette* AD, BE, *che sono nell' istesso piano, sieno parallele all' istessa retta* CF *non posta nel medesimo piano, saranno ancora parallele fra loro.*

Tirisi per la retta CF qualsivoglia piano, che seghi il piano ADEB nella retta GH. Perchè per le parallele AD, CF si sono tirati i piani ADHG, CFHG, sarà (*b*) la loro comune sezione GH parallela alla retta AD; e similmente, per essere i piani BEHG, CFHG tirati per le parallele BE, CF, sarà la loro comune sezione HG parallela alla BE; onde le rette AD, BE, che sono parallele all'istessa retta GH posta nell'istesso piano, saranno (*c*) ancora parallele fra loro.

(*b*) *Ant.*

(*c*) 8. *IV.*

## XII.

Fig. 6. *Se le rette* PQ, PR *sieno parallele ad* L M, LN, *gli angoli* QPR, MLN *saranno uguali.*

Si stenda per le due rette LM, PQ, che sono parallele, e però poste nell'istesso piano, il piano LPQM, e per le rette LN, PR parallele il piano LPRN, e pongasi (*d*) LS uguale a PQ, e tirata la QR stendasi per le due rette SQ, QR il piano SQRT, il quale, per essere le rette LP, SQ parallele (*e*) sarà la sezione TR pa-

(*d*) 4. *III.*

(*e*) 9. *IV.*

parallela ad SQ (*a*); ed essendo ancora la QR parallela ad ST, saranno (*b*) uguali le rette ST QR; e però nei triangoli LST, QPR, essendo tutti i lati uguali, sarà (*c*) l' angolo QPR uguale all' angolo SLT, ovvero all' angolo MLN. (*a*) 10. *di qu.* (*b*) 10. *IV.* (*c*) 13. *III.*

## XIII.

*Se qualsivoglia piramide triangolare* LMNO *si leghi con due piani paralleli, le due sezioni* LMN, PQR *saranno fra loro simili.*

Poichè, essendo i lati della sezione LMN paralleli ai lati corrispondenti della sezione PQR (*d*), anche gli angoli corrispondenti delle sezioni saranno uguali (*e*); e perciò le sezioni, o i triangoli LMM, PQR saranno equiangoli, e simili. (*d*) 6. *di qu.* (*e*) *Ant.*

## XIV.

Anche *le sezioni parallele* ABCD, GHIK *di qualsivoglia piramide* ABCDE *saranno simili.* Fig. 5.

Poichè gli angoli della sezione GHIK sono uguali agli angoli corrispondenti nella sezione ABCD (*f*), e d'intorno agli angoli uguali sono i lati proporzionali per essere AD a GK come AE ad EG (*g*), cioè AB a GH, e però permutando AD ad AB come GK a GH, e così sempre, onde le sezioni poligone saranno simili. (*f*) 12. *di qu.* (*g*) 2. *VII.*

## XV.

E però (*b*) *le sezioni* ABCD, GHIK *saranno fra loro come i quadrati dei lati omologhi* AD, GK; *ovvero dei lati* AE, GE; *o* AX, GZ, *ovvero dell' altezze, o perpendicolari* XE, ZE. (*b*) 10. *VII.*

## XVI.

Similmente ancora *segnandosi una prisma di qualsivoglia base con piani paralleli, le se-* Fig. 7.

*zioni* ABCDEF, GHIKLM *saranno simili ed uguali fra loro.*

Poichè qualsivoglia angolo della sezione GH IKLM sarà uguale all'angolo corrispondente del-
(*a*) 11. *di qu.* la sezione ABCDEF (*a*), e d'intorno agli angoli uguali saranno i lati proporzionali ed ugua-
(*b*) 10. *IV.* li, per essere (*b*) AB uguale a GH, e BC uguale ad HI, e così degli altri.

## XVII.

Fig. 8. *Se il cilindro* AI *sia segato dal piano trasverso* OQ *parallelo alla base, la sezione* OPQR *sarà un circolo uguale al circolo della base.*

Tirisi per la retta, o asse XY, e per qualsivoglia punto D preso nella circonferenza il piano DH, che faccia col trasverso piano OPQR la comune sezione RP parallela (*c*) al diametro della base DB; e, per essere sempre uguali e
(*c*) 6. *di qu.* paralleli i raggi DX, KY, saranno (*d*) ancora
(*d*) 10. *IV.* le rette DK, XY parallele; e però la sezione ZR, che è parallela alla sezione, XD sara (*e*)
(*e*) 9 *IV.* anche uguale all'istessa sezione, o raggio XD; onde la sezione OPQR, sarà circolo descritto dell'istesso raggio ZR, ZO, ovvero XD; ed in conseguenza uguale al circolo della base ABCD.

## XVIII.

Fig. 10. *Se qualsivoglia cono* AEC *si seghi con un piano* GI *parallelo al circolo della base, la sezione* GHIK *sarà circolo; il quale al circolo della base sarà come il quadrato del raggio* ZG *al quadrato del raggio* XA, *ovvero come il quadrato dell'altezza* EZ *al quadrato dell'altezza* EX:

Si tirino per l'asse XE, e per due punti A, D i piani, o i triangoli AEC, DEB, che facciano con i piani paralleli ABCD, GHIK le comuni sezioni AX, GZ, DX, KZ; e sarà sempre tanto AX a GZ, quanto DX a KZ co-

me

me XE ad EZ, (a), e perciò permutando AX a DX come GZ a KZ; onde, siccome i raggi AD, DX sono sempre uguali, così saranno sempre uguali le rette GZ, KZ; e però la sezione rotonda GHIK sarà circolo, il quale al circolo della base sarà (b) come il quadrato del raggio ZG al quadrato del raggio XA, ovvero come (c) il quadrato dell'altezza EZ al quadrato dell'altezza EX. (a) 2. VII. (b) 28. VIII. (c) 13. VII.

## XIX.

*Se la sfera si seghi con qualsivoglia piano* AC, *la sezione sarà sempre circolo.* Fig. 13.

Tirisi (d) dal punto O l'asse OFB perpendicolare al piano segante, e steso per l'asse qualsivoglia piano YABCK, si congiunga OA, OC; e per essere la corda AC divisa ad angoli retti alla perpendicolare OB, sarà (e) sempre divisa anche in mezzo; il che verificandosi di tutte le corde fra loro uguali, che nel piano segante si tirino per il punto F ai punti della superficie sferica, o della sezione rotonda fatta nella superficie medesima, la sezione istessa sarà circolo; il quale al circolo massimo, o genitore della sfera, sarà (f) come il quadrato del raggio FA al quadrato del raggio OB. (d) 4. di qui. (e) 1. V. (f) 28. VIII.

## XX.

*La superficie, o contorno di un prisma* AK *è uguale ad un rettangolo fatto dall'* XY *altezza, o perpendicolare del prisma nel perimetro della base* ABCDEF. Fig. 71.

La superficie del prisma è formata da tanti parallelogrammi, quanti sono i lati nel suo perimetro, ed hanno tutti l'istessa altezza per esser compresi da' piani paralleli; dunque, siccome ciascuno di quei parallelogrammi è uguale al rettangolo fatto dall'altezza, o perpendicolare istessa nel lato del perimetro, o base, sopra cui posa (g), così (g) 6. VI.

così tutta la ſuperficie, o contorno del priſma ſarà uguale al rettangolo fatto dall'altezza iſteſſa nell'intero perimetro della baſe.

XXI.

Fig. 8. Anche *la ſuperficie curva cilindrica di qualſivoglia cilindro* AI *ſarà uguale al rettangolo fatto dall' altezza* XY *nel perimetro, o circonferenza della ſua baſe* ABCD.

Poichè il cilindro è un priſma d'infinite facce, la baſe del quale è il circolo, ed il perimetro è la circonferenza iſteſſa del medeſimo circolo compoſta di lati infiniti, ſarà l'intera ſuperficie curva del cilindro ſempre uguale al rettangolo fatto dall'altezza in queſto perimetro, o circonferenza del circolo della baſe.

XXII.

Fig. 7. *Se la ſuperficie, o contorno di un priſma,* 8. *o cilindro* AI *ſia ſegato dai piani paralleli* ABCD, QPQR, GHIK, *ſaranno le porzioni della ſuperficie compreſe dagl' iſteſſi piani come le altezze* XZ, ZY.

Imperocchè, eſſendo la ſuperficie del priſma o cilindro AQ uguale al rettangolo dell' altezza XZ nel perimetro intero ABCD, ovvero QPQR (*a*) 20. (*a*), e la ſuperficie del priſma, o cilindro QI 21. *di-* uguale al rettangolo dell' altezza ZY nell' iſteſſo *qu.* perimetro QPQR, ſaranno le ſuperficie priſmatiche, o cilindriche fra loro come gl' iſteſſi ret- (*b*) 9. tangoli, cioè (*b*) come l'altezze XZ, ZY.
*VI.*

XXIII.

Fig. 7. *La ſuperficie, o contorno d' un priſma, che abbia per baſe un poligono regolare, ſarà alla baſe come l' altezza* XY *alla retta* XT *metà della retta* XU *perpendicolare ad un lato del poligono* ABCD.

Imperocchè, eſſendo la ſuperficie del priſma ugua-

uguale al rettangolo fatto dall' altezza XY nel perimetro della sua base (*a*), ed il poligono della base uguale al rettangolo fatto dalla metà della perpendicolare XU nell'istesso perimetro (*b*) sarà la superficie intera prismatica alla sua base come un rettangolo all'altro, vale a dire (*c*) come l'altezza XY alla retta XT.

(*a*) 20. *di qu.*
(*b*) 22. *VIII.*
(*c*) 9. *VI.*

XXIV.

Anche *la superficie curva, o contorno del cilindro* AI *sarà al circolo della sua base come l' altezza* XY *alla retta* XT *metà del raggio* XU. Fig. 8.

XXV.

*Se nel cilindro* LT *si faccia come l' altezza* SL *ad* LE *metà del raggio* LN, *così il quadrato della retta* LF *al quadrato dell' istesso raggio* LN, *sarà la superficie cilindrica uguale al circolo fatto dal raggio* LF. Fig. 9.

La superficie cilindrica sta al circolo della base come l'altezza SL ad LE (*d*), cioè per ipotesi come il quadrato della retta LF al quadrato della retta LN, ovvero (*e*) come il circolo del raggio LF al circolo del raggio LN, cioè al circolo dell' istessa base; dunque la superficie cilindrica sarà uguale al circolo del raggio LF.

(*d*) *Ant.*
(*e*) 28. *VIII.*

XXVI.

*Il quadrato della retta* LF *è uguale al rettangolo* LMTS *steso per l' asse* NU; *ovvero la retta* LF *è media proporzionale fra i lati* SL, LM.

Il quadrato di FL al quadrato di LN sta per ipotesi come SL ad LE, cioè (*f*) come il rettangolo di ML in LS al rettangolo di ML in LE, ma il rettangolo di ML in LE è uguale al quadrato di LN (*g*) per essere le tre rette ML, LN, LE in con-

(*f*) 9. *VI.*
(*g*) 19. *VI.*

continua proporzione dupla; dunque anche il quadrato di FL sarà uguale al rettangolo di LM in SL, cioè al rettangolo per l'asse SLMT.

XXVII.

Fig.17. *Le superficie curve dei cilindri* AI, LT *sono fra loro come i loro rettangoli per l' asse* GACI, SLMT.

(*a*) 17. *di qu.* Pongasi (*a*) la retta FA media proporzionale fra il lato GA, e il diametro AC; e la retta FL media proporzionale fra il lato SL, e il dia-
(*b*) 25. *di qu.* metro LM, e sarà (*b*) la superficie cilindrica AI uguale al circolo fatto dal raggio FA, e la superficie cilindrica LT uguale al circolo fatto dal raggio FL; onde le superficie cilindriche saranno
(*c*) 28. *VIII.* fra loro come i circoli medesimi, ovvero (*c*) come i quadrati dei loro raggi FA, FL, ovvero come i rettangoli AI, LT, che sono uguali agli
(*d*) *Ant.* stessi quadrati dei raggi (*d*).

XXVIII.

Fig. 5. *La superficie, o contorno d' una piramide retta* ABCDE *è uguale al rettangolo fatto dal perimetro* ABCD *nella metà della retta* EF, *tirata perpendicolare dal vertice* E *a qualsivoglia lato* CD *del perimetro.*

La superficie, o contorno della piramide retta è composta di tanti triangoli ugualmente alti
(*e*) *Def.* 5. *di qu.* (*e*), quanti sono i lati nel perimetro della base; ma ciascuno di questi triangoli è uguale al rettangolo fatto dalla sua base, o lato del perimetro, sopra cui posa nella metà della perpendicolare EF, tirata dal vertice perpendicolare sopra l'
(*f*) 22. *VI.* istesso (*f*) lato; dunque tutta la superficie, o l' intero contorno della piramide sarà uguale al rettangolo fatto dall' intero perimetro nella metà della perpendicolare EF.

XXIX.

Fig.10. Anche *la superficie curva di un cono retto*

*to* ABCDE *sarà uguale al rettangolo fatto dalla circonferenza della sua base nella metà della retta* AE, *che sia lato dell' istesso cono.*

Poichè il cono è una piramide di facce infinite, nel quale il perimetro della base è la circonferenza composta d'infiniti lati, e la perpendicolare tirata dal vertice sopra uno di questi lati è l' istesso lato del cono, siccome in qualsivoglia altra piramide, così nel cono sarà la superficie, o contorno uguale al rettangolo del suo perimetro, nella metà della perpendicolare tirata al perimetro, ovvero nella metà del lato istesso AE.

XXX.

Quindi appariſce, che *se la piramide abbia per base qualsivoglia poligono regolare* AB CD, *la superficie della piramide alla sua base sta come il lato, o perpendicolare* EF *alla perpendicolare* XF. Fig. 5.

Poichè, siccome la superficie della piramide è la metà del rettangolo fatto dalla perpendicolare EF nel perimetro ABCD (*a*), e la base è uguale alla metà del rettangolo fatto dalla perpendicolare XF nell'istesso perimetro (*b*), saranno la superficie e la base fra loro come i rettangoli medesimi, cioè (*c*) come EF ad XF. (*a*) 28. *di qu.* (*b*) 22. *VIII.* (*c*) 9. *VI.*

XXXI.

Per la medesima ragione *la superficie conica di un cono retto* ABCDE *sta alla sua base come il lato dell' istesso cono* AE *al raggio della sua base* XA. Fig. 10.

XXXII.

*Se la superficie conica* AEC *sia tagliata da un piano* GHIK *parallelo al circolo della base, sarà l' intera superficie* AEC *alla superficie tagliata* GEI *come il quadrato del* Fig. 10.

rag-

*raggio* GZ; *ovvero come il quadrato del lato* AE *al quadrato del lato* GE; *ovvero come il quadrato dell' altezza* XE *al quadrato dell' altezza* EZ.

La conica superficie AEC sta al suo circolo, o base ABCD come EA ad AX (*a*), ovvero (*b*) come EG a GZ; siccome la superficie conica GEI sta al suo circolo, o base GI come l'istessa EG a GZ; dunque la superficie conica AEC sta alla sua base come la superficie conica GEI alla sua base; onde permutando le superficie coniche saranno fra loro come i circoli delle loro basi, ovvero come (*c*) i quadrati dei raggi AX, GZ, o (*d*) dei lati AE, GE, o dell' altezze XE, EZ.

(*a*) *Ant.* (*b*) 2. *VII.* (*c*) 28. *VII.* (*d*) 2. *VII.*

XXXIII.

Si potrà dunque *dividere la superficie del cono dato* AEC *nella ragione data di* M, *ad* N.

Se facciasi come M ad N, così il quadrato dell' intero lato AE al quadrato del lato, o parte EG; poichè anche le superficie coniche saranno fra loro come gl' istessi quadrati (*e*), ovvero come M ad N.

(*e*) *Ant.*

XXXIV.

*Se fra il lato* AE, *ed il raggio della base* AX *si ponga l'* AF *media proporzionale, sarà la superficie conica uguale al circolo fatto col raggio* AF.

Imperocchè, ponendosi le tre rette EA, AF, AX continue proporzionali, il circolo del raggio AF sarà al circolo del raggio AX come EA ad AX (*f*), cioè (*g*) come la superficie conica all' istesso circolo fatto dal raggio AX, e però la superficie conica sarà uguale al circolo fatto dal raggio AF.

(*f*) 12. *VII.* (*g*) 28. *VIII.* 31. *di qu.*

XXXV.

*Le superficie curve dei coni* AEC, LUM

*sono*

*ſono fra loro come i rettangoli fatti dai loro lati* EA, UL *nei raggi* AX, LN.

Si piglino le rette AF, LF medie proporzionali fra i lati ed i raggi dei coni; e ſarà la ſuperficie conica AEC uguale al circolo fatto dal raggio AF, e la ſuperficie conica LUM uguale al circolo fatto dal raggio LF; dunque permutando le ſuperficie coniche ſaranno fra loro come i circoli medeſimi, ovvero come i quadrati dei loro raggi FA, FL, ovvero come i rettangoli di EA in AX, e di UL in LN, che ſono (*a*) uguali agli ſteſſi quadrati di FA, FL. (*a*) 19 VI.

## XXXVI.

*La ſuperficie intera del cono* AEC *ſta alla ſuperficie del tronco* AI *come il rettangolo del lato* EA *nel raggio* AX *al rettangolo del lato* AG *nella retta* FH, *la quale divida in mezzo i lati* AG, CI *dell' iſteſſo tronco.* Fig. 11.

Pongaſi la retta AM uguale al raggio AX, e perpendicolare ſopra il lato AE, e compito il rettangolo AN ſi tiri il diametro ME, che ſeghi la retta GO tirata parallela ad AM nel punto P, per il quale tiriſi la retta QR parallela al lato AE; e per eſſere AM a GP come AE ad EG (*b*) ovvero AX a GZ, ſiccome la retta AM poneſi uguale al raggio AX, così la retta GP ſarà uguale al raggio GZ. Ora l' intera ſuperficie del cono AEC ſta (*c*) alla ſuperficie del cono GEI come il rettangolo di EA in AX, cioè il rettangolo AMNE al rettangolo di EG in GZ, cioè al rettangolo GPRE; dunque per converſione di ragione l'intera ſuperficie del cono AEC ſarà alla ſuperficie del tronco, che reſta, come il rettangolo AMNE al rettangolo AMOG inſieme col rettangolo PONR, ovvero col rettangolo uguale (*d*) AQ, PG; ma il rettangolo AMOG è fatto dal lato (*b*) 2. VII. (*c*) Aut. (*d*) 5. VI.

AG

AG nel raggio AX, ed il rettangolo AQPG è fatto dall'istesso lato AG nell'altro raggio GZ; dunque l'intera superficie del cono sarà alla superficie del tronco come il rettangolo di EA in AX al rettangolo di AG nei due raggi AX, GZ; ma il rettangolo di AG nei due raggi AX, GZ è uguale al rettangolo di AG in FH, per (a) 2. essere (a) AX doppia di FU, EGZ doppia di VII. UL, ed in conseguenza i due raggi AX, GZ doppj di FL, e però uguali ad FH; dunque l'intera superficie del cono sarà alla superficie dell'istesso tronco come il rettangolo di EA in AX al rettangolo di AG in FH.

## XXXVII.

Fig. 9. *Qualsivoglia superficie cilindrica* LT *a qualsivoglia superficie conica* AEC *sta come il rettangolo per l'asse* LT *al rettangolo fatto dal lato* AE *nel raggio* AX.

Pongasi (b) nel cilindro la FL media proporb) 17. VII. zionale fra i lati SL, LM, e nel cono la FA media proporzionale fra il lato EA, ed il raggio c) 25. di qu. AX, e sarà (c) la superficie cilindrica LT uguale al circolo fatto dal raggio LF, e la superficie conica uguale al circolo fatto dal raggio d) 34. di qu. FA, (d), dunque le superficie sono fra loro come gli stessi circoli, ovvero come i quadrati dei raggi FA, FL, ovvero come i rettangoli di SL e) 16. di qu. in LM, e di EA in AX, che sono (e) uguali ai quadrati delle rette FL, FA.

## XXXVIII.

Fig. 9. e 11. *Qualsivoglia superficie cilindrica* LT *sta alla superficie di un tronco, o fusto di cono* AI *come il rettangolo per l'asse del cilindro* LT *al rettangolo di* AG *in* FH.

La superficie del cilindro sta alla superficie in(f) *Ant.* tera del cono come il rettangolo di SL in LM rettangolo di EA in AX (f); la superficie in-

tera

tera del cono alla superficie del tronco come il rettangolo di FA in AX al rettangolo di AG in FH (*a*); dunque per egualità ordinata la superficie del cilindro sarà alla superficie del tronco come il rettangolo di SL in LM al rettangolo di AG in FH. (*a*) 36. di qu.

## XXXIX.

*Se dividendosi per mezzo qualsivoglia arco di circolo* ABC *in quante parti si voglia, si tirino le rette, o corde ubuali* AD, DB, BC, EC, *le superficie coniche descritte dalla rivoluzione degl' istessi lati intorno al diametro* OB *saranno sempre uguali alla superficie cilindrica fatta dal rettangolo* GB, *l' altezza del quale sia la retta* FB, *ed il lato* GF *sia uguale alla retta* ON, *che dal centro* O *si tiri perpendicolare sopra di un ato* AD. Fig. 13.

Si tirino per i due punti M, N le rette MP, NQ perpendicolari all'asse OB, le quali dividerranno (*b*) in mezzo le corde AD, DB, BE, EC, e pongasi la DL perpendicolare ad AF. (*b*) 1. V.

Perchè dal punto M cima dell'angolo retto OMB cade la MU perpendicolare sopra la base OB, sarà (*c*) il triangolo OMU simile al triangolo MBU, ovvero (*d*) al triangolo DBT, e però (*e*) sarà OM ad MU come DB a BT, ed il rettangolo dell'estreme OM, BT, cioè il rettangolo TRHB, sarà uguale al rettangolo dell'intermedie MU, DB (*f*); e pigliando la base SR dobbia della base TR, e la base DT doppia della base MU, sarà il rettangolo SRHI uguale al rettangolo, di DT in DB; ma come il rettangolo SRHI al rettangolo di DB in DT, così è la superficie cilindrica descritta dal rettangolo SRHI alla superficie conica descritta (*c*) 14. VII. (*d*) 2. VI. (*e*) 1. VII. (*f*) 19. VI.

dal

(a) 37. di qu. dal lato, o corda DB (a), dunque la superficie cilindrica sarà uguale alla superficie conica.

Similmente ancora, rispetto al secondo lato AD, e seconda superficie conica, o di fusto conico generata dall'istesso lato AD, poichè l'angolo retto RDL è uguale all'angolo retto DNO, e l'angolo RDN è uguale all'angolo alterno DNX, sarà l'angolo rimanente NDL, ovvero ADL uguale all'angolo rimanente ONX; e perciò i triangoli rettangoli ONX, ADL saranno fra loro simili, e sarà (b) ON ad NX come AD a DL, ovvero a TF, onde il rettangolo dell'estreme ON, TF, cioè il rettangolo FGRT, sarà uguale al rettangolo dell'intermedie NX, AD; e raddoppiando le basi sarà il rettangolo GS uguale al rettangolo di NQ in AD; ma come il rettangolo GS al rettangolo di NQ in AD, così è la superficie cilindrica descritta dal rettangolo GS alla superficie conica del tronco conico, descritta dal lato, o corda AD, dunque la superficie cilindrica è uguale alla superficie conica; il che verificandosi, qualunque sia il numero dei lati, o delle parti uguali, nelle quali è diviso l'arco dato ABC, tutte le superficie coniche descritte da tutti i lati saranno uguali a tutte le superficie cilindriche egualmente alte, ovvero all'intera superficie cilindrica descritta dal rettangolo GI.

(b) 10. IV.

## XL.

Che *se la porzione del circolo fosse il semicircolo, allora tutte le coniche superficie descritte dai lati di un poligono regolare inscritto nel semicircolo istesso sarebbero uguali alla superficie d'un cilindro, il quale avesse l'altezza uguale al raggio del semicircolo, ed il raggio della base uguale al cateto, o perpendicolare tirata dal centro del cerchio, o poligono ad un lato del poligono istesso.*

XLI.

## XLI.

*La ſuperficie di qualſivoglia porzione, o ſegmento ſferico generato dalla rivoluzione dell' arco* ABC *intorno al diametro* OB *è ſempre uguale alla ſuperficie cilindrica generata dalla rivoluzione del rettangolo* ZB, *l' altezza del quale ſia l' altezza medeſima del ſegmento, o parte di diametro* FB, *e la baſe ſia il raggio* OA, *ovvero* FZ, *ovvero* OY.

Imperciocchè, eſſendo l'arco ABC compoſto d' infiniti lati, il cateto, o la perpendicolare dei quali è l'iſteſſo raggio OA, ſaranno le ſuperficie deſcritte da quegli infiniti lati, cioè dall'arco ABC, cioè la ſuperficie ſferica del ſegmento ABC, uguale alla ſuperficie cilindrica deſcritta dal rettangolo ZB, che abbia per altezza la retta FB, e per altro lato il raggio OA, ovvero FZ, ovvero OY.

## XLII.

*La ſuperficie intera dell' emiſfero fatta dal ſemicircolo* YABCK *è uguale alla ſuperficie cilindrica fatta dal rettangolo* YB, *che ha per altezza il raggio* OB, *e per larghezza l' iſteſſo raggio* YO, *ovvero è deſcritta dal rettangolo circonſcritto all' iſteſſo ſemicircolo.*

## XLIII.

*La ſuperficie curva di qualſivoglia ſegmento ſferico* ABC *è uguale al circolo deſcritto dal raggio* AB, *che ſi adatta nella metà dell' arco* ABC. Fig. 14.

Deſcrivaſi intorno al ſemicircolo HBI il rettangolo HE, e prolunghiſi la corda AC. La ſuperficie cilindrica fatta dal rettangolo DE ſta al circolo fatto dal raggio BA come il rettangolo

iſteſ-

(a) 27. di qu. istesso DE al quadrato del raggio BA (a), ma il rettangolo DE, ovvero per l'egualità de' lati, (b) 16. VII. il rettangolo di FB in BG, è uguale (b) al quadrato di BA; dunque la superficie cilindrica, ovvero la superficie del segmento sferico uguale alla superficie cilindrica (c), sarà uguale al circolo descritto dal raggio BA.

(c) 41. di qu.

## XLIV.

*Segandosi la superficie sferica con circoli paralleli, i diametri dei quali sieno le rette, o corde* HI, AC, *saranno fra loro le superficie sferiche descritte dagli archi*, HA, AB *come le altezze, o parti dell' asse* OG, GB.

La superficie sferica descritta dall'arco HAB alla superficie sferica descritta dall'arco AB sta come il circolo, o quadrato del raggio HB al circolo, o quadrato del raggio AB (d), cioè, (e) come il rettangolo di FB in BO al rettangolo di FB, in BG, cioè (f) come OB a BG; dunque dividendo la superficie sferica descritta dall'arco HA sarà alla superficie sferica descritta dall'arco AB come OG a GB.

(d) Ant. (e) 16. VII. (f) 10. VI.

## XLV.

*La superficie dell' emisfero* HBI *è uguale al circolo fatto dal raggio* BH.

Poichè, essendo il rettangolo di FB in BO, ovvero il rettangolo HE uguale al quadrato della retta BH (g), sarà anche la superficie cilindrica descritta dal rettangolo HE intorno all' emisfero, ovvero la superficie istessa dell'emisfero, che uguaglia la superficie cilindrica, (b) uguale al circolo del raggio BH.

(g) 16. VII. (b) 42. di qu.

## XLVI.

*L' intera superficie sferica è uguale al circolo fatto dall' asse* FB *come raggio.*

La superficie sferica è doppia della superficie dell'emisfero, siccome il circolo fatto dal raggio

FB

FB è doppio del circolo fatto dal raggio BH (*a*), dunque siccome la superficie dell'emisfero è uguale al circolo fatto dal raggio BH (*b*), così ancora l'intera superficie sferica sarà uguale al circolo fatto dal raggio FB.

(*a*) 28. VIII.
(*b*) Ant.

## XLVII.

*L'intera superficie sferica generata dal circolo* FHBI *è quadrupla dell'istesso circolo genitore.*

Poichè, essendo la superficie sferica istessa uguale al circolo fatto dal raggio FB (*c*), siccome questo è quadruplo del circolo genitore fatto dal raggio OB (*d*), così l'intera superficie sferica sarà quadrupla dell'istesso circolo genitore FHBI.

(*c*) Ant.
(*d*) 20. VII.

## XLVIII.

Si potrà dunque *dividere la superficie della sfera in qualsivoglia data ragione*,

Se si applichi al circolo genitore la corda BA, il circolo della quale abbia al circolo fatto dal raggio BF la ragione data; imperciocchè, essendo il circolo del raggio BA uguale alla superficie del segmento sferico ABC (*e*), ed il circolo fatto dal raggio BF uguale all'intera superficie della sfera (*f*), l'istessa ragione, che si ritrova fra i circoli dei raggi BA, BF, si troverà ancora fra la porzione di superficie sferica tagliata, e l'intera superficie della sfera.

(*e*) 43. di qu.
(*f*) 46. di qu.

## XLIX.

*La curva superficie cilindrica circonscritta alla sfera insieme con le sue basi è sesquialtera della superficie della sfera inscritta.*

La curva superficie cilindrica senza le basi è uguale alla superficie sferica (*g*), cioè a quattro circoli genitori (*b*); aggiunti i due circoli delle basi, ciascuno dei quali è uguale all'istesso circolo genitore, sarà l'intera superficie cilindrica insieme con le basi uguale a sei circoli genitori, e

(*g*) 42. di qu.
(*b*) 47. di qu.

però sarà la superficie cilindrica alla sferica come il 6. al 4. cioè in ragione sesquialtera.

## L.

*Se intorno alla medesima sfera si circonscriva un cilindro, ed un cono equilatero, sarà l' intera superficie conica insieme con la sua base sesquialtera della superficie cilindrica insieme con le sue basi; e però, se intorno alla medesima sfera si descriva il cono equilatero, ed il cilindro, la superficie del cono, del cilindro, e della sfera saranno in continua proporzione sesquialtera.*

Per essere l'angolo DAO metà dell' angolo (*a*) 1. *VIII.* DAB (*a*), e però uguale all'angolo DBA, ed in conseguenza, per essere simili i triangoli rettangoli DAO, DBA, sarà AD a DO come (*b*) 14. *VII.* BD a DA, ed (*b*) il quadrato di AD al quadrato di DO come il quadrato di BD al quadrato di DA; e però siccome il quadrato di BD è triplo del quadrato di DA, per essere il quadrato di AB uguale ai quadrati delle AD, BD (*c*) 20. *VII.* (*c*), e quadruplo del solo quadrato di AD (*d*), anche il quadrato, o circolo di DA sarà (*e*) tri- (*d*) 11 plo del circolo di OD, e sarà ad esso come il 3. *VII.* all'1. ma la superficie conica ABC al circolo (*e*) 28. *VIII.* della sua base è come BA ad AD (*f*) cioè doppia; dunque la superficie conica insieme col cir- (*f*) 31. *di qu.* colo della sua base è tripla dell'istesso circolo fatto dal raggio DA, ovvero è ad esso come il 9. al 3. e però tutta la superficie conica con la sua base sarà al circolo del raggio OD come il 9. all'1. ed essendo tutta l'intera superficie cilindrica circonscritta alla sfera all'istesso circolo del (*g*) 4. *suo* raggio OD come il 6. all'1. (*g*), sarà la superficie conica alla superficie cilindrica come il 9 al 6. cioè in ragione sesquialtera; ma la superficie cilindrica ancora si è dimostrato (*b*) essere al-

la

la ſuperficie sferica inſcritta come il 6. al 4. cioè in ragione ſeſquialtera, dunque le tre ſuperficie intere, conica, cilindrica, e sferica, ſaranno in continua ragione ſeſquialtera.



# LIBRO X.

## *Della mole, o solidità de' corpi, loro proporzione e misura.*

DOpo di avere nel passato Libro considerate le superficie, contorni, o sezioni dei solidi paragonandole insieme, ed esponendo le varie loro misure; ora si deve considerare la mole e solidità medesima degli stessi corpi, e paragonandogli fra loro dimostrare quelle ammirabili proprietà e misure, le quali furono con incredibile gloria ed acutissime speculazioni già ritrovate dal grande Archimede, ed altri illustri Geometri. Che se nell' Opere istesse di quel divino Geometra, e nella maniera per lo più negativa, ch'egli adoprò per dimostrarle, potevasi ben giustamente bramare chiarezza e bravità eguale all'ammirabile felicità, e maniera, qualunque ella si fosse, impiegata per inventarle, ficchè a giudizio di nobilissimi Scrittori questa sì ragguardevole parte di Geometria riuscir soleva prolissa insieme ed oscura, giovami credere, che per il metodo degl'indivisibili da me frequentemente adoprato, e per l' ordine e serie più naturale delle proposizioni, di cui servito io mi sono, ella sia per essere incomparabilmente più facile, chiara, e breve di quello, che sia finora da verun altro Scrittore osservata. Quanto poi nobili, sublimi, ed ammirabili sieno le Proposizioni, che siccome nel passato Libro, così in questo ancora si contengono, lo potrà ciascuno per sè medesimo ben facilmente conoscere; anzichè io giudico, che nel riflettere alla lunga non interrotta serie e catena di verità, per le quali di grado in grado si riconosce condotto alle

le più nobili cognizioni, che rinvenir si potessero dall'intelletto umano, sia per essere più vivamente acceso ed infiammato dal desiderio ed amore di questa Scienza; considerando quanto ferace ed inesausta copia di verità si diramino da quei piccoli fonti, e quasi primi semi di cognizioni, che nei passati Libri si stabilirono.

## PROPOSIZIONI.

### I.

*Se qualsivoglia prisma* ACE *sia segato dai piani ugualmente alti* ABC, GHI, DEF, *saranno fra loro la parti, ovvero i prismi* ACH, GIE *come le loro altezze, ovvero come i lati* AG, GD. Fig. 4.

Tirisi da qualsivoglia punto, o angolo C la retta CO perpendicolare sopra il lato opposto *AB*, e per qualsivoglia punto P dell'istessa perpendicolare si tiri un piano MNLK, parallelo al piano opposto ABED (*a*), e saranno le sezioni MN, QR, KL parallele fra loro (*b*), siccome ancora le sezioni MK, NL; onde il parallelogrammo MNRQ sarà (*c*) al parallelogrammo QRLK come il lato MQ al lato QK, ovvero (*d*) AG a GD, e così sempre di tutti i piani, che si tirino per tutti i punti della perpendicolare CO; dunque anche i prismi ACH, GIE composti dagli stessi parallelogrammi saranno fra loro come l'altezze, o lati AG, GD.

(*a*) 9. XI.
(*b*) 6. XI.
(*c*) 9. VI.
(*d*) 10. VI.

### II.

Similmente ancora, *se il cilindro* AI *sia segato dai piani paralleli* ABCD, OPQR, GHIK, *saranno fra loro le parti, ovvero i cilindri* AQ, OI *come le loro altezze, ovvero come i lati* AO, OG. Fig. 10.

Poichè, oltre all'essere il cilindro un prisma d'infiniti lati, e perciò verificarsi anche in lui tutto quello, che si è dimostrato dei prismi, basta riflettere, che il cilindro è composto di tante superficie cilindriche concentriche, quanti sono i punti nel raggio AX; onde, siccome le parti di ciascuna di queste superficie cilindriche divise dai piani paralleli sono fra loro come i lati AO, (a) 22. IX. OG (a), così ancora le parti, o cilindri stessi AQ, OI saranno fra loro come le altezze (b) XZ, ZY, ovvero come i lati AO, OG.

III.

*Se le piramidi* ABCDE, LMNO *collocate sopra qualsivoglia base abbiano l'istessa, o uguale altezza* EX, OU, *saranno fra loro come le loro basi* ABCD, LMN.

Fig. 5. e 6.

(b) 9. IX. Si tirino (b) per due punti Z, Y ugualmente lontani dalle cime E, O i piani paralleli alle (c) 14. IX. basi; e sarà (c) la sezione GHIK simile alla base, ABCD, e la sezione PQR simile alla base LMN, e perciò la base ABCD alla sezione (d) 15. IX. GHIK sarà (d) come il quadrato di XE al quadrato EZ; ovvero, per essere uguali le XE, UO, e le EZ, OY, come il quadrato di UO al quadrato di OY, ovvero come la base LMN alla sezione PQR; e permutando la sezione GHIK alla sezione corrispondente PQR sarà come la base ABCD alla base LMN, e così dicendo sempre di qualsivoglia sezione, che tirisi per altrettanti punti, che si ritrovano nelle perpendicolari uguali XE, UO; dunque anche tutte insieme le sezioni delle piramidi, ovvero le piramidi istesse, che sono composte dalle sezioni, sono fra loro come le loro basi ABCD, LMN.

IV.

Anche *i coni, che abbiano l'istessa, ed uguale altezza, sono fra loro come le basi.*

Poichè, oltre all'essere i coni piramidi d'infiniti

niti lati, ed in conseguenza verificarsi in loro tutto quello, che si è dimostrato delle piramidi, anche le sezioni circolari formate in essi con piani paralleli, ed ugualmente lontani dalle loro basi, sarebbero sempre fra loro come i circoli delle basi (*a*). (*a*) 18. IX.

V.

*Se* dunque *le piramidi, e i coni abbiano uguale altezza, ed abbiano ancora l'istessa base, o basi uguali, saranno uguali fra loro; e se sieno uguali fra loro, ed abbiano altezze uguali, avranno ancora le basi uguali.*

VI.

*I prismi di qualsivoglia base* ABCE, ABCDEFI, *che abbiano le altezze uguali* AD, XY, *sono fra loro come le loro basi* ABC, ABCDEF. Fig. 4. 7.

Si piglino nell'altezze, o perpendicolari uguali AD, XV le parti uguali AG, XZ, e per i due punti G, Z si stendano i piani GHI, OPQR paralleli alle basi ABC, ABCDEF; e saranno sempre le sezioni GHI, OPQR uguali alle basi ABC, ABCDEF (*b*), e però qualsivoglia sezione GHI sarà alla sezione corrispondente OPQR come la base ABC alla base ABCDEF, onde raccogliendo saranno tutte le sezioni di un prisma a tutte sezioni dell'altro prisma, cioè un prisma all'altro, come la base ABC alla base ABCDEF. (*b*) 16. IX.

VII.

*I cilindri* ancora, *che abbiano le altezze uguali, sono fra loro come i circoli delle loro basi.*

VIII.

*Se* dunque *i prismi, o cilindri abbiano uguale altezza, ed abbiano ancora le basi*

*uguali, saranno uguali : e se fossero fra loro uguali, ed avessero ugual' altezza, avrebbero ancora le basi uguali.*

IX.

Fig. 15. *Il prisma triangolare* ABCFED *è triplo della piramide inscritta* ABCF, *che abbia l'istessa base* ABC, *ed altezza* CF.

Tirisi per la retta DF, e punto B il piano DFβ, e sarà (*a*) la piramide DEFβ, che ha la base DEF, ed il vertice B, uguale alla piramide ABCF, che ha la base ABC, ed il vertice F, poichè hanno le basi uguali, e sono collocate nell'uguali altezze, o fra due piani paralleli; ma anche la piramide ADBF, che ha la base ABD, ed il vertice F, è uguale all'istessa piramide DEFB, per essere le basi DEB, ADB uguali, ed il vertice F comune; dunque le tre piramide DEFB, ADBF, ABCF sono uguali fra loro; e perciò il prisma ABCFED sarà triplo della sola piramide ABCF.

(*a*) 5. di qu.

X.

*Il prisma di qualsivoglia base è triplo della piramide, che abbia l'istessa base ed altezza.*

Concepiscasi un prisma triangolare, che abbia l'altezza uguale all'altezza del dato prisma, ed una piramide triangolare inscritta nell' istesso prisma triangolare; e, per essere (*b*) tanto i prismi fra loro, quanto le piramidi come le loro basi F, sarà permutando un prisma alla sua piramide come l'altro prisma alla sua piramide; onde, siccome il prisma triangolare è triplo della sua piramide (*c*), così qualsivoglia prisma sarà similmente triplo della sua piramide inscritta.

(*b*) 3. 6. di qu.

(*c*) Ant.

XI.

Fig. 9. Anche *il cilindro* LT *è triplo del cono* LUM;

LUM, *che ha l' istessa base ed altezza del cilindro.*

Poichè il cilindro è un prisma d'infiniti lati, ed il cono una piramide di altrettanti e infiniti lati; e però, siccome qualsivoglia prisma è triplo della piramide, così il cilindro sarà triplo del cono.

XII.

Nuovamente dunque apparisce, che *i coni che aabiano le altezze eguali, sono fra loro come le lor basi.*

Poichè sono fra loro come i cilindri loro circonscritti, dei quali sono la terza parte (*a*), e i cilindri egualmente alti sono come le loro basi (*b*). (*a*) *Ant.* (*b*) 7. *di qu.*

XIII.

*Se i prismi* AH, NT *abbiano uguali basi,* Fig. 17. *saranno fra loro come le altezze* AF, LU. 18.

Dal prisma maggiore LT si tagli un prisma LR, che abbia uguale altezza all'altezza del prisma AH, e sarà il prisma LR eguale al prisma AH (*c*); ma il prisma LT al prisma LR (*c*) 8. sta come l'altezza LU all'altezza LP (*d*); dun- *di qu.* que anche il prisma LT al prisma AH sarà co- (*d*) 1. me l'altezza LU all'altezza LP, ovvero AF. *di qu.*

XIV.

Anche *i cilindri, che abbiano basi uguali, sono fra loro come le altezze.*

XV.

*Le piramidi* ancora *ed i coni, che abbiano basi uguali, sono fra loro come le altezze.*

Poichè sono sempre fra loro come i loro prismi o cilindri, dei quali sono la terza parte.

XVI.

*I prismi* AH, LT *sono fra loro in ragione* Fig. 17. e 18.

*gione composta delle ragioni delle loro basi ed altezze.*

Pongasi, come prima, il prisma LR, che abbia l'altezza LP uguale ad AF, e sarà (*a*) la ragione del prisma AH al prisma LT composta dalla ragione del prisma AH al prisma LR, (*b*) cioè (*b*) della base ABCD alla base LMNO, e dalla ragione dell'istesso prisma LR al prisma LT, cioè (*c*) dell'altezza LP, ovvero AF, all'altezza LU.

(*a*) 3 *II.*
(*b*) 6. *di qu.*
(*c*) 13. *di qu.*

## XVII.

Dunque anche i prismi d'infiniti lati, cioè *i cilindri*, siccome *le piramidi ed i coni, che sono le terze parti dei prismi, e cilindri, sono fra loro in ragion composta delle loro basi, ed altezze.*

## XVIII.

*Se* dunque *i prismi, cilindri, piramidi, e coni abbiano le basi reciproche all'altezze, saranno uguali; e se sieno uguali, avranno le basi reciproche all'altezze.*

Poichè la ragione, che si compone di ragioni reciproche, è ragione di ugualità (*d*), e la ragione di ugualità si compone di ragioni reciproche (*e*).

(*d*) 5. *II.*
(*e*) 6. *II.*

## XIX.

*Dato* dunque *un cono* ABC *si potrà ridurre ad un cono* MON, *che abbia la data base* MN.

Fig. 20. 14.

Se si faccia, che come sta la data base MN alla base AC del dato cono ABC, così stia l'altezza DB del dato cono ABC ad un altra altezza FO (*f*), e con la base MN, e coll'altezza FO si descriva, o concepisca formarsi il cono MON; poichè i coni ABC, MON avranno le basi reciproche alle altezze, onde saranno eguali (*g*).

(*f*) 12. *VII.*
(*g*) *ant.*

## XX.

XX.

Dati due coni AEC, MON, sommarli e ridurgli ad un solo, Fig. 10, 14. 20.

Si riducano i coni AEC, MON ai coni MON, GOH della medesima base (*a*), e sarà il cono GOH eguale al cono AEC. Si sommino le due altezze OF, OD, e se ne faccia la linea BD. Col triangolo ADG rettangolo in D si formi il cono GBH, che sarà eguale a' due coni dati. Poichè per esser eguali le basi MN, GH, sarà il cono MON al cono GOH, come l' altezza OF all'altezza OD(*b*), e componendo i due coni MON, GOH al cono GOH, come le due OF, OD alla OD; ma le due OF, OD sono eguali a BD, dunque saranno i due coni MON, GOH al cono GOH, come BD alla OD; ma BD alla OD, come il cono GBH al cono GOH (*c*) perchè hanno la medesima base, dunque saranno i due coni MON, GOH al cono GOH, come il cono GBH al cono GOH, e permutando i due coni MON, GOH al cono GBH come il cono GOH al cono GOH; ma il cono GOH è eguale a se stesso, dunque anche il cono GBH sarà eguale ai due coni MON, GOH, cioè ai due MON, AFC. (*a*) 19. *di qu.* (*b*) 15. *di qu.* (*c*) 12. *di qu.*

XXI.

Onde se invece di *Sommare* si dica sottrarre, e invece del *componendo* si usi il dividendo, e la minore altezza invece di congiungerla o *sommarla* con la maggiore, si tolga da essa o si sottri, si potrà nella maniera medesima sottrarre i due dati coni l' uno dall' altro.

XXII.

*Se i prismi* LR, AH *sieno simili, saranno in triplicata ragione dei lati omologhi* LO, AD; Fig. 18. e 19.

AD; *ovvero delle altezze* LP, AF; *ovvero degl' interi perimetri* LMNO, ABCD.

Nei prismi simili le basi sono in duplicata ragione dei lati omologhi LO, AD, ovvero delle altezze LP, AF (*a*); dunque, essendo i prismi sempre in ragion composta della ragione delle basi e dell'altezze (*b*), sarà la ragione dei prismi simili triplicata della ragione dell' altezze LP, AF, ovvero dei lati omologhi LO, AD, ovvero degl'interi perimetri LMNO, ABCD.

(*a*) *Def.* 23. *IX.*

(*b*) 6. *di qu.*

XXIII.

Anche *le piramidi, cilindri, e coni simili sono fra loro in triplicata ragione dei loro lati omologhi, ovvero dello loro altezze, o assi.*

XXIV.

Fig. 10. *Se* dunque *il cono* AEC *sia segato col circolo* GHIK *parallelo alla base, sarà l'intero cono* AEC *al cono simile* GEI *in triplicata ragione dell' altezza* XE *ad* EZ; *ovvero del raggio* XA *a* ZG; *ovvero del lato* AE *ad* EG.

XXV.

Onde *prese dopo le due rette* XE, *ed* EZ *due altre continuamente proporzionali* M, N, *sarà l'istesso cono* AEC *al cono* GEI *come la retta* XE *ad* N.

Poichè tanto l'intero cono AEC al cono GEI (*c*), quanto la retta XE alla retta N (*d*) sono in triplicata ragione di XE ad EZ.

(*c*) 23. *di qu.*

(*d*) 3. *II.*

XXVI.

E però *togliendo dalla retta* XE *la parte* XO *uguale ad* N, *sarà per conversione di ragione come* XE *ad* EO, *così l' intero cono* AEC *al tronco rimanente* AI.

XXVII.

Fig. 12. *Qualsivoglia cono retto* AEC *è uguale ad un*

*un cono, che abbia per base un circolo uguale alla superficie conica* AEC, *e per altezza una retta uguale alla* XT, *che si tiri dal centro* X *perpendicolare al lato* EC.

La superficie conica AEC sta al circolo della sua base come EC a CX (*a*), ovvero per la si- (*a*) 31. IX. miglianza dei triangoli rettangoli ECX, EXT, come la retta EX ad XT; dunque la superficie conica AEC, ovvero il circolo, o base del nuovo cono, sarebbe alla base del cono dato AEC reciprocamente come l'altezza XE all'altezza XT, onde i coni sarebbero fra loro uguali; (*b*) e nell'istessa maniera si proverebbe, che il cono GEI sarebbe uguale ad un cono, che avesse per base un circolo uguale alla superficie conica GEI e per altezza una retta uguale alla perpendicolare ZS. (*b*) 18. di qu.

## XXVIII.

*Il solido rotondo generato dal quadrilatero* XGEI *intorno all'asse* XE *è uguale al cono, che abbia per base un circolo uguale alla superficie conica* GEI, *e per altezza una retta uguale alla perpendicolare* XT.

Il cono GEI sta al cono GXI, come EZ a ZX (*c*), e componendo il cono GEI agli due coni insieme GEI, GXI, ovvero al rotondo solido XGEI, come EZ ad EX, ovvero (*d*) ZS ad XT; ovvero come il cono che avesse la base uguale alla superficie conica GEI, e l'altezza ZS, al cono che avesse per base l'istessa superficie conica GEI e per altezza la retta XT; ma il cono GEI è uguale al cono, che abbia per base la superficie conica GEI, e per altezza la retta ZS (*e*); dunque i due coni insieme GEI, GXI, o 'l rotondo solido XGEI è uguale al cono che abbia per base la superficie conica GEI, e per altezza la retta XT. (*c*) 15. di qu. (*d*) 2. VII. (*e*) Ant.

XXIX.

XXIX.

Dunque *l' anello, o rotondo solido scavato generato dalla rivoluzione del triangolo* AGX *intorno all' asse* XE *è uguale al cono, che abbia la base uguale alla superficie del tronco del cono* AI, *e l' altezza uguale alla perpendicolare* XT.

L' intero cono AEC è uguale ad un cono che abbia per base l'intera superficie conica AEC, e per altezza la retta XT (*a*); ed il solido rotondo XGEI è uguale al cono che abbia per base la superficie conica GEI, e l'altezza medesima XT (*b*), dunque il rotondo solido scavato o anello che resta, sarà uguale al cono che abbia per base la rimanente superficie curva del tronco AI, e l'istessa altezza XT.

(*a*) 27. *di qu.*

(*b*) *Ant.*

XXX.

*Qualsivoglia solido scavato descritto dal triangolo* XIH *sarà sempre uguale ad un cono, che abbia la base uguale alla superficie conica dell' istesso solido descritta dalla retta* IH, *e per altezza la perpendicolare* XT.

Poichè il cono intero AEC è uguale ad un altro cono, che avesse per base un circolo uguale all'intera superficie conica descritta dal lato EC, e per altezza la perpendicolare XT (*c*), ed il solido rotondo generato dal triangolo XEH è uguale (*d*) ad un cono, che avesse per base un circolo uguale alla superficie conica descritta dalla retta EH, e per altezza la perpendicolare XT, sarà ancora il solido scavato descritto dal triangolo XHC uguale ad un cono, che abbia la base uguale alla superficie conica dell' istesso solido descritta dalla linea CH, e l'altezza XT, e però sottratto (*e*) questo solido dall' altro solido generato dal triangolo XIC; il quale si è dimostrato (*f*) uguale ad un cono, che abbia la base

(*c*) 27. *di qu.*

(*d*) 28. *di qu.*

(*e*) 21. *di qu.*

(*f*) *Ant.*

se uguale alla superficie conica descritta dalla retta IC, resterà il solido descritto dal triangolo XIH uguale ad un cono, che abbia la base uguale alla rimanente superficie conica descritta dalla retta IH, e l'altezza uguale ad XT.

## XXXI.

*Se il quadrante* YADB, *o l'intera circonferenza del semicircolo* YABCK *si divida in quantesivoglia parti uguali, ovvero se nel semicircolo s'inscriva un poligono di quantisivoglia lati, sarà il solido sferale generato dal poligono ravvolto intorno all'asse* OB *sempre uguale al cono, che abbia per base un circolo uguale alla superficie dell'istesso solido sferale, e per altezza la perpendicolare* OM. Fig. 31.

Il rotondo solido, o cono generato dal triangolo ODB è uguale al cono, che ha la base uguale alla superficie conica descritta dal lato DB, e per altezza la perpendicolare OM, ovvero ON (a), ed il rotondo solido scavato fatto dalla rivoluzione del triangolo OAD è uguale al cono, che ha la base uguale alla superficie conica fatta dal lato AD, e per altezza l'istessa perpendicolare ON, e così dicendo sempre di tutti gli altri rotondi solidi scavati descritti dai triangoli OAY; dunque tutti insieme i solidi rotondi, ovvero il solido sferale sarà uguale al cono, che ha per base la superficie del solido sferale inscritto nell'emisfero, e per altezza la perpendicolare OM.

(a) 28. di qu.

## XXXII.

E però *qualsivoglia solido sferale descritto dentro la sfera da un poligono intero inscritto nel circolo, sarà sempre uguale ad un cono, che abbia la base uguale alla superficie intera dell'istesso solido sferale, e l'altezza uguale alla perpendicolare* OM.

XXXIII.

## XXXIII.

Fig. 14. *La sfera è uguale al cono, che ha per base un circolo uguale alla superficie sferica, e per altezza il raggio dell' istessa sfera.*

Poichè la sfera è un solido sferale composto d' infiniti lati, e la perpendicolare ad uno di questi lati è lo stesso raggio, la sfera istessa, a similianza di tutti gli altri solidi sferali, sarà uguale al cono, che ha la base uguale alla superficie sferica, e l'altezza uguale al raggio.

*O pure* prese le rette FM, FN uguali all'asse FB, e fato il cono MON la sfera sarà composta di tante superficie sferiche concentriche quanti sono i punti del raggio OF, siccome altrettanti ancora saranno i circoli nel cono MON, quanti sono i punti nello stesso raggio OF. Concepiscasi dunque la superficie sferica, che passi per qualsivoglia punto K descritta dal circolo KRU, e nel cono il circolo descritto dal diametro IKQ, e sarà la (*a*) superficie sferica descritta dal circolo FHBI alla superficie sferica descritta dal circolo KRU come il circolo FHBI al circolo KRU, cioè (*b*) come il quadrato dell'asse FB al quadrato dell'asse KU, ovvero come il quadrato di FO al quadrato di KO, ovvero (*c*) come il quadrato di FM al quadrato di KP, ovvero come il circolo fatto dal raggio FM al circolo fatto dal raggio KP; onde, siccome il circolo fatto dal raggio FM è uguale alla superficie sferica fatta dalla circonferenza FHBI, così il circolo fatto dal raggio KP sarà uguale alla superficie sferica fatta dalla circonferenza KRU, e così qualsivoglia superficie sferica nella sfera sarà sempre uguale al circolo corrispondente del cono; dunque tutte insieme le superficie sferiche della sfera, cioè l'istessa sfera, saranno uguali a tutti insieme i circoli del cono, cioè all'istesso cono.

(*a*) 43. IX.

(*b*) 28. VIII.

(*c*) 27. VII.

XXXIV.

## XXXIV.

*L'emisfero* HFI *è doppio del cono inscritto* HFI.

Il cono MON al cono ugualmente alto HFI sta come il circolo della base fatto dal raggio FM, ovvero FB al circolo della base fatto dal raggio OH, ovvero OF (*a*); ma il circolo del raggio FB è quadruplo del circolo del raggio OF, dunque il cono MON, ovvero (*b*) l'intera sfera è quadrupla del cono HFI, e perciò l'emisfero sarà doppio dell'istesso cono HFI. (*a*) 4. *di qu.* (*b*) *Ant.*

## XXXV.

*Il cilindro circoscritto alla sfera è sesquialtero dell'istessa sfera.*

L'emisfero circoscritto al cono è doppio del cono istesso (*c*), ovvero sta ad esso come il 2. all'1. ed il cilindro circoscritto all'istesso cono, o emisfero è triplo dell'istesso cono (*d*), ovvero sta ad esso come il 3. all'1. dunque il cilindro circoscritto all'emisfero è all'emisfero, ed il cilindro intero circoscritto all'intera sfera, sarà alla sfera come il 3. al 2. ovvero come il 6. al 4. cioè in ragione sesquialtera. (*c*) *Ant.* (*d*) 11. *diqu.*

## XXXVI.

*Se all'istessa sfera si circoscriva il cono equilatero ed il cilindro, il cono equilatero sarà sesquialtero del cilindro.* Fig. 20.

Poste le rette DG, GH uguali all'asse DI, si tirino le rette OG, OA, OC, OH, e si concepiscano i coni descritti dai triangoli GOH, AOC intorno all'asse OD. Perchè BD è a DA come AD a DO, ed il quadrato della BD è triplo del quadrato della AD (*e*); sarà la perpendicolare DB tripla del raggio OD (*f*), e il cono equilatero ABC circoscritto alla sfera triplo del cono AOC (*g*), cioè sarà ad esso come il 9. al 3.; e perchè il quadrato o circolo del (*e*) 50. *IX.* (*f*) 12. *VII.* (*g*) 15. *di qu.*

lato DA al quadrato o circolo di OA, ovvero del diametro DI, ovvero per costruzione del raggio DG, sta come il 3. al 4. sarà il cono AOC al cono GOH come il 3. al 4. e però il cono equilatero ABC al cono GOH sarà come il 9. (a) 13. al 4. ma la sfera, ovvero (a) l'istesso cono GOH, di qu. al cilindro circoscritto alla sfera sta come il 4. (b) Ant. al 6. (b); dunque il cono equilatero ABC sarà al cilindro come il 9. al 6. cioè in ragione sesquialtera.

## XXXVII.

*Se* dunque *intorno all' istessa sfera sia descritto il cono equilatero ed il cilindro, il cono equilatero, il cilindro, e la sfera saranno in continua proporzione sequialtera.*

## XXXVIII.

E però *quella ragione sesquialtera, che si* (c) 50. IX. *trova* (c) *nel cono equilatero, cilindro, e sfera quanto alla superficie, si verifica ancora quanto alla solidità.*

## XXXIX.

Fig. 16. Finalmente *le sfere* ABCD, EFGH *sono in triplicata ragione dei loro assi* AC, EG.

Poichè, essendo circoscritti alle sfere medesime i cilindri, saranno questi simili per essere i circoli delle loro basi come i quadrati degli assi, o (d) 28. VIII. altezze (d), onde i cilindri saranno in triplicata (e) 25. di qu. ragione delle loro altezze, o assi (e); dunque anche le sfere, che sono parti simili, cioè due ter- (f) 35. di qu. zi dei cilindri circoscritti (f), saranno fra loro in triplicata ragione dei loro assi.

## XL.

Fig. 60. *Qualsivoglia settore sferico generato dalla rivoluzione del settore circolare* ABCD *intorno all' asse* EB *è uguale al cono fatto dalla rivoluzione del triangolo* FDB, *che abbia per al-*

*altezza il raggio* BD, *e per baſe la retta* FB *uguale alla corda* BA.

Per qualſivoglia punto I ſi tiri nel triangolo la retta IO parallela alla baſe, e deſcrivaſi il circolo MIN. Per eſſere dai lati uguali BD, DA tolte le parti uguali ID, DM, ſaranno i lati BD, AD diviſi proporzionalmente in I, M (*a*), e ſaranno le rette BA IM parallele, e però BA ad IM come BD a DI, ovvero BF ad IO, onde (*b*) il circolo fatto dal raggio BA al circolo fatto dal raggio IM, ſarà come il circolo del raggio BF al circolo del raggio IO, e permutando il circolo del raggio BF nel cono ſarà al circolo del raggio, ovvero (*c*) alla ſuperficie sferica fatta dall'arco BA, come il circolo del raggio IO nel cono al circolo del raggio IM, ovvero alla ſuperficie sferica fatta dall'arco IM; ma il circolo del raggio BF poneſi uguale al circolo del raggio BA, ovvero alla ſuperficie sferica dell'arco BA (*c*); dunque anche il circolo del raggio IO ſarà uguale alla ſuperficie sferica dell'arco IM, e così ſempre qualſivoglia circolo nel cono ſarà uguale alla ſuperficie sferica fatta dall'arco corriſpondente nel ſettore, dunque tutti inſieme i circoli del cono, ovvero il cono iſteſſo, ſaranno uguali a tutte inſieme le ſuperficie sferiche nel ſettore, o all'iſteſſo ſettore.

(*a*) 27. VI.
(*b*) 13. VII.
(*c*) 43. IX.

## XLI.

*La ſcavata porzione di sfera che reſta, fatta dal ſettore* AECD *è uguale al cono, che ha per altezza l'iſteſſo raggio* BD, *o* ED, *e per baſe il circolo fatto dal raggio* EA.

L'intera sfera è uguale al cono, che per altezza ha il raggio BD, e per baſe il circolo fatto dal raggio BE; (*d*) ed in conſeguenza è uguale a due coni, che abbiano per altezza l'iſteſſo raggio BD, e per baſi i circoli fatti dai raggi BA, AE, che ſono uguali al circolo fatto dal raggio BE (*e*); ſe dunque il ſettore sferico ABCD è

(*d*) 33. *di qu.*
(*e*) 28. VIII.

uguale al primo cono, che ha per altezza il raggio BD, e per base il circolo fatto dal raggio
(a) Ant. BA (a), la rimanente proporzione di sfera sarà uguale al secondo cono, che ha per altezza il raggio BD, e per base il circolo fatto dal raggio AE.

## XLII.

*Se si faccia, che come sta il quadrato minore di* AH, *o* AC *al quadrato maggiore di* AB, *o* FB, *così stia la retta* DB *ad un' altra retta* DP (*b*), *il segmento sferico* ABC
(b) 12. VII. *starà al cono inscritto* ABC *come la retta* PH *alla retta* HB *altezza del segmento.*

Dal punto P congiungasi in A e in C, e si concepisca prodotto il cono APC. Il cono APC
(c) 15. di qu. sta al cono ADC come la PH alla HD (*c*); dunque sommando i due coni APC, ADC (*d*)
(d) 2C. di qu. saranno essi eguali ad un cono, che abbia la lo-
(e) 17. di qu ro medesima base per base, ed ambe le altezze HP HD per altezza (*e*); e questo cono starà al cono FDG in ragion composta della base, o circolo, o quadrato di AC alla base, o circolo, o quadrato di FG, e dell'altezza PD all'altezza DB; ma la ragione della base, o quadrato AC alla base, o quadrato FG, e dell'altezza PD all'altezza DB è reciproca, perchè si è fatto il quadrato di AC (che è base del cono ADC) al quadrato di FB (che è base del cono FDP) come DB (che è altezza del cono FDG) a DP (che è altezza del cono ADC; dunque il cono eguale a' due coni, o i due coni APC, ADC saranno eguali al cono FDG; ma il cono FDG è eguale al settore
(f) 40. di qu. ABCD (*f*), dunque anche i due coni saranno eguali al settore stesso; onde tolto di comune il cono ADC, resterà il segmento ABC eguale al cono APC; ma il cono APC sta al cono ABC
(g) 14. di qu. inscritto nel segmento come PH ad HB (*g*), dun-

dunque anche il segmento APC starà al cono inscritto ABC come PH ad HB altezza del segmento.

## XLIII.

Quindi si può facilmente *conoscere ed esprimere in linee rette la ragione, che si ritrova fra la sfera* ABCE, *e qualsivoglia suo segmento o porzione* ABC.

Poichè conoscendosi la ragione del segmento ABC al cono inscritto ABC (*a*), la ragione del cono ABC al cono FDG, ovvero al settore sferico ABCD (*b*) eguale all'istesso cono FDG (*c*), e la ragione (*d*) del cono FDG al cono che fosse eguale alla intera sfera ABCE (*a*), (*c*) sarà conosciuta ancora, per egualità ordinata, la ragione del segmento sferico ABC alla sfera ABCE, e dividendo ancora la ragione dei segmenti sferici ABG, AEC tra di loro.

(*a*) *Ant.*
(*b*) 17. *di qu.*
(*c*) 50. *di qu.*
(*d*) 33. *di qu.*

# LIBRO XI.

## *Delle Curve, e Sezioni Coniche, e delle loro proprietà.*

SE in qualſivoglia genere di grandezza non ſi trovaſſero che poche ſpezie differenti fra loro con qualche piccola varietà, potrebbero qui terminare gli Elementi, o Inſtituzioni di Matematica, dopo di eſſerſi diffuſamente parlato finora di linee, di ſuperficie, e di corpi. Ma poichè oltre alle linee rette e circolari, ed oltre alle ſuperficie rettilinee e circolari, vi ſono infinite altre ſpezie di linee curve, ſuperficie curvilinee, e di ſolidi, che eſſe producono, quì ſi apre ed incontraſi una più nobile, ed ammirabile varietà di coſe, che tutte meritano di eſſere diſtintamente conſiderate. E perchè fra tutte le infinite ſpezie di linee curve, o figure curvilinee, le più celebri e ragguardevoli ſono quelle, che ſi formano nella ſuperficie curva del cono, quando egli è ſegato da un piano, ſi parlerà nei due Libri che ſeguono, delle figure e ſezioni coniche, e dei ſolidi che ſi producono dall'iſteſſe curve o figure. Quanta poi ſia la bellezza di tutte quelle Propoſizioni, che ſi dimoſtrano in queſta parte di Geometria ritrovata, per quanto credeſi, da Pitagora, o da Menecmo ſcolare di Eudoſſo, ed accreſciuta e diſpoſta in otto Libri da Apollonio Pergeo, non ſi può meglio e più chiaramente conoſcere, che nel riflettere attentamente ſopra ciaſcuna di quelle. Queſto ſolamente io giudico doverſi quì ben giuſtamente oſſervare, che ſe gli Antichi ſtudiarono queſta Scienza delle Sezioni coniche per l'ammirabili verità che vi ſcoprivano, incomparabilmen-

mente maggiore esser deve il piacere, con cui nei tempi nostri si studia, dopo che ella è stata mirabilmente accresciuta da tanti illustri Geometri dell'età nostra: e se molti prima vi si applicavano allettati dalla vaghezza delle speculazioni che s'incontravano, ora di più studiar si dee per l'incredibile utilità che ricavasi nell'altre Scienze, dopo che con l'esempio e scorta del Galileo i più nobili e sublimi fenomeni della Fisica, Ottica, e Astronomia si sono dedotti come da fonte inesausto e fecondissimo dalla dottrina delle Sezioni coniche, siccome potrà ciascuno nello studio di quelle osservare.

# DEFINIZIONI.

## I.

*Sezioni coniche*, ovvero *curve coniche* si dicono quelle, che si descrivono nella superficie curva del cono, quando il cono istesso è segato da un piano, il quale non passi per il vertice o cima dell'istesso cono; ma sia perpendicolare al piano, che passa per l'asse istesso del cono.

## II.

*Figure coniche*, le quali ancora comunemente si chiamano *sezioni coniche*, sono quelle, che sono descritte nel piano che sega il cono, o la di lui superficie; e però sono contenute dalla curva conica; ovvero, se il piano segante la superficie del cono seghi anche il circolo della base, sono comprese dalla curva conica, e insieme dalla comune sezione della base col piano segante.

## III.

Concepiscasi per esempio il cono ABC, il quale sia diviso o segato in mezzo dal triangolo per l'asse ABC, e si seghi l'istesso cono da un altro piano DEFG perpendicolare all'istesso piano, o triangolo ABC, e sia la loro comune Fig. 21. 22. 23.

sezione la retta EG; la curva DEF, che si trova nel piano segante DEFG, ed insieme nella superficie curva del cono, sarà la curva, o sezione conica; e l'intera figura, o superficie DEFGD contenuta, o dalla sola curva, come nella figura 23. ovvero dalla curva, ed insieme dalla retta DF, come nelle figure 21. e 22. sarà la sezione e figura conica.

IV.

Fig.23. Se la retta QP comune sezione dei piani ABC, MQNP seganti il cono sia parallela ad AC diametro della base del cono, ovvero base nel triangolo per l'asse, ed in conseguenza il piano MQNP sia parallelo al circolo della base, la sezione MQNP
(a) IX. 18. sarà (a) circolo.

V.

Circolo ancora sarebbe la sezione DEFG, se il cono fosse obliquo o scaleno, e la comune sezione de' piani EG fosse *subcontraria* ad AC; vale a dire se il triangolo EBG fosse simile, ma contrariamente posto al triangolo CBA.

VI.

Fig.13. Se la sezione o asse EG non sia parallelo ne subcontrario ad AC, ma ad una retta BY, che tirata dal punto B cada fuori del cono o triangolo ABC, e però l'asse EG seghi ambedue i lati del cono AB, CB, la sezione DEFG si dirà *ellisse*.

VII.

Fig.22. Se la sezione o asse EC sia parallelo alla retta BC lato del triangolo tirato per l'asse, la sezione DEF sarà *parabola*.

VIII.

Fig.21. Se la retta EG, ovvero l'asse della sezione, sia parallelo all'asse del cono BO, ovvero ad un'altra retta BY, che tirata dal punto B cada dentro del triangolo ABC, e perciò la EG prolungata verso E concorra finalmente in qualche punto

punto X col lato CB prolungato, la sezione o figura DEF dicasi *iperbola*.

IX.

Se prolungati i lati AB, CB, intendasi descritto un'altro cono simile, ed opposto al cono ABC; e prolungato il piano segante DEF, in esso, e nella superficie del nuovo cono d'intorno all'asse XZ intendasi descritta o formata l'iperbola TXU uguale all'iperbola DEF, le due iperbole opposte ed uguali TXU, DEF si chiamano *sezioni opposte*; ed il punto H, che divide in mezzo la retta EX, dicesi *centro* dell'iperbole.

X.

La retta EX, che ritrovasi fra le due iperbole opposte, ovvero fra i loro vertici E, X, chiamasi *lato trasverso*: siccome nell'ellissi, o parabola il lato trasverso è il medesimo loro asse EG.

XI.

In qualsivoglia sezione conica il punto E dicesi *vertice*, o *punta* della sezione; e la retta EK, che per il vertice E si tira perpendicolare all'asse EC, dicesi *tangente verticale*.

XII.

Qualsivoglia retta MN, che dentro la sezione si tiri perpendicolare all'asse EG, sarà dall'asse medesimo divisa in mezzo nel punto I, poichè tirato per I la retta MN parallela a DF, il piano MQNP sarà circolo, il di cui diametro QP segherà in mezzo qualsivoglia *ordinata* MN.

PRO-

# PROPOSIZIONI.

## I.

Fig.22. *SE nella parabola* DEF *si tiri per qualsivoglia punto* I *dell' asse* EG *la retta* MN *parallela alla* DF *base della sezione, sarà il quadrato di* DG, *ovvero* GF *al quadrato di* MI, *ovvero* IN, *come l' altezza* GE *all' altezza* EI.

Per l' istesso punto I nel piano o triangolo dell'asse ABC tirisi la retta QP parallela al diametro AC (*a*), e per le due rette MN, QP parallele alle due rette DF, AC si stenda il piano MQNP, che sarà (*b*) parallelo alla base, e però circolo; onde, siccome il quadrato dell' ordinata DG è sempre uguale al rettangolo di AG in GC (*c*), così il quadrato dell'ordinata MI sarà uguale al rettangolo di QI in IP, ed in conseguenza il quadrato di DG sarà al quadrato di MI come il rettangolo di AG in GC al rettangolo di QI in IP; ma, per essere uguali i lati GC, IP (*d*), i due rettangoli sono fra loro come gli altri lati AG, QI (*e*), dunque il quadrato dell'ordinata DG sarà al quadrato dell'ordinata MI come la retta AG a QI, ovvero (*f*) come l'altezza GE all'altezza EI.

(*a*) 2. IX. (*b*) 7. IX. (*c*) 15. VII. (*d*) 10. IV. (*e*) 9. VI. (*f*) 2. VII.

## II.

Fig.23. *Nell' ellisse* DEFGD *il quadrato dell' ordinata* DU *sarà al quadrato dell'ordinata* MI, *come il rettangolo delle parti* EU, UG *al rettangolo delle parti* EI, IG.

Si tirino per l'ordinate DF, MN i circoli paralleli fra loro, ed alla base AC, e sarà (*g*) il quadrato dell'ordinata DU uguale al rettangolo di

(*g*) 16. VII.

di ZU in UX; ed il quadrato dell'ordinata MI uguale al rettangolo di QI in IP; ma il rettangolo di ZU in UX sta (*a*) al rettangolo QI in IP in ragione composta di ZU a QI, e di UX ad IP; dunque anche il quadrato di DU sarà al quadrato di MI in ragione composta di ZU a QI, e di UX ad IP, ovvero (*b*) di EU ad EI, e di UG ad IG; ma ancora il rettangolo di EU UG sta al rettangolo di EI in IG in ragione composta di EU ad EI, e di UG ad IG (*b*); dunque il quadrato dell'ordinata DU sarà al quadrato dell'ordinata MI come il rettangolo di EU in UG al rettangolo EI in IG.

(*a*) 13. VI.

(*b*) 2. VII.

III.

Poichè dunque, *se si prendano due ordinate* VP, FQ *egualmente distanti dal centro* O, il rettangolo di AV in VB è uguale al rettangolo di AF in FB (*c*), anche *il quadrato di* VP *sarà eguale al quadrato di* FQ (*d*), *e la* VP *eguale alla* FQ; e potendosi (*d*) *ma* provare il medesimo di due punti qualunque equidistanti dal centro O, *la metà della curva* TA *sarà eguale perfettamente all'altra metà* TB.

Fig. 42.

(*c*) 11. VI.

IV.

Onde *se da due punti qualunque* M, N, *equidistanti dal centro* O *si tirino alla ellisse le oblique* MK, NH, *che facciano gli angoli* LMN, LNM *eguali, le stesse* MK, NH *saranno eguali tra loro.*

Tirata l'ordinata OI del centro, si concepisca la parte IOA rivoltarsi sulla parte IOB. Per essere eguali gli angoli LMN, LNM, anche ML sarà eguale ad LN (*e*), onde FO si adatterà sopra OA, MO sopra ON, AM sopra NB, ML sopra LN, ed il punto L sopra se stesso;

(*e*) 18. III.

ma

ma per essere eguali gli angoli MLO, NLO (a), saranno eguali gli angoli opposti HLI, KLI (b), dunque anche la retta LH caderà sulla retta LK; ma la curva IA è eguale alla curva IB, dunque l'una si adatterà sull' altra, e però anche LH si adatterà sopra LK, onde LH, LK saranno eguali; ma ML era eguale ad LN, dunque ML con LK cioè MK sarà eguale ad NL con LH cioè ad NH.

(a) 16. III. (b) 9. III.

V.

Fig. 21. *Nell' iperbola* DEF *il quadrato dell'ordinata* DG *sarà al quadrato dell' ordinata* MI, *come il rettangolo delle rette* XG, GE *al rettangolo delle rette* XI, IE.

Tirisi come prima il circolo MQNP, e sarà (c) il quadrato dell'ordinata DG uguale al rettangolo di CG in GA, ed il quadrato dell' ordinata MI uguale al rettangolo di PI in IQ; ma il rettangolo di CG in GA al rettangolo di PI in IQ sta (d) in ragione composta della ragione del lato CG a PI, della ragione di GA ad IQ; dunque ancora il quadrato di DG al quadrato di MI sarà in ragione composta di CG a PI, e di GA ad IQ, ovvero (e) delle ragioni di GX ad XI, e di GE ad EI; ma anche il rettangolo di XG in GE al rettangolo di XI in EI sta in ragione composta di XG ad XI, e di GE ad EI (f); dunque il quadrato dell'ordinata DG al quadrato dell'ordinata MI sarà come il rettangolo di XG in GE al rettangolo di XI in IE.

(c) 16. VII. (d) 13. VI. (e) 2. VII.

VI.

Fig. 26. *Se nella parabola* ABC *dopo l' asse* AB, *e l' ordinata* AC, *si pigli terza porporzionale* BD, *e però* (g) *il quadrato dell' ordinata* AC *uguale al rettangolo di* AB *in* BD, *sarà il qua-*

(g) 19. VI.

*quadrato di qualsivoglia ordinata* EF *uguale al rettangolo di* EB *in* BD.

Il quadrato di AC al quadrato di EF sta come AB a BE (*a*); cioè (*b*) come il rettangolo di AB in BD al rettangolo di EB in BD; dunque, siccome il quadrato di AC poneſi uguale al rettangolo di AB in BD, così ancora il quadrato di EF sarà uguale al rettangolo di EB in BD. (*a*) 1. *di que.* (*b*) 9. *VI.*

Chiamisi la retta BD *parametro*, o *lato retto* della parabola; l'asse AB *lato trasverso*; e la retta DG tirata parallela all' asse *regolatrice* della parabola; è, se la retta BD sia uguale all'asse AB, chiamasi la parabola *equilatera*.

VII.

*Se dividendosi in mezzo il parametro, o lato retto* BD *in* X *si tiri la retta* XY *parallela all' asse* AB, *o alla regolatrice* DG, *sarà sempre il quadrato dell' ordinata* EF *doppio del rettangolo corrispondente* EX.

Poichè essendosi il quadrato dell' ordinata EF uguale al rettangolo ED (*c*), siccome il rettangolo ED è doppio del rettangolo EX (*d*), così ancora il quadrato di EF sarà doppio dell'istesso rettangolo EX. (*c*) *Ant.* (*d*) 7. *VI.*

VIII.

*Se nell' ellisse ed iperbola si faccia come il rettangolo di* AC *in* CB *al quadrato dell' ordinata* CD, *così il lato trasverso* AB *alla retta* BE *perpendicolare all' asse* AB, *e tirata l'* AE *si prolunghi l' ordinata* CD *in* F, *sarà sempre il quadrato dell' ordinata* CD *uguale al rettangolo di* BC *in* CF; *e il quadrato di qualsivoglia altra ordinata* HI *uguale al rettangolo di* BH *in* HK. Fig. 24. 27.

Poichè per ipotesi il rettangolo di AC in CB

sta

sta al quadrato di CD come AB a BE, ovvero (a) come AC a CF, ovvero (b) come il rettangolo di AC in CB al rettangolo di FC in CB, sarà il rettangolo di AC in CB il quadrato di CD come l'istesso rettangolo di AC in CB al rettangolo di FC in CB; e però il quadrato di CD sarà uguale al rettangolo FC in CB. E perchè il rettangolo di AC in CB sta al quadrato dell'ordinata CD come il rettangolo di AH in HB al quadrato dell'ordinata HI (c), siccome il rettangolo di AC in CB ponesi al quadrato di CD come AB a BE, così sarà ancora il rettangolo di AH in HB al quadrato di HI come AB a BE, ovvero (a) AH ad HK, cioè (b) come il rettangolo di AH in HB al rettangolo di KH in HB; e perciò il rettangolo di AH in HB avrà l'istessa ragione tanto al quadrato di HI, quanto al rettangolo di KH in HB, onde il il quadrato dell'ordinata HI sarà sempre uguale al rettangolo di KH in HB, o di BH in HK.

(a) 2. VII. (b) 7. VI. (c) 25. di qu.

Chiamisi la retta BE *lato retto*, o *parametro* dell'elisse, o iperbola; la retta AFE *regolatrice*: e se nell'iperbola il parametro, o lato retto BE sia uguale al lato trasverso AB, l'iperbola dicasi *equilatera*.

Dalla passata proposizione appariscе perchè le sezioni si chiamino *elisse* ed *iperbola*. Poichè essendo nell'elisse il quadrato dell'ordinata CD uguale al rettangolo CFUB, e però minore del trapezio CFEB, la sezione chiamasi *elisse*, o *deficiente*; siccome, per essere nell'iperbola il quadrato dell'ordinata CD uguale al rettangolo CFGB, e però maggiore del trapezio CFEB, la sezione chiamasi *iperbola*, o *eccedente*.

## IX.

Dal che si vede, che *tirando per il centro* O *l'ordinata* OP, *e prolungandola in* Q,

cala-

*calata* QP *parallela ad* AB, *il quadrato di* OP *sarà eguale alla quarta parte del rettangolo di* AB *in* BE.

Poichè essendo AB divisa in mezzo in O, anche EB sarà divisa in mezzo in P (*a*), per essere AB parallela a QP; e però il rettangolo di PB, o di QO in OB sarà la quarta parte del rettangolo di AB in BE (*b*); ma il rettangolo di QB in OB è uguale al quadrato di OP (*c*), dunque il quadrato di OP è eguale alla quarta parte del rettangolo di AB in BE.

(*a*) 27. VI.
(*b*) 13. VI.
(*c*) *Ipot.*

X.

*Poste l' istesse cose, se i due lati dell' elisse ed iperbola si dividano in mezzo nei punti* O, U, *per i quali si tiri la retta* OMU, *sarà il quadrato di qualsivoglia ordinata* HI *sempre doppio del quadrilatero, o trapezio* UMHB. Fig. 25. 29.

Essendo i lati AB, BE divisi in mezzo, o proporzionalmente in O, U, le rette (*d*) AE, OU saranno parallele, e però la retta KM sarà parallela ed uguale alla retta EU (*e*), ovvero UB; onde (*f*) il triangolo KMN sarà uguale al triangolo BUN, ed aggiunto il trapezio comune BNMH, ancora il triangolo KHB sarà uguale al trapezio UMHB; ma il quadrato dell' ordinata HI è sempre uguale al rettangolo di KH in HB (*g*), e perciò (*h*) doppio del triangolo KHB; dunque il quadrato istesso dell'ordinata HI sarà sempre doppio del quadrilatero, o trapezio UMHB.

(*d*) 27. VI.
(*e*) 10. *IV.*
(*f*) 11. *III.*
(*g*) 8. *di qu.*
(*h*) 22. *VI.*

Chiamisi la retta OU *semiregolatrice*, ed il punto O *centro* dell' elisse ed iperbola.

XI.

*Dato l' asse, o lato trasverso* GE, *ed il lato retto, o parametro* KE *descrivere la parabola.* Fig. 22.

Si tirino per l'istesso asse GE due piani ABC, DEF

DEF, che si seghino perpendicolarmente, e nel piano DEF si tirino per diritto le rette IM, IN perpendicolari ad EG, e medie proporzionali (a) fra le rette KE, EI, ed intorno la retta MN come diametro o corda descrivasi il circolo MQNP perpendicolare all'istesso piano ABC, e tirando nel piano ABC per il punto P la retta CB parallela all'asse GE, e per i punti E, Q la retta AB, col vertice B, e lato BA, o BC descrivasi intorno alla circonferenza MQNP la superficie conica, la quale tagliata dal piano DEF sarà la parabola DMENF intorno all'asse GE, e lato retto KE.

(a) 17. VII.

## XII.

Che se fosse *dato l'asse* GE, *e la base* DE *si descriverebbe la parabola*.

Trovando (b) il parametro KE terzo proporzionale dopo GE, e DG metà della base, e coll'asse GE, e parametro KE si descriverebbe la parabola (c), poichè steso per il punto G il circolo AFCD parallelo al circolo QNPM, sarebbe DF l'istessa base data DF.

(b) 31. VI.

(c) Ant.

## XIII.

Fig. 23. *Dato l'asse, o lato retto* GE, *ed il parametro, o lato retto* KE *descrivere l'ellisse*.

Si tirino per l'istessa retta, o asse GE due piani ABC, GMDEFN, che si seghino perpendicolarmente, e tirando per qualsivoglia punto dell'asse U una retta perpendicolare ad EG, si faccia come KE ad EG, così il rettangolo di EU in UG al quadrato di UD, ovvero di UF, ed intorno alla DF come diametro o corda descrivasi il circolo DZFX perpendicolare al piano ABC, e tirando nell'istesso piano ABC per i punti E, Z, G, X due rette, che concorrano insieme nel punto B, col vertice B intorno alla circonferenza DZFX si descriva con le rette, o lati BC, BA la superficie conica, la quale es-

sen-

fendo segata dal piano GDEF tirato per le rette EG, DF perpendicolare al piano ABC, sarà la sezione; o elisse GDEFG intorno all'assidato EG, e lato retto KE.

XIV.

*Dato il lato trasverso* EX, *o il lato retto* KE, *e l'asse* EG *descrivere l'iperbola.* Fig. 21.

Si tirino per il punto G la retta DF perpendicolare alla retta EG, e la retta AC perpendicolare all'istessa DF, e steso per esse il piano AFCD si faccia come XE ad EK; così il rettangolo di XG in GE al quadrato di GD, ovvero di GF, ed intorno alla retta DF come diametro o corda si descriva il circolo AFCD, e tirisi per i punti A, E la retta AB; e per il punto X, e punto C la retta XC, che seghi la retta AB nel punto B, dal quale come vertice intorno alla circonferenza AFCD si descriva il cono ABC, il quale essendo segato dal piano tirato per D, E, F sarà la sezione, o iperbola DEF, che avrà il lato trasverso EX, il lato retto KE, ed asse EG.

La prova delle tre passate Propositioni si può facilmente dedurre da quello, che si è dimostrato nelle tre prime di questo Libro.

XV.

*Al dato punto* M *della sezione conica tirare la tangente.* Fig. 30. 31. 32.

Tirato il lato retto NF, la regolatrice QF, la semingolatrice CR, e l'ordinata MKB, si faccia come TK a KM così KM a KG, e si tiri la retta GM, che sarà tangente della sezione conica nel punto M, vale a dire prolungata, caderà tutta fuori della sezione conica.

Imperocchè preso nella retta GM qualsivoglia punto P, ed ordinata all'asse la retta PLU, per essere le tre rette TK, KM, KG continuamente proporzionali, sarà (*a*) il quadrato di KM uguale al rettangolo di TK in KG, e però (*b*) (*a*) 19. VI. (*b*) 22. VI.

doppio del triangolo TKG; ma l'istesso quadrato dell' ordinata KM è doppio del quadrilatero, o trapezio TKNR (*a*), dunque il triangolo TKG sarà uguale al quadrilatero, o trapezio TKNR, e tolto il trapezio comune TKNO, anche il rimanente triangolo ONG sarà uguale al rimanente triangolo TRO, e però il triangolo istesso ONG sarà maggiore del solo trapezio UDOR, ed aggiunto il comune trapezio DLNO, sarà il triangolo DLG maggiore del quadrilatero, o trapezio ULNR; ma, per essere le tre rette DL, LP, LG continuamente proporzionali, il quadrato di LP è uguale al rettangolo di DL in LG, e però doppio del triangolo DLG, ed in qualsivoglia sezione conica il quadrato dell' ordinata LH è doppio del quadrilatero, o trapezio ULNR; dunque siccome il triangolo DLG è maggiore del quadrilatero, o trapezio ULNR, così ancora il quadrato di LP sarà maggiore del quadrato di LH, e però la retta LP sarà maggiore della retta LH, onde il punto P caderà fuori della sezione conica; il che verificandosi ancora di qualsivoglia altro punto diverso dal punto M, sarà la retta GM tangente dell'istessa sezione nel dato punto M.

(*a*) 7. 10. *di qu.*

## XVI.

*Se nell' asse della sezione si pigli la retta* KS *uguale alla retta* TK *e si congiunga* SM, *sarà la retta* SM *perpendicolare alla tangente* MG.

Poichè, essendosi prese continuamente proporzionali le rette TK, KM, KG, sarà ancora SK a KM, come KM a KG, e però (*b*) l' angolo SMG sarà retto.

(*b*) 16. VII.

La retta SM chiamasi *normale*, e la retta SK *sunnormale*, o *suttangente*.

## XVII.

Fig. 31. *Nella parabola la sunnormale* KS *è sempre ugua-*

*uguale al semiparametro, o metà del lato retto* RN; *e la retta* GN *alla retta* NK.

Poichè, essendosi presa KS uguale a TK, la quale a cagione delle parallele RC, NS, è sempre uguale al semiparametro RN (*d*), sarà ancora la suttangente, o sunnormale KS sempre uguale all'istesso semiparametro RN; ed essendosi dimostrati uguali i triangoli TRO, ONG, sarà il lato GN uguale al lato TR, al quale similmente è uguale la (*b*) retta opposta NK. (*a*) 10. IV.

XVIII.

Quindi si potrà *tirare da qualsivoglia punto* G *preso nell'asse* KN *prolungato la tangente alla parabola* KNM, Fig. 31

Se pigliandosi la retta NK uguale alla retta GN, tirisi l'ordinata KM, e la retta GM, che toccherà la parabola nel punto M.

XIX.

Ma *nell'ellisse ed iperbola il semiparametro* RN *alla sunnormale* KS *sta come* NC *a* CK, *cioè come la distanza del semiparametro dal centro della sezione alla distanza dal centro istesso di quell'ordinata, alla quale corrisponde l'istessa sunnormale.* Fig. 32

Poichè essendo nei triangoli simili (*b*) TCK, RCN la RN a TK come NC a CK, sarà ancora la RN a KS, che si pone uguale a TK, come la distanza NC alla distanza CK. (*b*) 2. VII.

XX.

*Nell'ellisse ed iperbola la retta* CN *metà del loro trasverso è sempre media proporzionale fra le rette* GC, CK.

Per essere parallele le rette CT, QB, sarà BK a KQ come TK a KC (*c*), e permutando BK a KT come QK a KC; ma per essere parallele le (*c*) 3. VII.

rette BG, TN, come BK a KT così è ancora GK a KN; dunque sarà QK a KC come GK a KN, e però (a) i rettangoli di QK, KN, e di GK, KC saranno uguali fra loro; onde nell'elisse aggiunto di comune il quadrato di CK, sarà il rettangolo di GK in KC insieme col quadrato di CK, cioè (b) il rettangolo di GC in CK, uguale al rettangolo di QK in KN insieme col quadrato di CK, cioè (c) al quadrato di CN, e però (d) le rette GC, CN, CK saranno continuamente proporzionali.

(a) 18 VI.
(b) 22. VII.
(c) 26. VII.
(d) 19. VI.

Così nell'iperbola, essendo il rettangolo di GK in KC uguale al rettangolo di QK in KN, le loro differenze dall'istesso quadrato della CK saranno uguali fra loro; ma la differenza del rettangolo di GK in KC dal quadrato di CK è il rettangolo di GC in CK (e), e la differenza del rettangolo di QK in KN dal quadrato CK è quadrato di CN (f); dunque il rettangolo di GC in CK è uguale al quadrato della retta CN, e però le rette GC, CN, CK sono continuamente proporzionali.

(e) 24. VII.
(f) 27. VII.

## XXI.

Fig. 32. Donde apparisce, *che nell'iperbola il punto* G, *nel quale la tangente sega il lato trasverso, sempre cade sotto del centro* C.

Poichè, essendo uguali i rettangoli di QK in KN, e di CK in KG, siccome il rettangolo di QK in KN è minore del quadrato di CK, così ancora il rettangolo di CK in KG sarà minore dell'istesso quadrato di CK, e perchè il rettangolo di CK in KG sta al quadrato di CK come la retta KG alla retta KC (g), anche la retta KG sarà minore della retta KC, e però il punto G caderà sotto il centro C.

(g) 9. VI.

## XXII.

Quindi si potrà *da qualsivoglia punto* G *preso nell'asse* KN *prolungato, purchè nell'iper-*

*bola*

*bola il punto* G *sia sotto il centro* C, *tirare la tangente all'ellisse, o iperbola data* KNM.

Se trovandosi dopo le rette GC, CN la terza proporzionale CK si tiri l'ordinata KM, e si congiunga la retta GM, che toccherà in M l'ellisse ed iperbola data.

## XXIII.

*Se nella retta* CM *asse della parabola si ta-* Fig. 33.
*gli la retta* CE *uguale alla retta* CX *quarta parte del parametro, o lato retto* CF, *e tirata qualsivoglia retta* DB *parallela all'asse si tiri la retta* EB, *saranno gli angoli* GBD, HBE *fatti dalle due rette* DB, BE, *con la tangente* GH *sempre uguali fra loro.*

Si tirino l'ordinata BI, e la tangente verticale LC, che saranno ancora parallele fra loro; onde, siccome la retta IH è divisa in mezzo nel punto C (*a*), così ancora la retta BH sarà divisa in mezzo nel punto L, e però (*b*) la retta BI sarà doppia della retta LC, ed il quadrato di BI, sarà quadruplo del quadrato LC; ma il quadrato di BI, ovvero (*c*) il rettangolo di IC in CF, è quadruplo ancora del rettangolo di IC in CX, ovvero, per l'egualità dei lati di HC in CE; dunque il rettangolo di HC in CE sarà uguale al quadrato della retta LC, e però (*d*) l'angolo HLE sarà retto, e retto ancora ed uguale sarà l'angolo BLE; onde, essendo nei triangoli BLE, HLE anche i lati BL, HL uguali, ed il lato LE comune, saranno uguali ancora le loro basi BE, HE, e l'angolo LBE uguale all'angolo LHE (*e*), al quale è similmente uguale (*f*) l'angolo esterno GBD, e però gli angoli, GBD, LBE, o HBE saranno uguali fra loro.

(*a*) 17. *di qu.*
(*b*) 27. *VI.*
(*c*) 6. *di qu.*
(*d*) 16. *VII.*
(*e*) 16. *III.*
(*f*) 7. *IV.*

## XXIV.

Dunque *qualsivoglia raggio* DB, *che partendo da un lume cada sopra la curva, o su-*

*perficie concava parabolica nel punto* B, *dovrà nel riflettervi passare per il punto* E.

Poichè, dovendo il raggio DB nel riflettersi, secondo le leggi della Catottrica, formare l'angolo HBE, che chiamasi di *riflessione*, sempre uguale all'angolo GBD, che chiamasi d'*incidenza*, se il formar l'angolo HBE uguale all'angolo GBD compete solo alla retta, che si tira, o passa per il punto E, dovrà qualsivoglia raggio DB, che venga parallelo all'asse MC, nel riflettersi passare per E; siccome, se egli partisse dal lume collocato in E, e si riflettesse nel punto B, escirebbe in BD parallelo all'asse MC: e perchè tutti i raggi, che vengono paralleli all'asse MC, si uniscono insieme, e concorrono nel punto E, ed ivi uniti e raccolti esercitano gran forza fino ad accendervi il fuoco, perciò il punto E chiamasi *foco* della parabola, ovvero ancora *umbilico*.

## XXV.

Quindi apparisce, che *l'aggregato dei raggi incidenti e riflessi* DB, BE *è sempre uguale all'aggregato delle due rette* MC, CE.

Poichè, essendo sempre IC con CE uguale ad HB, ovvero ad EB, aggiunte di comune le rette uguali MI, DB, saranno ancora le due rette DB, BE sempre uguali alle due rette MC, CE.

## XXVI.

Fig. 34. *Se nella parabola* ABC *si tiri per il foco* F *l'ordinata* FD, *e si tirino per i punti* B, D *le tangenti* EG, BN, *sarà l'ordinata* FD *sempre uguale alla retta* BX *metà del parametro* BZ, *e la retta* BN *uguale alla retta* BF.

(*a*) 7. *VI.* (*b*) 6. *di qu.* Perchè la retta BF poneſi la quarta parte del parametro BZ, sarà ancora (*a*) il rettangolo di FB in BZ, ovvero (*b*) il quadrato uguale dell'ordinata

retta FD, la quarta parte del rettangolo di BZ in BZ, cioè del quadrato dell'istesso parametro BZ: ma anche il quadrato della retta BX è la quarta parte del quadrato dell'intero parametro BZ (*a*), dunque il quadrato dell'ordinata FD è uguale al quadrato del semiparametro BX, e però l'ordinata FD sarà uguale al semiparametro BX. E perchè nel triangolo DFG il lato DF è uguale al lato FG (*b*) sarà anche (*c*) il lato NB uguale al lato BG, ovvero alla retta BF. (*a*) 23. VII. (*b*) 23. di qu. (*c*) 2. VII.

## XXVII.

*Se dal foco* F *tiriſi alla curva parabolica qualſivoglia retta* FA, *e per il punto* A *paſſi l'ordinata* CE, *ſarà la retta* CE *ſempre uguale all' inclinata* FA.

Prolungato l'aſſe CB piglisi la retta CL uguale a CG, e ſarà la retta LF doppia dell'aſſe CB, ſiccome il parametro DZ è doppio della retta BX, o FD, ovvero FG, e però ſarà LF a CB come BZ ad FG, ed il rettangolo dell'eſtreme LF, FG uguale al rettangolo dell'intermedie CB, BZ (*d*), cioè (*e*) al quadrato dell'ordinata AC; onde aggiunto di comune il quadrato della retta CF, ſarà il rettangolo di LF in FG col quadrato di CF, cioè (*f*) il quadrato di CG, ovvero di CE, uguale ai quadrati di AC, CF, ovvero (*g*) al quadrato dell'inclinata FA, e perciò la retta CE ſarà uguale all'inclinata FA. (*d*) 18. VI. (*e*) 6. di qu. (*f*) 26. VII. (*g*) 20. VII.

## XXVIII.

*Se nella parabola* ABC *ſi tiri per qualſivoglia punto* D *la retta* NK *parallela all'aſſe* CB, *e la tangente* EG, *l'iſteſſa retta* NK *dividerà in mezzo qualſivoglia retta* AL, *che, dentro la parabola ſi tiri parallela alla tangente* EG. Fig. 35.

Si tirino per i punti A, L le ordinate EC, OM parallele all'iſteſſa tangente NB. Il triangolo AIC

sta al triangolo simile DGF come il quadrato di
(a) 10. AC al quadrato di DF (a), cioè, (b) come
VII. CB a BF, ovvero (c) come il rettangolo NC al
(b) 1 di qu. rettangolo NF; ma il triangolo DGF è uguale
(c) 9. VI. al rettangolo NF (d), per avere l'altezza FG
(d) 22. VI. doppia dell'altezza (e) BF; dunque anche il trian-
(e) 6. di qu. golo AIC sarà uguale al rettangolo NC; e perchè
il rettangolo NC sta al rettangolo NM come CB
a BM (f) cioè come il quadrato di AC al quadrato
di LM, ovvero (a) come il triangolo AIC al triango-
lo LIM, siccome il rettangolo NC è uguale al
triangolo AIC, così il rettangolo NM sarà ugua-
le al triangolo LIM; e però il rettangolo rima-
nente OC sarà uguale al rimanente trapezio ALMC,
e tolto di comune il trapezio LMCKQ, il triango-
lo OQL sarà uguale al triangolo equiangolo KQA,
e la retta AQ uguale alla retta QL.

Fig. 35. Che se la retta AL sega l'asse sotto la cima nel punto I, sarà il triangolo AIC al triangolo simile DGF come il quadrato di CA al quadrato di FD (a) ovvero (b) come CB a BF, ovvero come il rettangolo NC al rettangolo NF; onde, siccome il triangolo DGF è uguale al rettangolo NF, così anche il triangolo AIC sarà uguale al rettangolo NC, e tolto di comune il trapezio KQIC, sarà il triangolo AQK uguale al trapezio QNBI; e perchè il triangolo AIC sta al triangolo simile LIM come il quadrato di AC al quadrato di LM (a), ovvero (b) come CB a BM, ovvero (c) come il rettangolo NC al rettangolo NM, siccome il triangolo AIC è uguale al rettangolo NC, così anche il triangolo LIM sarà uguale al rettangolo NM, ed aggiunto di comune il trapezio QOMI sarà il triangolo QOL uguale al trapezio QNBI, il quale si è dimostrato uguale al triangolo AQK, e però i triangoli AQK, QOL saranno uguali fra loro, ed anche uguali perciò saranno le rette AQ, QL.

## XXIX.

*Il quadrato di* KB *al quadrato di qualsi-* Fig. 35.
*voglia ordinata* QL *sarà come l'altezza* KD *a* DQ.

Poichè il triangolo DGF si è dimostrato uguale al rettangolo NF, ed il triangolo LIM uguale al rettangolo NM (*a*) saranno i rimanenti due trapezi IGDP, PLMF uguali al rimanente rettangolo OF, e tolto di comune il trapezio PLMF sarà il trapezio IGDP uguale al trapezio ODPL, ed aggiunto di comune il triangolo DQP sarà il parallelogrammo IGDQ uguale al triangolo OQL; siccome, per essere uguali le basi GB, BF (*b*), anche il parallelogrammo BGDK è uguale al rettangolo NF, ovvero al triangolo DGF, ovvero al triangolo NKB, e però i triangoli NKB, OQL saranno fra loro come i parallelogrammi BGDK, IGDQ; ma i triangoli simili NKB, OQL sono fra loro come i quadrati dei loro lati omologhi KB, QL (*c*), ed i parallelogrammi BGDK, IGDQ sono fra loro come i lati, o altezze KD, DQ (*d*); dunque i quadrati dell'ordinate KB, QL saranno fra loro come le altezze KD, DQ.

(*a*) Ass.
(*b*) 17. di qu.
(*c*) 20. VII.
(*d*) 2. VI.

## XXX.

*Se nell'ellisse ed iperbola si tirino le rette* Fig. 32.
QZ, NA *perpendicolari all'asse* QN, *e per qualsivoglia punto* M *si tiri la tangente* GMX, *e la retta* QMA, *la retta* NA *sarà divisa in mezzo nel punto* E; *e sarà* QK *ad* NE, *ovvero* QG (*a*) *a* GN, *come* QK *a* KN. (*a*) 2. VII.

Si tirino le rette TN, BR, RG, e perchè il triangolo TOR è uguale al triangolo ONG (*e*), aggiunto di comune il triangolo GOR (*e*) 15. uguali ancora saranno i triangoli RTG, RNG di qu. collocati sopra l'istessa base RG, e però (*f*) le (*f*) 12. VI. rette TN, RG saranno parallele; ma parallele

an-

(a) 9. IV. ancora sono (a) le rette TN, BR, le quali congiungono le rette RN, BT parallele ed uguali all'istessa retta FR; dunque le due rette BR, RG parallele all'istessa retta TN saranno poste per diritto, e formeranno una sola retta BG. Per esser dunque le rette FA, BM parallele, sarà nei triangoli FQA, BQM la retta NA a KM come NQ a QK, ovvero FN a BK; e nei triangoli BGM, RGE la retta KM ad NE come KG a GN, ovvero BK ad RN, onde sarà per egualità ordinata NA ad NE come FN ad NR; ma FN è doppia di NR, dunque ancora NA sarà doppia di NE, ovvero NE sarà uguale ad EA, e però QX ad NE sarà come l'istessa QX ad EA; ma per essere simili i triangoli OXM, AFM, QX sta ad EA come XM ad ME, ovvero come QM ad MA, ovvero QK a KN, dunque come QK a KN così QX ad NE, ovvero QG a GN.

## XXXI.

Fig. 30. 32. *Posto l'istesse cose nell'ellisse ed iperbola, se per i punti* N, M *si tiri la retta* NMZ, *sarà la retta* QZ *divisa in mezzo nel punto* X.

Essendo simili fra loro i triangoli XZM, ENM, sarà XZ ad EN come XM ad ME, ovvero per la similiarianza dei triangoli QXM, AEM, come QX ad AE, e permutando XZ a QX come EN ad AE; onde siccome EN è uguale (b) *Ant.* ad AE (b), così ancora XZ sarà uguale a QX, e però la retta QZ sarà divisa in mezzo nel punto X.

## XXXII.

*Il rettangolo di* QX *in* NE *sarà uguale alla quarta parte di quel rettangolo, che si facesse dal lato trasverso* QN *nel lato retto* NF.

Imperocchè, essendo il quadrato di KM uguale

le al rettangolo di BK in KN, farà (a) BK a KM come KM a KN (b); ma come BK a KM così sta FN ad NA (c) e come KM a KN così sta ZQ a QN; dunque come FN ad NA così ZQ a QN, e però (d) il rettangolo dell'intermedie ZQ, NA sarà uguale al rettangolo dell'estreme QN, NF; onde il rettangolo della metà nella retta QZ, cioè di QX, con la metà della retta NA, cioè con la NE, sarà la quarta parte del rettangolo istesso, che si facesse dal lato trasverso QN nel lato retto NF.

(a) 8. di qu. (b) 19. VI. (c) 2. VII. (d) 8. VI.

## XXXIII.

*Se nell'asse, o lato trasverso dell'ellisse ed iperbola* QKN *si piglino due punti* U, F, *sicchè il rettangolo di* QU *in* UN, *ovvero di* QF *in* FN *sia uguale alla quarta parte di quel rettangolo, che si facesse dal lato trasverso* QN *col retto* QX, *cioè sia eguale al quadrato di quella ordinata, che li tirasse per il centro* (e) *e si tirino dai punti* U, F *ai punti* E, O, *nei quali concorrono le tangenti verticali* QE, NO *con qualsivoglia tangente laterale* MOE, *le rette* EU, UO, EF, FO, *gli angoli* EUO, EFO *saranno retti.*

Fig. 38. 39. (e) 9. di qu.

Imperocchè, essendo tanto il rettangolo di EQ in ON (f), quanto il rettangolo di QU in UN uguale alla quarta parte dell'istesso rettangolo di NQ in QX, saranno i rettangoli di EQ in ON e di QU in UN uguali fra loro; e però (g) sarà EQ a QU come UN ad NO, onde, per essere di più retti ed uguali gli angoli contenuti EQU, UNO, i triangoli EQU, UNO saranno simili (b), ed i loro angoli QEU, NUO saranno uguali, ed aggiunto di comune l'angolo QUE, uguali ancora saranno gli angoli NUO, QUE presi insieme ai due angoli QEU, QUE presi insieme; ma gli angoli QUE, QEU presi in-

(f) Ant. (g) 18. VI. (b) 3. VII.

insieme nel triangolo rettangolo EQU sono ugua-
(a) 13. IV. li (a) ad un retto, dunque anche gli angoli NUO, QUE presi insieme saranno uguali ad
(b) 7. III. un retto, e però (b) ancora l'angolo EUO sarà retto. Nella stessa maniera si proveranno simili i triangoli EQF, FNO, e però uguali gli angoli QFE, NOF, ed aggiunto l'angolo OFN si dimostreranno gli angoli OFN, QFE uguali agli angoli OFN, NOF, ovvero ad un retto, onde ancora l'angolo EFO sarà retto.

## XXXIV.

Quindi apparisce, che sopra la retta EO come diametro d'intorno agli angoli retti EUO, EFO, ovvero d'intorno al quadrilatero EUFO, si può descrivere un circolo
(c) 11. V. (c), nel quale *saranno uguali gli angoli* OEF, OUF, che posando sopra l'istessa corda OF, toccherebbero la circonferenza
(d) 10. V. in E, U (d); siccome *uguali saranno gli angoli* EOU, EFU, che posando sopra l'istessa corda EU, toccherebbero la circonferenza in O, F; ovvero ancora nell'elisse *uguali saranno gli angoli* UEF, UOF, che avendo l'istessa base UF toccherebbero la circonferenza in E, O. Ed essendosi dimostrato l'angolo FUO uguale all'angolo UEQ, e l'angolo EFQ uguale all'angolo FON, *saranno* ancora *uguali gli angoli* QEU, FEO; siccome finalmente *saranno uguali gli angoli* NOF, EOU.

## XXXV.

*Poste l'istesse cose, se dal punto* H *comune sezione dell'inclinate* EF, UO *si tiri al punto del contatto* M *la retta* HM, *ella sarà perpendicolare alla tangente* OE.

Poi-

Poichè, se non fosse, si tiri dal punto H la retta HZ perpendicolare ad OE, e tirata l'ordinata MK si congiunga KZ. Perchè dunque gli angoli EQU, EZH sono retti, ed uguali ancora fra loro sono (*a*) gli angoli QEU, ZEH, i triangoli QEU, ZEH saranno simili fra loro; e però (*b*) la retta ZE ad EH sarà come QE ad EU, e permutando ZE ad EQ come HE ad EU, ovvero per la similianza dei triangoli HEU, HOF, come HO ad OF; ma per essere retti gli angoli FNO, OZH, ed uguali gli angoli NOF, ZOH (*c*), e però simili i triangoli NOF, ZOH, la retta ZO ad OH sta come NO ad OF, e permutando ZO ad ON come HO ad OF; dunque come ZE ad EQ così ZO ad ON, e permutando ZE a ZO come EQ ad ON; ma come EQ ad ON così QK a KN, dunque come EZ a ZO così sarà QK a KN, e però nell'ellissi la retta KZ sarebbe parallela ad ambedue le tangenti QE, NO, ovvero all'ordinata KM, il che è impossibile; e nell'iperbola sarebbe dividendo EO ad OZ come QN ad NK, ovvero PO ad OR, ovvero per la similianza dei triangoli EPO, MRO, come l'istessa EO ad OM; onde le rette OZ, OM, sarebbero fra loro uguali, il che è impossibile, dunque la sola retta HM è perpendicolare sopra la tangente OE.

(*a*) 4. 6.
(*b*) 1. VII.

## XXXVI.

*Se da qualsivoglia punto* M *dell' ellisse o iperbola si tirino ai punti* U, F *le rette* MU, MF, *e si tiri la tangente* EQM, *gli angoli* UME, FMO, *che sono fatti dall' inclinate medesime con la tangente, saranno uguali.*

Si tirino, come prima, le tangenti verticali QE, NO, e si congiunga EU, UO, OF, FE, HM, ed essendo nel quadrilatero EMHU gli an-

(a) 13. di qu. angoli appoſti EMH (a), EUH (b) retti, e retti ancora gli angoli OMH, OFH oppoſti,
(b) ante nel quadrilatero OMHF, ſi potranno deſcrivere circoli intorno ai quadrilateri ſteſſi EMHU,
(c) 9. V. OMHF (c), ſicchè nel circolo maggiore gli angoli UME, UHE, che poſando ſopra l'iſteſſa corda EU, toccherebbero la circonferenza in M,
(d) 10. V. H ſaranno uguali (d), ed uguali ancora ſaranno gli angoli FMO, FHO, che poſando ſopra la ſteſſa corda FO toccherebbero la circonferenza in M, H; ma gli angoli oppoſti VHE, FHO ſo-
(e) 9. III. no uguali fra loro (e), dunque anche gli angoli VME, FMO fatti dalle inclinate con la tangente, ſaranno fra loro uguali.

## XXXVII.

Se dunque *un lume ſi ponga in* U, *qualſivoglia raggio* UM, *che cada ſopra qualſivoglia punto* M *della curva elittica ed iperbolica, e ſi riſletta, dovrà paſſare per l' altro punto* F; *e però i punti* F, U *ſaranno i fuochi delle ſezioni.*

Poichè dovendo il raggio nel riflettersi, ſecondo le leggi della Catottrica, formare l' angolo FMO, che chiamaſi di *riſleſſione*, ſempre uguale all'angolo VME, che chiamaſi d' *incidenza*, ſe fi formare queſti angoli uguali compete ſolo alle rette, che ſi tirano, o paſſano per i punti V, F, dovra qualſivoglia raggio, che parte dal punto V, paſſare per F; ovvero il raggio che parte dal punto F, paſſare per V.

## XXXVIII.

Fig. 44. *Se dal fuoco* F *dell' eliſſe ſi tiri al punto* H, *ove termina l' ordinata* CH, *che paſſa per il centro* C, *la retta* FH, *ſarà* FH *eguale al ſemiaſſe traſverſo, cioè a* CB,

(f) 19. VII. Il quadrato di FH è uguale a' quadrati di FC, CH (f); ma il quadrato di CH è uguale al

ret-

rettangolo di AF in FB, (a) dunque il quadrato di FH è eguale al quadrato di CF col rettangolo di AF in FB, cioè al quadrato di BC (b), e però anche HF è uguale a BC. (a) 33. di qu. (b) 26. VII.

## XXXIX.

*Se da qualsivoglia punto* M *dell' iperbola si tirino ai fuochi* U, F *le rette* MU, MF, *sarà la loro differenza sempre uguale al lato traverso* QN. Fig. 41.

Tirate le tangenti MD, NO, QE, si tirino per il centro C e foco U le rette IT, DU parallele alla retta FM, e si congiunga EU, IU, IQ, IN.

Perchè nell'iperbola l'angolo UMD è uguale all'angolo FMD (c), al quale è similmente uguale l'angolo alterno MDU (d), saranno uguali gli angoli UMD, MDU, e però il lato UM sarà uguale al lato UD (e); ed essendo i lati UM, DM segati in mezzo nei punti I, T (f), siccome il lato UF è diviso in mezzo nel punto C, sarà ancora la retta DI uguale ad IM; onde nei triangoli DUI, MUI, oltre al lato comune UI, i due lati UD, DI sono uguali ai due lati UM, MI, e però (g) gli angoli DIU, MIU saranno retti ed uguali; e perchè similmente l'angolo EQU è retto, il circolo che si descrivesse sopra il diametro EU, passerebbe (h) per U, E, L, Q, e farebbe uguali gli angoli UEQ, UIQ (i), i quali posando sopra l'istessa corda QU, toccherebbero la circonferenza in E, I. Nell'istessa maniera si proverà, che il circolo, il quale si descrivesse sopra il diametro OU d'intorno agli angoli retti UIO UNO passerebbe per O, U, I, N, e conterrebbe gli angoli uguali NIO, NUO, i quali posando sopra l'istessa corda NO toccherebbero la circonferenea in I, U; ma nell'iperbola gli angoli NUO, QEU sono uguali fra loro (k), dun-

(c) 16. di qu. (d) 6. IV. (e) 16. III. (f) 27. VI. (g) 13. III. (h) 9. V. (i) 10 V. (k) 35. di qu.

dunque uguali ancora saranno gli angoli UIQ, QIN, onde aggiunto di comune l'angolo QIO saranno uguali gli angoli UIO, QIN; ed essendo retto l'angolo UIO, retto ancora sarà l'angolo QIN; e però (*a*), se sopra il lato trasverso QN come diametro si descriva un circolo, questo passerebbe per il punto I, e sarebbe uguali le rette CI, CQ, CN, come raggi dell'istesso circolo. Perchè finalmente i lati UM, UF, DM sono divisi in mezzo nei punti I, C, T, e però il lato UM è doppio del lato MT, sarà ancora il lato DU, ovvero la retta UM, che è uguale all'istessa DU, doppia della retta IT, e la retta FM doppia della parte CT, e perciò la differenza delle due rette, o inclinate FM, MU sarà doppia dell'altra parte IC, ovvero della CQ, la quale è differenza della metà IT, CT; ma anche il lato trasverso QN è doppio dell'istessa CQ, dunque la differenza dell'inclinate FM, MU sarà uguale al lato trasverso QN.

(*a*) 8. V.

## XL.

Fig. 42. *Se nell'ellisse sia la retta* BC *differenza del lato trasverso* AB *dal lato retto* BD, *sarà la* FU *distanza dei fuochi media proporzionale fra le* AB, BC.

Il rettangolo di AF in FB, insieme col quadrato di OF è uguale (*b*) al quadrato di OB, ma il rettangolo di AB in BD è quadruplo del rettangolo di AF in FB (*c*), ed il quadrato di FU è quadruplo del quadrato di OF, ed il quadrato di AB è similmente quadruplo del quadrato di OB (*d*); dunque il rettangolo di AB in BD col quadrato di FU sarà uguale al quadrato di AB; ma l'istesso quadrato di AB è uguale al rettangolo di AB in BD, e di AB in BC (*e*), dunque il rettangolo di AB in BC sarà uguale al quadrato di UF, e però le tre rette AB, FU, BC saranno continuamente proporzionali.

(*b*) 26. VII.
(*c*) 33. di qu.
(*d*) 23. VIII.
(*e*) 24. VIII.

XLI.

## XLI.

*Se nell' iperbola sia la retta* BE *uguale al lato trasverso* AB *insieme col lato retto* BD, *sarà la* FU *distanza dei fuochi media proporzionale fra* BE, BA. Fig. 44.

Il rettangolo di AF in FB insieme col quadrato di CB è uguale al quadrato di CF (*a*); ma il rettangolo di AB in BD è quadruplo del rettangolo di AF in FB (*b*); il quadrato di AB è quadruplo del quadrato di CB, ed il quadrato di UF è similmente quadruplo del quadrato di GF (*c*), dunque il rettangolo di AB in BD insieme col quadrato di AB sarà uguale al quadrato di UF; ma il rettangolo di AB in BD, cioè di ED in DB, insieme col quadrato di AB ovvero di ED, è uguale al rettangolo di BE in ED (*d*); dunque il quadrato di UF è uguale al rettangolo di BE in ED, e però le tre rette BE, UF, DE o AB saranno continuamente proporzionali (*e*).

(*a*) 27. VII.
(*b*) 33. *di qu.*
(*c*) 23. VII.
(*d*) 22. VII.
(*e*) 19. VI.

## XLII.

Quindi *dati i lati trasverso e retto dell'* Fig. 44. 45.
*ellisse ed iperbola, facilmente si trova la distanza dei fuochi fra loro, o dalla cima delle sezioni, o dal loro centro.*

## XLIII.

*Se nell' ellisse ed iperbola* AB *si tiri per il fuoco* F *l' ordinata* FD, *e si tirino per i punti* B, D *le tangenti* KG, BN, *sarà l' ordinata* FD *sempre uguale al semiparametro* BX.

Poichè il rettangolo di AF in FB sta al quadrato di FD come AB a BZ (*f*), cioè (*g*)

(*f*) 8. *di qu.*
(*g*) 9. VI.

come il rettangolo di AB in BZ al quadrato di BZ, sarà permutando il rettangolo di AF in FB al rettangolo di AB in BZ come il quadrato di FD al quadrato di BZ; ma il rettangolo di AF in FB è la quarta parte del rettangolo di AB in BZ (a), dunque ancora il quadrato di FD sarà la quarte parte del quadrato di BZ, e perciò (b) sarà uguale al quadrato del semiparametro BX, onde anche l'ordinata FD sarà sempre uguale al semiparametro BX.

(a) 33. di qu.
(b) 23. VII.

## XLIV.

*Poste le stesse cose, e tirata per il centro* C *la retta* CE, *sarà la retta* CE *uguale ad* FH, *la* BN *uguale a* BF, *la* AK *uguale ad* AF.

Poichè le tre rette GC, CB, CF sono continuamente proporzionali (c), sarà il rettangolo di GC in CF uguale al quadrato di CB (d), ovvero dell'uguale FH (e), cioè al quadrato di CH insieme col quadrato di CF; ma il rettangolo di GC in CF è uguale al rettangolo di GF in FC col quadrato di CF, dunque il solo rettangolo di GF in FC è uguale al quadrato di CH, cioè al rettangolo di CB in BX (f), ovvero in FD; (g) onde essendo uguali i rettangoli di GF in FC, e di DF in BC, sarà (b), GF ad FD, ovvero GC a CE, come BC ad FC; ma come BC ad FC così sta GC a CB (a), dunque sarà GC a CE come l'istessa GC a CB, e però la retta CE sarà sempre uguale alla retta BC, ovvero (i) all'inclinata FH: e perchè la retta CE è la metà delle due rette AK, BN (k), siccome CB è la metà del lato trasverso AB, così saranno le due rette AK, BN uguali al lato trasverso AB; onde essendo ancora uguale il rettangolo di AK in BN al rettangolo di AF in FB (l), saranno uguali le rette AK, AF, ed FB, BN.

(c) 20. di qu.
(d) 19. VI.
(e) 38. di qu.
(f) 9. di qu.
(g) Ant.
(b) 18. VI.
(i) 38. di qu.
(k) 36. IX.
(l) 32. 32. di qu.

XLV.

## XLV.

*Posta le stesse cose, e tirata per qualsivoglia punto* M *l'ordinata* MO, *questa sarà sempre uguale alla retta* FL *inclinata dal fuoco* F.

Tirisi per i punti K, F la retta KI, la quale concorra con la tangente BZ nel punto I, e perchè, per essere simili i triangoli equicruri KAF, IBF, sta (*a*) FB a BI come FA ad AK, ovvero (*b*) FB a BN, sarà BI uguale a BN, e perciò tirata per i due punti G, I la retta GIY, che concorra con la tangente KA in Y, questa toccherà la curva nel punto R, e farà le rette AK, AY uguali fra loro, siccome ancora qualsivoglia altra retta CP uguale a CE; e perchè le rette CE, FH sono uguali (*c*), sarà il quadrato di CE uguale al quadrato di FH, cioè (*d*) ai quadrati di CH, CF, ovvero di CS; ma il quadrato di CE è anche uguale al quadrato di CS col rettangolo di PS in SE (*e*), dunque il rettangolo di PS in SE è uguale al quadrato dell'ordinata CH: è perchè il quadrato di CH al quadrato di ML sta come il rettangolo di AC in CB al rettangolo di AM in MB (*f*), saranno i quadrati fra loro come i rettangoli (*g*) cioè in ragione composta della ragione di AC ad AM, cioè di KS a KT, ovvero di KE a KO, ovvero di SE a TO; e della ragione di CB a MB, ovvero di PI a QI, ovvero di PS a QT; ma anche il rettangolo di PS in SE al rettangolo di QT in TO sta in ragione composta di PS a QT, e di SE a TO; dunque il quadrato dell'ordinata CH sarà al quadrato dell'ordinata ML come il rettangolo di PS in SE al rettangolo di QT in TO; e però, siccome il rettangolo di PS in SE si è dimostrato uguale al quadrato dell'ordinata CH, così il rettangolo di QT in TO sarà sempre uguale al quadrato dell'ordinata corrispondente ML, e perciò aggiun-

(*a*) 1. VII.
(*b*) Ant.
(*c*) Ant.
(*d*) 20. VII.
(*e*) 26. VII.
(*f*) 2. di qu.
(*g*) 16. VI.

 giun-

giunti di comune i quadrati uguali di MT, MF, farà il rettangolo di QT in TO insieme col quadrato di MT, cioè il quadrato di MO uguale al quadrato di ML insieme col quadrato di MF, cioè al quadrato di FL; e però i quadrati di MO, FL saranno uguali fra loro, onde ancora sarà la retta MO sempre uguale all' inclinata FL.

## XLVI.

Poste le stesse cose, *se si piglino due punti* M, R *equidistanti dal punto* C, *e da essi si alzino le perpendicolari* MO, RP, *saranno sempre le due* MO, RP *prese insieme, eguali all' asse trasverso* AB.

Perchè per ipotesi MC è eguale a CR, se CR si tolga da GR, e si aggiunga a GM, sarà GR con GM doppia di GC. Ora poichè sono simili i triangoli GRP, GMO (*a*), sarà RG a GM come RP ad MO; e componendo RG con GM a GM, come RP con MO ad MO, e permutando RG con GM ad RP con MO, come GM ad MO, cioè come GC a CE (*b*), o come GC a CB (*c*), e permutando RG con GM a GC, come RP con MO a BC; ma si è mostrato che RG con GM è doppia di GC, dunque anche RP con MO sarà doppia di BC, cioè eguale a BA.

(*a*) 2. VII.
(*b*) 2. VII.
(*c*) 45. 38. di qu.

## XLVII.

Poste le cose medesime, *se a qualsivoglia punto dell' elisse si tirino da' fuochi* F, V *le rette* VL, LFL *sarà sempre la loro somma, o aggregato eguale all' asse* BA.

Dal punto L si tiri l'ordinata LM, che si prolunghi in O, e dal punto F per il punto Z, in cui l'inclinata VL sega l'ordinata HC del centro, si tiri la FO, e da Q l' ordinata QR prolungata in P. I triangoli FZC, UZC, che hanno i lati FC,

VC

VC eguali, e CZ di comune cogli angoli retti intorno, ſono eguali (*a*), e però eguali ſono ancora gli angoli QFV, LVF, onde le inclinate o oblique FQ, VL ſono eguali (*b*). Ora i triangoli FQR, VLM, che hanno le baſi FQ, VL eguali, ed eguali gli angoli QRF, LMV, LFV, ZVF ſono eguali (*c*), e però FR è eguale ad UM; ma FC è eguale ad VC, per eſſere i punti F, V i fuochi; dunque RC ſarà eguale a CM: ma anche FO è eguale ad RP (*d*), ed MO con PR a BA (*e*) per eſſere eguali MC, CR, dunque anche FL con FQ, ovvero la ſomma delle inclinate VL, LF ſarà eguale all'aſſe AB.

(*a*) 12. *di qu.*
(*b*) 4. *di qu.*
(*c*) 15. VI. 11.
(*d*) 45. III. *di qu.*
(*e*) Ans.

## XLVIII.

Dunque *tirate ad un qualunque punto* M Fig. 40. *dell'eliſſe la tangente* OI, *e da' fuochi* V, F *le inclinate* VM, MF, *una delle quali ſi prolunghi in* D, *finchè* MD *ſia eguale all'altra* MF, *e condotta la* FD, *ſi tiri dal centro* C *la retta* CI *al punto d'interſezione* I, *ſarà ſempre* CI *eguale al ſemiaſſe* QN.

Poichè MF è eguale ad MD, anche gli angoli MFI, MDI ſaranno eguali (*f*); ma per eſſere eguali gli angoli OMU, IMF (*g*) anche gli angoli IMF, IMD ſono eguali (*b*), dunque ſono eguali i triangoli IMF, IMD (*i*), ed FI è eguale ad ID; ma anche VC è eguale a CF per la proprietà de' fuochi, dunque CI, parallela ad UD (*k*), onde i triangoli UDF, CIF ſono ſimili (*l*), e però ſarà UF ad FC come UD a CI, e però UD ſarà doppia di CI: ma UD è eguale a QN (*m*), dunque CI è eguale al ſemiaſſe QN.

(*f*) 16. III.
(*g*) 36. *di qu.*
(*b*) 9. III.
(*i*) 11. III.
(*k*) 27. VI
(*l*) 2. VII.
(*m*) *ant.*

## XLIX.

E però *ſe ſull'aſſe* QN *ſi deſcriva un ſemicircolo, egli paſſerà ſempre per il punto* I,

*e se da* V *si tiri una retta* VO *al punto* O, *ove la tangente sega il circolo, sarà* VO *perpendicolare alla tangente*.

Poichè essendosi dimostrato, che CQ, CI, CN sono eguali, il circolo passerà pe' punti Q, N, I; e potendosi prolungate FM come abbiamo prolungata UM, siccome FI è perpendicolare sul-
(a) *Ant.* la tangente in I (*a*), così sarà UO perpendicolare sulla tangente stessa in O.

L.

Fig. 46. *Se a qualsivoglia punto* M *dell' ellissi tirisi la tangente* GM, *e dal centro* C *la retta* CM, *dividerà questa in mezzo qualsivoglia retta* HI, *che si tiri dentro l' ellisse parallela alla tangente* MG.

Si tirino le ordinate HL, MK, IS, e la tangente NR, che prolungate tutte concorrano con la retta CM prolungata in D, T, R, siccome la retta HI prolungata concorra con l'asse prolungato nel punto P. Poichè i triangoli simili DLC, MKC, RNC sono fra loro come i qua-
(b) 10. VII. drati dei loro lati CL, CK, CN (*b*) anche le differenze dei triangoli DLC, MKC dall'istesso triangolo RNC saranno fra loro come le differenze dei quadrati di CL, e di CK dall'istesso
(c) 26. 1. quadrato di CN (*c*), e però il trapezio RDLN sarà al trapezio RMKN come il rettangolo di QL in LN al rettangolo di QK in KN (*d*), cioè (*e*) come il quadrato di HL al quadrato di
(d) 26. VI I. MK, ovvero (*e*) come il triangolo HLP al
(e) 2. di qu. triangolo simile MKG; ma, per essere GC a CN
(f) 20. come CN a CK (*f*), e però (*g*) il triangolo RCN al triangolo simile MCK come la retta
di qu. GC a CK, cioè (*h*) come il triangolo GMC
(g) 12. all'istesso triangolo MCK, il triangolo RCN
VI. sarà uguale al triangolo GMC, ed in conse-
(h) 8. VI. guenza tolto il triangolo comune MCK, il tri-

an-

angolo MKG sarà uguale al trapezio RMKN; dunque anche il triangolo HLP sarà uguale al trapezio RDLN. E perchè nell'istessa maniera, che si è provato il triangolo MKG uguale al trapezio RMKN, si proverà ancora il triangolo ISP uguale al trapezio RTSN, sarà ancora il rimanente trapezio HLSI uguale al rimanente trapezio TDLS, tolto di comune il trapezio UDLSLU, sarà il triangolo HDU uguale al triangolo simile ITU, e però il lato, o retta HU sarà uguale al lato, o retta IU, onde la retta HI sarà divisa in mezzo nel punto U.

Che se la retta AD segasse l'asse QN nel punto L, si tirino le ordinate, DT, MK, AB parallele alle tangenti NR, QZ, e stendasi per I la HIP parallela alla tangente MG, o all'ordinata AD. Per essere la retta SD uguale ad SI, sarè (a) il triangolo DSL uguale al triangolo simile ISP, ovvero al trapezio RTSN, ed aggiunto il triangolo TCS, sarà la figura DTCLD uguale al triangolo RCN, ovvero ZCQ. E perchè il trapezio RTSN al trapezio EQZB sta come il rettangolo di NS in SQ al rettangolo di NE in EQ, cioè come il quadrato di SD al quadrato di EA, ovvero come il triangolo DSL al triangolo AEL siccome il triangolo DSL è uguale al trapezio RTSN, così il triangolo AEL sarà uguale al trapezio EQZB, ed aggiunto di comune il triangolo EBC sarà la figura ABCLA uguale al triangolo ZCQ, ovvero al triangolo RCN, cioè alla figura DTCLD; e tolto di comune il triangolo LXC, sarà il triangolo TXD uguale al triangolo simile BXA, e però il lato XD uguale al lato XA, onde la retta AD sarà in mezzo nel punto X. Fig. 47.

(a) II. III.

La retta BM chiamisi *diametro secondario* dell'ellisse, e le rette AD, HI *ordinate*.

## LI.

Fig.48. *Se dall' estremità del diametro secondario* BM *si tirino le tangenti all'ellisse* BZ, MG, *le quali concorrano con l'asse prolungato in* Z, G, *queste saranno parallele ed uguali.*

Poichè le tre rette GC, CN, CK, e similmente ancora le tre ZC, CQ, CE sono continuamente proporzionali (*a*), e sono le due GN GK uguali a CQ, CE, sarà ancora GC uguale a ZC; e però il triangolo GMC uguale al triangolo ZBC, l'angolo GMC uguale all'angolo ZBC, e le rette GM, ZB parallele ed uguali.

## LII.

Fig.48. *I quadrati dell' ordinate a qualsivoglia diametro* BM *sono fra loro come i rettangoli delle parti corrispondenti del diametro; cioè il quadrato di* XN *al quadrato di* UI *sarà come il rettangolo di* BX *in* XM *al rettangolo di* BU *in* UM.

(*a*) 20. *di qu.* Per essere GC a CN come CN a CK (*b*), sarà il triangolo GMC al triangolo simile NXC come il triangolo RNC al triangolo simile MKC

(*b*) 13. VII. (*b*); e però, siccome il triangolo GMC è uguale al triangolo RNC (*c*), così il triangolo NXC

(*c*) 50. *di qu.* sarà uguale al triangolo MKC, ed il triangolo RXN uguale al trapezio MXNG; e perchè il triangolo ISP si è dimostrato uguale al trapezio RTSN, tolto di comune il trapezio FISN, sarà il triangolo FPN uguale al trapezio RTIF, ed aggiunto di comune il trapezio OFPG, sarà il triangolo OGN, ovvero il triangolo ORM uguale al trapezio RTIF col trapezio OFPG, cioè al trapezio RTYO col trapezio YIPG, e però il triangolo TMY sarà uguale al trapezio YIPG, ed aggiunto il trapezio MUIY sarà il triangolo TUI uguale al trapezio MUPG; dunque

que i triangoli simili RXN, TUI, ovvero (*a*) i quadrati dei loro lati, o dell' ordinate XN, UI saranno fra loro come i trapezj MXNG, MUPG, cioè come le differenze dei triangoloti simili XCN, UCP dall'istesso triangolo MCG, ovvero come le differenze dei quadrati delle rette CX, CU dall'istesso quadrato di CM, cioè come i rettangoli di BX in XM, e di BU in UM. (*a*) 10. VII.

## LIII.

*Se nella retta* GE, *che tocchi l' iperbola* Fig. 49. *nel vertice* N, *si prendano le parti uguali* DN, NE, *sicchè il quadrato di ciascheduna di esse sia uguale alla quarta parte di quel rettangolo, che si farebbe dal lato retto* NG *nel trasverso* QN, *e si tirino dal centro* C *per i due punti* D, E *le rette* CD, CE, *queste prolungate sempre più s' accosteranno alla curva iperbolica, nè però giammai, benchè si prolungassero in infinito, arriveranno a toccarla.*

Poichè, ponendosi il quadrato della retta DN, la quarta parte del rettangolo di QN in NG, e similmente (*b*) il quadrato di CN, la quarta parte del quadrato di tutta la retta QN, sarà il quadrato di CN al quadrato di ND, ovvero (*c*) per la simiglianza dei triangoli CND, CKH, il quadrato di CK al quadrato di KH come il quadrato di QN al rettangolo di QN in NG, ovvero (*d*) come il lato QN al lato NG, cioè (*e*), nell'iperbola come il rettangolo di QK in KN al quadrato dell'ordinata KM; ma il rettangolo di QK in KN col quadrato di CN è uguale al quadrato di CK (*f*), ed il rettangolo ancora di LM in MH col quadrato di KM è uguale al quadrato di KH; dunque, se tutto il quadrato di CK sta a tutto il quadrato di KH (*b*) 23. VII. (*c*) 2. VII. (*d*) 9. VI. (*e*) 8. *di qu.* (*f*) 27. VII.

come

come la parte del quadrato di CK, cioè il rettangolo di QK in KN, alla parte del quadrato di KH, cioè al quadrato di KM, anche la parte che resta, cioè il quadrato di CN, sarà alla parte che resta, cioè al rettangolo di LM in MH, come tutto il quadrato di CK a tutto il quadrato di KH, cioè come l'istesso quadrato di CN al quadrato di ND; e però il rettangolo di LM in MH, ovvero di HI in IL sarà uguale al quadrato di DN, e l'istessa DN sarà (*a*) media proporzionale fra le rette HI, IL, ovvero LM, MH: e perchè prolungandosi la curva iperbolica verso A, B, l'ordinata MI, e molto più la retta HI, ovvero LM, che è la prima di quelle tre proporzionali, andrebbe sempre crescendo in infinito, la retta IL, ovvero MH, che sarebbe la terza proporzionale, dovrebbe sempre scemare in infinito; e però le rette CD, CE prolungate s'accosterebbero sempre più alla curva iperbolica: benchè nondimeno si prolungassero in infinito, non potrebbero però mai concorrere con lei; poichè sempre fra la retta CO, ovvero CS, e la curva iperbola ANB vi dovrebbe essere qualche segmento, o linea retta IL ovvero HM, la quale con l'altra retta HI, ovvero LM faccia il rettangolo uguale al quadrato della retta ND. Perciò le rette CD, CE si chiamino *asintoti*, o *non coincidenti* dell'iperbola.

(*a*) 10. VI.

## LIV.

Che *se qualsivoglia altra retta* CG, JU, CU *si tirasse, ella dovrebbe sempre, o allontanarsi dall'iperbola, ovvero finalmente segarla.*

Poichè, se la retta CG cadesse fuori dell'asintoto CD, quanto più s'allontana dal centro C, tanto più s'allontana ancora dalla retta CD, e dall'iperbola NPA; e se cadesse dentro l'istessa retta CD, siccome la distanza della retta CD dalla curva iperbolica va scemando in infinito,

arri-

arriverebbe finalmente ad esser minore della distanza della retta CV, ovvero IU dalla retta CD, e però caderebbe la retta CU, o IU dentro la curva iperbolica.

## LV.

*Se il lato retto* NG *sia uguale al lato trasverso* QN, *e però l' iperbola sia equilatera, anche la retta* DN *sarà uguale alla retta* CN; *e gli asintoti* CT, CS *comprenderanno un angolo retto.*

Poichè il quadrato dell' una o dell' altra retta DN, EN sarebbe uguale alla quarta parte del rettangolo, che si facesse dal lato trasverso QN nel lato retto NG, cioè del quadrato di QN, e però il quadrato DN sarebbe uguale al quadrato di CN, e la retta DN uguale a CN; e perchè sono uguali le rette DN, CN, e retti gli angoli DNC, ENC, l'uno e l' altro degli angoli DCN, ECN sarà mezzo retto; e però l'angolo intero DCE sarà retto.

## LVI.

*Se tirando per il centro* C *la retta* Cc *perpendicolare all' asse* QX, *ovvero parallela alla tangente* DE, *gli si tiri qualsivoglia perpendicolare* YB, *che seghi l' asintoto* TC *prolungato in* F, *sarà sempre qualsivoglia rettangolo di* BE *in* EI *uguale al quadrato di* CN.

Tirisi per l'istesso punto I l' ordinata HL, e sarà (*a*) il rettangolo di BE in EI, ovvero di FI in IE al rettangolo di HI in IL in ragione composta di FI, ad HI, cioè (*b*) di CN ad ND, e di EI ad IL, cioè dell' istessa CN ad NE, ovvero ad ND, onde (*c*) il rettangolo di FI in IE sarà al rettangolo di HI in IL in duplicata ragione di CN ad NE, cioè (*d*) come

(*a*) 16. VI. (*b*) 2. VII. (*c*) 4. II. (*d*) 11. VII.

il

il quadrato di CN al quadrato di NE: e però, siccome qualsivoglia rettangolo di HI in IL è
(a) 53. di qu. sempre uguale al quadrato di NE (a); così ancora qualsivoglia rettangolo di FI in IE, ovvero in BE in EI, sarà sempre uguale al quadrato della retta CN.

## LVII.

*Se per due punti* P, I, *presi in qualsivoglia maniera nell' iperbola* ANB, *si tiri la retta* TU, *saranno le due rette* TP, IU *comprese dalla curva iperbolica, e dagli asintoti sempre uguali fra loro.*

Si tirino per i dati punti P, I le rette HL, OS perpendicolari all'asse CX, e parallele fra loro. Perchè il rettangolo di OP in PS al ret-
(b) 16. VI. tangolo di HI in IL sta (b) in ragione composta di OP ad HI, e di PS ad IL; ed il rettangolo ancora di TP in PU al rettangolo di TI in IU sta in ragione composta della ragio-
(c) 2. VII. ne di TP a TI, cioè (c) di OP ad HI, e della ragione di PU ad IU, cioè di PS ad IL, sarà il rettangolo di TP in PU al rettangolo di TI in IU, come il rettangolo di OP in PS al rettangolo di HI in IL; ma il retangolo di OP in PS è sempre uguale al rettangolo di HI in
(d) 53. di qu. IL (d), dunque anche il rettangolo di TP in PU sarà sempre uguale al rettangolo di TI in IU, e però le reate TP, IU saranno uguali fra loro.

## LVIII.

Fig. 30. *Se a qualsivoglia punto* D *della curva iperbolica si tiri la tangente* EF, *che prolungata segbi gli asintoti in* E, F, *saranno le parti della tangente* ED, DF *sempre uguali fra lorò.*

Tirisi per qualsivoglia punto G la retta GH parallela alla tangente EF, e saranno sempre le ret-

rette GN, MH uguali fra loro (*a*), e quanto più vicino al punto E si pigli il punto G, ovvero la retta GH sarà vicina alla tangente EF, tanto più la retta GN si accosterà ad essere uguale alla retta ED, e la retta MH alla retta DF; dunque, siccome le rette GN, MH sono sempre uguali fra loro, così finalmente la retta ED sarà uguale alla retta DF. (*a*) Ant.

## LIX.

*Se per il centro* O, *e qualsivoglia punto* D *dell' iperbola si tiri la retta* OQ, *questa dividerà in mezzo qualsivoglia retta* NM *parallela alla tangente* EF; *e se qualsivoglia retta* NM *sia divisa in mezzo della retta* OQ, *sarà la* NM *parallela alla tangente* EF *tirata per il punto* D.

Si prolunghi la retta NM fino agli asintoti; e perchè nei triangoli GOL, LOH tanto la retta GL ad ED, quanto la retta LH a DF sta come LO ad OD, sarà permutando GL ad LH come ED a DF (*b*); onde, siccome ED è sempre uguale a DF (*c*), così anche GL sarà sempre uguale ad LH, e tolte le parti uguali GN, MH (*d*), sarà la retta NL sempre uguale ad LM, e però la retta NM sarà divisa in mezzo dalla retta OQ. Che se la retta NM, ed in conseguenza anche tutta la retta GH sia divisa in mezzo nel punto L, ella sarà parallela alla tangente EF, poichè tanto la retta NM, quanto la tangente istessa EF sono divise in mezzo dalla retta OQ, il che compete solo alle rette, che sono parallele fra loro. (*b*) 2. VII. (*c*) Ant. (*d*) 57. di qu.

## LX.

*Poste l' istesse cose, e presa la retta* OU *uguale ad* OD, *il quadrato dell' ordinata* PX *sarà al quadrato dell' ordinata* NL, *come il*

ret-

*rettangolo di* UX *in* XD *al rettangolo di* UL *in* LD.

Si prolunghino le ordinate fino agli asintoti, e sarà sempre (*a*) il rettangolo di IP in PK, ovvero di GN in NH, uguale al quadrato di ED, onde il quadrato di IX sarà uguale al rettangolo di IP in PK, ovvero al quadrato di ED col quadrato di PX (*b*), siccome il quadrato di OX è uguale al quadrato di DO col rettangolo di UX in XD (*c*); ma il quadrato di ED sta al quadrato di DO come tutto il quadrato di IX a tutto il quadrato di XO (*d*) dunque (*e*) anche il quadrato, che resta, di PX sarà per conversion di ragione al rettangolo, che resta, di UX in XD come l'intero quadrato di IX all'intero quadrato di XO, ovvero come il quadrato di ED al quadrato di DO. Nella stessa maniera si proverà che il quadrato di NL sarà al rettangolo di UL in LD come il quadrato di GL al quadrato di LO, ovvero il quadrato di ED al quadrato di DO, e però sarà il quadrato di PX al rettangolo di UX in XD come il quadrato di NL al rettangolo di UL in LD, e permutando il quadrato di PX al quadrato di NL sarà come il rettangolo di UX in XD al rettangolo di UL in LD.

(*a*) 43. *di qu.*
(*b*) 26. VII.
(*c*) 27. VII.
(*d*) 3. VII.
(*e*) 6. I.

## LXI.

Fig. 28. Tav. VI. *Fra le due rette date* AB, BC *trovare due medie proporzionali.*

Disposte le date linee ad angolo retto si compisca il rettangolo ABCD (*f*), intorno al quale col diametro BD descrivasi (*g*) il circolo ABCD; indi con l'asse AB, e parametro uguale descrivasi (*h*) la parabola equilatera AEF, che seghi il circolo nel punto E, per il quale si tiri la retta EG, che seghi i lati del rettangolo in H, I, e saranno le rette EH, HA le due medie proporzionali fra le estreme AB, BC. Poi-

(*f*) 11. *di qu.*
(*g*) 9. V.
(*h*) 11. V.

che

chè nella parabola equilatera il rettangolo di BA in AH è uguale al quadrato dell' ordinata HE (*a*), saranno (*b*) le tre BA, HE, HA continuamente proporzionali; e perchè il rettangolo di BA in AH è eguale al rettangolo di BH in HA insieme col quadrato di HA (*c*), ed il quadrato di HE è uguale al rettangolo di HE in EI insieme col rettangolo di HE in HI (*d*), siccome il rettangolo di BH in HA è uguale al rettangolo di EH in EI, ovvero di EH in HG (*e*) così ancora il rimanente rettangolo di EH in HI sarà uguale al rimanente quadrato di HA, e perciò (*e*) le tre rette EH, HA, HI, ovvero BC saranno continuamente proporzionali, e però fra le due estreme AB, BC si saranno trovate le due medie proporzionali EH, EA.

(*a*) 6. *di qu.*
(*b*) 19. VI.
(*c*) 22. VII.
(*d*) 25. VII.
(*e*) 7. VII.

## LXII.

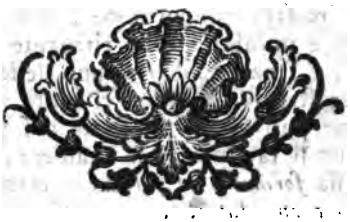
Dalla passata proposizione, che è una delle più belle e mirabili, che ritrovate fossero dagli Antichi, e senza dubbio alcuno delle più celebri per essere stata dimostrata in tante varie maniere, come può vedersi in Eutocio sopra Archimede, deducesi facilmente la maniera, con la quale si possa *formare un solido, o corpo simile a un solido, o corpo dato, e che abbia a quello qualsivoglia data ragione*, come per esempio una sfera doppia di un'altra sfera. Pongasi il diametro AC alla retta Z nella ragione data, cioè doppia, e trovandosi fra le due rette AC, Z due medie proporzionali EG, X formisi col diametro o asse EG la sfera EFGH, che sarà la metà della data sfera ABCD. Poichè, essendo le sfere (*f*), siccome tutti i corpi simili (*g*) in triplicata ragione dei loro lati omologhi, cioè degli assi AC, EG, siccome ancora la retta AC alla retta Z è (*b*) in triplicata ragione di AC ad EG, sarà la sfera ABCD alla sfera EFGH come la retta AC a Z, cioè nella data ragione, e però la sfera ABC sarà doppia della sfera EFGH. Onde

Fig. 16. Tav. V

(*f*) 39. X.
(*g*) 22. X.
(*b*) 3. II.

il

il celebre problema della duplicazione del cubo; vale a dire, formare un cubo doppio di un cubo dato, che chiamasi ancora *Problema Deliaco*, perchè fu proposto dall' oracolo di Delo, dipendeva dall' invenzione delle due medie proporzionali.



# LIBRO XII.

## *Della misura delle Figure o Sezioni Coniche, e dei loro Solidi.*

SIccome nel circolo, o qualsivoglia altra figura rettilinea, oltre alle rette che vi si tirano, ed agli angoli che da quelle si formano; si può considerare la superficie istessa, che vien compresa dalla circonferenza, o perimetro della figura; così nelle Sezioni Coniche, oltre alle curve che le contengono, le rette linee, e gli angoli che si descrivono in quelle, considerare si possono le figure, ovvero le superficie, che dalle curve medesime descritte sono; e siccome dalla rivoluzione del circolo, ed altre figure rettilinee intorno ad un'asse si generano, o si descrivono i corpi, o solidi, come le sfere, cilindri, coni, e solidi sferali, così dalla rivoluzione ancora delle Sezioni e Figure coniche generati sono, e prodotti alcuni solidi, che *solidi conici*, ovvero *conoidi* chiamar si sogliono. Dopo di aver adunque nel passato Libro considerata la formazione delle curve, o sezioni coniche, e le varie, che con le curve istesse s'incontrano, parlerò in questo, che segue, delle figure coniche, e dei solidi o conoidi, che da quelle si generano, paragonandole fra loro, e dimostrando quella dimensione, che si è potuta finora da' più celebri ed illustri Geometri ritrovare. E benchè in questo, siccome ancora nel passato Libro, si potessero dimostre molte altre bellissime ed ammirabili proprietà delle sezioni coniche, e loro solidi; la brevità nondimeno, che io prescritta mi sono, e l'idea dei soli Elementi di Matematica non mi permettono di scegliere, che le più belle, o quelle certa-

mente, che essere possano di maggiore utilità; lasciando, e bramando insieme, che l'altrui s'imparino da quegl' istessi Geometri, che sì nobilmente e diffusamente le dimostrarono.

## PROPOSIZIONI.

### I.

Fig. 26. *SE intorno all'asse medesimo* AB *con il parametro* BD *sia descritta la parabola* ABC, *e col parametro* BX *la parabola* ABH, *e fra i parametri* BD, BX *si pigli la media proporzionale* BZ, *sarà la parabola* ABC *alla parabola* ABH *come* BD *a* BZ, *cioè in subduplicata ragione del parametro* BD *al parametro* BX.

Poichè il quadrato di qualsivoglia ordinata AC (*a*) 6. IX. è uguale al rettangolo di AB in BD (*a*), ed il quadrato di AH uguale al rettangolo di AB in (*b*) 9. VI. BX (*b*), sarà il quadrato di AC al quadrato di AH come il rettangolo di AB in BD al rettan(*c*) 12. VII. golo di AB in BX, cioè (*c*) come BD a BX, cioè come (*a*) il quadrato di BD al quadrato di (*d*) 13. VII. BZ; e perciò (*d*) sarà la retta AC ad AH come BD a BZ, e così dicendo sempre di ciascuna retta, che si tiri nell' una e nell' altra parabola da qualsivoglia punto dell'asse; dunque tutte insieme le rette di una parabola saranno a tutte insieme le rette dell'altra, cioè una parabola all'altra, come BD a BZ, ovvero in subduplicata ragione del parametro BD al parametro BX.

### II.

Si potrà dunque *descrivere intorno all'istesso asse* AB *una parabola, che alla parabola data* ABC *abbia qualsivoglia data ragione,*

Se

Se l'istessa data ragione si ponga fra il parametro BD della parabola data e la retta BZ, e e trovandosi (*a*) dopo le due rette BD, BZ la terza proporzionale BX; con questa come parametro si descriva la parabola ABH, la quale sarà (*b*) alla parabola data come BZ a BD. (*a*) 31. VI. (*b*) Ant. III.

III.

Nell' istessa maniera si proverà che *l'iperbole descritte intorno al medesimo asse con l'istesso lato trasverso sono in subduplicata ragione dei loro parametri.* Fig. 27.

IV.

Anche *l'ellissi, che abbiano l'istesso asse, e lato trasverso, sono fra loro in subduplicata ragione dei loro parametri.* Fig. 24.

V.

Onde si potrano *intorno all'istesso asse e lato trasverso descrivere due iperbole ed ellissi, che abbiano fra loro qualsivoglia data ragione,* ponendo i loro parametri e lati retti delle due ellissi ed iperbole in duplicata ragione della ragione data.

VI.

*La parabola* ABC *è due terzi del parallelogrammo circoscritto* ADBC. Fig. 51.

Per qualsivoglia punto E dell'asse o diametro tirisi l'ordinata EI, che seghi la parabola nel punto I, per il quale tirisi la retta GL parallela all'asse, o diametro BC, e congiunta l'AB si concepisca intorno alla retta DB come asse un cilindro, ed un cono, che abbiano per base il circolo fatto dal raggio DA. Ora perchè il quadrato AC sta (*c*) al quadrato di EI, ovvero (*d*) il quadrato di DB al quadrato di BL, ovvero (*e*) il quadrato di AD, o di LG al quadrato di LK come la retta CB a BE, ovvero GL ad (*c*) 1. XI. (*d*) 10. IV. (*e*) 2. VII.

(a) 28. VIII. LI, sarà (a) anche il circolo del raggio LG nel cilindro al circolo del raggio LK nel cono, come la retta GL nel parallelogrammo ADBC alla retta LI nel trilineo parabolico AIBD, e così dicendo sempre; dunque tutti insieme i circoli del cilindro saranno a tutti insieme i circoli del cono, come tutte insieme le rette nel parallelogrammo a tutte insieme le rette nel trilineo parabolico, cioè il cilindro al cono come il parallelogrammo al trilineo parabolico, dunque siccome (b) 11. X. il cilindro è triplo del cono (b), così il parallelogrammo sarà triplo del trilineo parabolico, e perciò la parabola ABC sarà due terzi del parallelogrammo circoscritto ADBC.

## VII.

*Due qualsivoglia parabole* ABC, IBE *sono fra loro in ragione composta delle loro basi* AC, IE, *e delle loro altezze o diametri* CB, EB.

Poichè descritti intorno alle parabole i parallelogrammi AC, IB, le parabole saranno fra loro come gl'istessi parallelogrammi, dei quali so- (c) Ant. no parti simili, cioè due terzi (c); ma i parallelogrammi AB, IB sono fra loro in ragione composta delle loro basi AC, IE, ed altezze CB (d) 16. VI. EB (d); dunque anche le parabole istesse saranno fra loro in ragione composta delle basi ed altezze.

## VIII.

*Se nella parabola* ABC *si tiri la retta* IE *parallela alla base* AC, *sarà la parabola* ABG *alla parabola* IBE *come il cubo di* AC *al cubo di* IE, *cioè in triplicata ragione delle basi* AC, IE.

Poichè, essendo le parabole ABC, IBE in ragione composta delle loro basi AC, IE, ed al- (e) Ant. tezze CB, EB (e), ed essendo la ragione di CB

a BE

a BE duplicata della ragione delle basi AC, IE (*a*), sarà la ragione delle parabole triplicata della ragione di AC ad IE, ovvero (*b*) le parabole saranno fra loro come i cubi delle loro basi AC, IE. (*a*) 18. XI. (*b*) 22. X.

IX.

*Se la porzione dell'asse* BD, *e il diametro* EF *sieno fra loro uguali, saranno ancora fra loro uguali le porzioni paraboliche* ABCD, HEIF. Fig. 52.

Si tirino per i punti B, E le ordinate BM, EN, e la tangente EG. Poichè le rette BP, EQ sono uguali fra loro per essere uguali all'istessa retta BG (*c*), saranno uguali i triangoli rettangoli BPO, QEO, ed aggiunto di comune il triangolo BOE, sarà il triangolo BPE uguale al triangolo BQE, e perciò (*d*) ancora la porzione parabolica BPE sarà uguale alla porzione parabolica BQE, e tutta la parabola NBE uguale a tutta la parabola BEM. E perchè il quadrato di AD sta al quadrato di NP come DB a BP (*e*), cioè come FE ad EQ, ovvero (*f*) come il quadrato di FH al quadrato di QB, sarà anche il cubo di AD al cubo di NP come il cubo di FH al cubo di QB, ovvero (*g*) la parabola ABC alla parabola NBE come la parabola HEI alla parabola BEM; e però, se le parabole NBE, BEM sono fra loro uguali, uguali ancora saranno le parabole o porzioni paraboliche ABC, HEI. (*c*) 17. XI. (*d*) 6. di questo. (*e*) 1. XI. (*f*) 29. XI. (*g*) Arch.

X.

*Se intorno all'asse* AC *si descriva il circolo* AGCI, *e l'ellisse* AHCK, *sarà il circolo dell'ellisse come l'asse maggiore* AC *al minore* HK, *ovvero come il quadrato dell'asse maggiore* AC *al rettangolo fatto dagli assi* AC, HK. Fig. 53.

Poichè, essendo (*h*) il rettangolo di AB in BC, (*h*) 2. XI.

(a) 16. VII. BC, ovvero (a) il quadrato della retta BD al quadrato di BE come il rettangolo di AF in FC, (b) 13. VII. ovvero (b) il quadrato di FG al quadrato di FH, sarà sempre il lato DB al lato EB come il lato GF al lato HF, e però il circolo all'elisse sarà come GF ad HF, ovvero GI, o AC ad HK, ovvero (c) come il rettangolo di GI (c) 2. VI. in AC, cioè il quadrato di AC, al rettangolo di AC in HK.

XI.

*Se tra le rette* AF, FH, *che sono metà degl'assi* AC, HK, *si trovi la media proporzionale* AL, *sarà il circolo fatto dal raggio* AL *uguale all'elisse* AHCK.

Poichè, essendo il circolo all'elisse come il quadrato di AC al rettangolo di AC in HK (d), (d) *Ant.* o prese le quarte parti, come il quadrato di AF al rettangolo di AF in FH, ovvero al quadrato di AL uguale all'istesso rettangolo di AF in FH (e), cioè (f) come il circolo del raggio AF al circolo del raggio AL, sarà il circolo del raggio AL uguale all'elisse AHCK.

(e) 19. VI.

(f) 27. VII.

XII.

*Se* dunque *due elissi si paragonino fra loro, saranno come i rettangoli dei loro assi.*

Poichè pigliandosi fra i loro semiassi le medie proporzionali, saranno l'elissi fra loro come i circoli fatti da quelle medie proporzionali come da raggi (g), cioè come i loro quadrati (b), ovvero (i) come i rettangoli dei semiassi, ovvero come i rettangoli degli assi interi.

(g) *Ant.*

(b) 28. VII.

(i) 19. VI.

XIII.

*Le due porzioni, o segmenti* KAH, NAE *della medesima elisse sono fra loro come i segmenti corrispondenti* IAG, MAD *del loro circolo circoscritto.*

XIV.

*E la porzione, o segmento elitico* NAE *sta all'intera ellisse* AHCK *come il segmento corrispondente* MAD *del circolo all'intero circolo* AGCI.

XV.

Si potrà finalmente *dividere in mezzo qualsivoglia porzione* AHMIND *di ellisse,* Fig. 47.

Se dividendosi in mezzo in X la retta AD tirisi per il punto X dal centro C la retta CM; la quale dividendo in mezzo (*a*) tutte le rette HI, che si tirino parallele ad AD, dividerà ancora in mezzo la porzione elittica AHMIND. (*a*) 50. XI.

XVI.

*Se con l'istesso semiparametro* HA, *ovvero metà del lato retto, si descriva l'iperbola equilatera* ACD *e la parabola* AEF, *e per qualsivoglia punto* D *dell'iperbola si tiri la* FG, *che sia parallela all'asse, e seghi l'istessa iperbola in* D, *e la retta* HG *tirata dal centro* H *perpendicolare all'asse, ovvero parallela all'ordinate, in* G, *sarà lo spazio, ovvero trapezio iperbolico* AHGD *sempre uguale al rettangolo fatto dal semiparametro* HA *nella curva parabolica corrispondente* AEF. Fig. 54.

Tirisi al punto F della parabola la tangente FI, ed in essa si pigli la parte infinitamente piccola FO, e per O tirisi la retta NM parallela all'asse; ed ordinate per i punti D, F le rette DU FP. si tiri dal punto E la perpendicolare alla tangente FI, ovvero la normale FQ; e perchè nell'iperbola equilatera il rettangolo di XU in UA è uguale al quadrato dell'ordinata UD (*b*), ovvero HG, aggiunto di comune il quadrato di HA, sarà il rettangolo di XU in UA insieme col quadrato di HA, cioè (*c*) il quadrato di (*b*) 8. XI. (*c*) 27. VII.

(a) 20. VII. HU, uguale al quadrato di HG, e di HA, cioè (a) al quadrato di AG; e però la retta HU sarà uguale alla retta AG; ma la retta AG è sempre uguale alla normale QF, poichè nei triangoli rettangoli QPF, AHG la sunnormale (b) 17. XI. PQ è uguale al semiparametro AH (b), ed il lato PF è sempre uguale al lato opposto HG, ed in conseguenza anche la retta AG sempre uguale alla retta QF; dunque siccome la retta AG è sempre uguale alla retta QF, anche la retta HU, ovvero GD sarà sempre uguale alla normale QF. Perchè poi nel triangolo rettangolo QFI, essendo FP perpendicolare sopra la base QI, sarà (c) al triangolo FQP simile al tri- (c) 14. VII. angolo FIP, ovvero FON, e però (d) sarà FQ (d) 1. VII. a QP come OF ad FN, onde (e) il rettangolo dell'estreme FQ, FN sarà uguale al rettan- (e) 18. VI. golo dell'intermedie OP, OF; ma, per essere uguali i lati, il rettangolo di FQ in NF è uguale al rettangolo di GD in DR, oppure allo spazio iperbolico GDCM, ed il rettangolo di QP in OF è uguale al rettangolo del semiparametro HA nella particella EF della curva parabolica corrispondente, e così sempre; dunque l'intero trapezio iperbolico AHGD sarà uguale all'intero rettangolo fatto dal semiparametro HA nell'intera curva parabolica AEF.

## XVII.

Se si ponesse dunque il rettangolo di HA in AX uguale al rettangolo DGHU, *sarebbe il trapezio iperbolico* DGHA *al rettangolo* DGHU, *come la curva parabolica* FEA *alla retta* AX; e però *l'iperbola* DAU *sarebbe uguale al rettangolo fatto dalla retta* HA *nella differenza, o eccesso della linea retta* AX *sopra la curva parabolica* FEA.

XVIII.

XVIII.

Quindi apparisce, *che la quadratura dell' iperbola dipende dalla rettificazione della curva parabolica; e la rettificazione della curva parabolica dalla quadratura dell' iperbola.*

XIX.

*Se nell' iperbola* ABC *tirisi qualsivoglia retta, la quale sia divisa in mezzo dalla retta* OQ *tirata per il centro, anche il segmento, o porzione iperbolica* PDR *sarà divisa in mezzo dall' istessa retta* OQ. Fig. 50.

Tirisi per qualsivoglia punto L della retta DX la retta NM parallela alla retta PR, o alla tangente EF finchè s'arrivi al punto D, per il quale passa la tangente istessa, e sarà l'istessa retta NM divisa in mezzo nel punto L (*a*); il che (*a*) 59. XI. verificandosi di tutte le rette, che nel segmento iperbolico si tirino parallele alla prima retta PR, anche il segmento, o porzione iperbolica sarà divisa in mezzo dalla retta OQ.

XX.

*Se dai trapezj rettilinei uguali* IEDX, XDFK *si tolgano le porzioni iperboliche uguali* PNDX, XDMR, *resteranno i trapezj iperbolici* IEDNP, KFDMR *fra loro uguali.*

XXI.

*Se presi in qualsivoglia maniera due punti* D, E *nella curva iperbolica si tirino le rette* DH, DI, EF, EG *parallele agli asintoti, saranno i rettangoli* DHOI, EGOF *formati dall' istesse rette, e dagli asintoti sempre uguali fra loro.* Fig. 56.

Si tiri per gl' istessi punti D, E la retta KL, e saranno uguali (*b*) le rette KD EL, ed aggiunta di comune la retta DE, anche la retta (*b*) 57. XI.

KE sarà uguale alla retta DL, e però sarà EK a KD come DL ad LE; ma come EK a KD (a) 27 VI. così sta EF a DH (a), e come DL ad LE, così DI ad EG; dunque sarà EF a DH come (b) 18 VI. DI ad EG, e però (b) il rettangolo dell'estreme EF, EG, cioè il rettangolo EØ, sarà uguale al rettangolo dell'intermedie DH, DI, cioè al rettangolo DO. Similmente ancora, se i rettangoli DHOI, NMOP fossero dall'istessa parte, sarebbero sempre uguali fra loro. Poichè formato dall'altra parte qualsivoglia rettangolo EO si proverebbe ciascuno dei due rettangoli DHOI, NMOP uguale all'istesso rettangolo EO, e perciò sarebbe HO ad OM come OP ad OI, ovvero NM ad HD.

## XXII.

Fig. 55. *Se nell'asintoto* AB *si pigliino le tre rette* AB, AD, AG, *continuamente proporzionali, e dai punti* C, D, B *si tirino le rette* CE, DF, BG *parallele all'altro asintoto* AH, *i trapezj iperbolici* ECDF, FDBG *saranno uguali fra loro.*

Si tirino per i punti G, F, E, le rette GL, FK, LH parallele all'asintoto AB, e prolungata la BG in L si congiunga AN, NF, FL, EG, GA, AE. Perchè i rettangoli HACE, (c) Ant. KADF sono uguali (c), saranno (d) i loro lati reciprocamente proporzionali; cioè HA ad AK (d) 18 VI. come DA ad AC; ma come DA ad AC così ponesi BA ad AD, dunque come HA ad AK così sarà BA ad AD, e permutando come HA ad AB così KA ad AD, onde i rettangoli HABL, KADF saranno simili (e) e però (e) 5 VII. collocati intorno all'istesso diametro, cioè le rette AF, AL saranno poste per diritto. Similmente, perchè i rettangoli IABG, HACE sono uguali (c), sarà HA ad AI come BA ad AC, e permutando HA a BA come AI ad AC, e

però

però i rettangoli HABL, IACN saranno simili, e collocati intorno all'istesso diametro, onde anche le rette AN, AL saranno poste per diritto; e però le rette AN, NF, FL formano una linea retta, ovvero il diametro AL, il quale dividendo in mezzo la retta EG diametro del rettangolo ENGL, dividerà ancora (a) in mezzo il segmento iperbolico EFGME, e però se dai triangoli uguali EAM, GAM, si tolgano le porzioni iperboliche uguali EFM, GFM, saranno i triangoli iperbolici EAF, GAF, che restano, fra loro uguali; ed essendo uguali i triangoli EAC, FAD per essere la metà dei rettangoli uguali ECAH, FDAK, tolto il triangolo comune NAC, sarà il triangolo, che resta, EAN uguale al rimanente trapezio FNCD, ed aggiunto di comune il triangolo iperbolico ENF, sarà l'intiero triangolo iperbolico EAF uguale al trapezio iperbolico ECDF; e perchè similmente il triangolo GBA, e il triangolo FDA sono uguali fra loro, tolto di comune il triangolo ODA, sarà il trapezio rimanente GBDO uguale al triangolo rimanente FOA, ed aggiunto di comune il triangolo iperbolico GOF, sarà l'intero triangolo iperbolico GAF uguale al trapezio iperbolico GBDF; ma i triangoli iperbolici EAF, GAF si sono dimostrati eguali fra loro, dunque anche uguali fra loro saranno i trapezj iperbolici ECDF, FDBG.

(a) 19. di questo.

## XXIII.

*Se nell' asintoto* AE *fia* AB *ad* AC *come* AD *ad* AE, *e si tirino le rette* BF, CG, DH, EI *parallele all' altro asintoto* AK, *i trapezj iperbolici* BFGC, DHIE *saranno uguali.* Fig. 57.

Pongasi la retta AM media proporzionale fra le AC, AD (b) e sarà (c) il quadrato di AM uguale al rettangolo di AC in AD; ma, per

(b) 17. VII.

(c) 19. VI.

essere le quattro rette AB, AC, AD, AE proporzionali; anche il rettangolo di AB in AE è (a) 18. VI. uguale al rettangolo di AC in AD (a), dunque l'istesso quadrato di AM sarà uguale al rettangolo di AB in AE, onde saranno le rette AB, (b) Am. AM, AE proporzionali, e però (b) i trapezj iperbolici BFNM, MNIE saranno uguali, e tolti i trapezj CGNM, MNHD, che sono similmente uguali (b), saranno ancora uguali i trapezj, che restano, BFGC, DHIE.

## XXIV.

Onde si potrà *dividere qualsivoglia dato trapezio iperbolico* BEIF *in due, o in tre parti uguali*,

Se fra le rette AB, AE si trovi la media proporzionale AM; poichè tirata la MN saranno uguali i trapezj iperbolici BFNM, MNIE; siccome, se si piglino due medie proporzionali, i tre trapezj sarebbero uguali, e così sempre.

## XXV.

Se dunque *nell' asintoto* AE *si piglino le rette* AB, AC, AM, AD, AE *ec. continuamente proporzionali, e si tirino le perpendicolari*, BF, CG, MN, DH, EI, *saranno sempre i trapezj iperbolici compresi da queste rette uguali fra loro*.

## XXVI.

*Lo spazio asintotico compreso dalla curva iperbolica e dall' asintoto è assolutamente infinito*.

Poichè prolungandosi in infinito l'asintoto AE si possono pigliare in esso infinite rette, o parti continuamente proporzionali, e perciò nello spazio asintotico compreso dall' asintoto infinito, e curva iperbolica similmente infinita, si potrebbero pigliare, o determinare infiniti trapezj iperbolici

fra

fra loro uguali, ovvero uno spazio, o trapezio iperbolico infinitamente moltiplice di qualsivoglia trapezio iperbolico dato BFGC.

## XXVII.

*Il solido, o conoide parabolico generato dalla rivoluzione della parabola* ABC *intorno all' asse* CB *è la metà del cilindro circoscritto generato dalla rivoluzione del rettangolo* ADBC *intorno all' asse* CB. Fig. 51.

Tirisi per qualsivoglia punto E dell'asse l'ordinata EF, che seghi in O la retta AB, e la curva parabolica nel punto I, per il quale si tiri la LG parallela all'asse. Perchè il circolo fatto dal raggio EF nel cilindro sta al circolo fatto dal raggio EI nel conoide come il quadrato di EF al quadrato di EI (*a*), ovvero (*b*) come la retta CB a BE, ovvero (*c*) AC ad OE, ovvero FE ad OE, sarà sempre il circolo di EF nel cilindro al circolo di EI nel conoide, come la retta FE nel rettangolo alla retta EO nel triangolo; e però il cilindro sarà col conoide come il rettangolo al triangolo; dunque, siccome il rettangolo è doppio del triangolo (*d*); così il cilindro sarà doppio del conoide, ovvero il conoide istesso sarà la metà del cilindro. Nell'istessa maniera si proverebbe qualsivoglia conoide obliquo HEI intorno al diametro EF metà del cilindro a se circoscritto. Fig. 52.

(*a*) 28. VIII. (*b*) 1. IX. (*c*) 2. VII. (*d*) 22. VI.

## XXVIII.

*Qualsivoglia conoide parabolico fatto dalla parabola* ABC *sta al conoide parabolico fatto dalla parabola* HEI *in ragione composta delle basi e dell' altezze.* Fig. 52.

Poichè, essendo i conoidi ABC, HEI parti simili, cioè metà dei loro cilindri circoscritti, siccome i cilindri sono fra loro in ragione composta delle loro basi ed altezze, così ancora i

conoidi istessi saranno in ragione composta delle loro basi ed altezze.

## XXIX.

Onde *se il conoide parabolico* A B C *sia segato con un circolo parallelo alla base, sarà l' intero conoide* A B C *alla sua porzione* N B E *come il quadrato dell' altezza, o asse* D B *al quadrato dell' altezza, o asse* B P.

Poichè, essendo fra loro i conoidi in ragione (a) Ant. composta delle loro basi ed altezze (a), ed essendo in questo caso la tangente delle loro basi, cioè dei circoli fatti coi raggi D A, P N, uguale alla ragione delle loro altezze D B, B P, sarà (b) la ragione composta di queste due ragioni uguali duplicata della ragione di D B a B P (c), e però saranno i conoidi fra loro come i quadrati delle loro altezze D B, B P. (b) 1. XI. (c) 3. II.

## XXX.

Fig. 53. *Se l' ellisse, e il circolo circoscritto girino intorno all' istesso asse* A C, *la sfera generata dal circolo sarà alla sferoide generata dall' ellisse come il quadrato dell' asse maggiore* A C *al quadrato dell' asse minore* H K.

Perchè, tirata qualsivoglia ordinata D B, il quadrato di D B nel circolo sta al quadrato di B E nell' ellisse come il quadrato di F G al quadrato di F H (d), anche il circolo del raggio D B nella sfera sarà sempre al circolo del raggio B E nella sferoide come il circolo del semiasse F G al circolo del semiasse H F, e però tutta l' intera sfera alla sferoide sarà come il circolo di F H, ovvero come il quadrato di F G al quadrato di H F, ovvero come il quadrato dell' asse intero G I, ovvero A C, al quadrato dell' asse minore H K. (d) 9. di qu

XXXI.

## XXXI.

Anche *qualsivoglia segmento sferico* MAD *sarà a qualsivoglia segmento corrispondente di sferoide* NAE *come l'intera sfera all'intera sferoide, cioè come il quadrato di* DB *al quadrato di* EB, *o come il quadrato di* AC *al quadrato di* HK.

## XXXII.

E però *il segmento, o la porzione di sferoide* NAE *sarà alla sferoide intera come la porzione di sfera* MAD *all'intera sfera.*

## XXXIII.

Onde, *siccome è nota la ragione del segmento sferico alla sfera* (*a*), *così sarà nota la ragione della porzione di sferoide alla sferoide istessa.* (*a*) 43. X.

## XXXIV.

*Qualsivoglia sferoide è subsesquialtera, o due terzi del cilindro circoscritto.*

Intendasi circoscritta alla sferoide la sfera, ed alla sfera il cilindro, e sarà (*b*) il cilindro circoscritto alla sfera all'altro cilindro circoscritto alla sferoide come il circolo del raggio FG al circolo del raggio FH, ovvero (*c*) come il quadrato di GI, o AC al quadrato di HK, cioè (*d*) come la sfera alla sferoide; e però sarà invertendo, e permutando la sferoide al cilindro a se circoscritto come la sfera al suo cilindro circoscritto, (*e*) in ragione subsesquialtera. (*b*) 7. X. (*c*) 22. VIII. (*d*) 30. *di qu.* (*e*) 35. X.

## XXXV.

E però *due sferoidi saranno fra loro come i cilindri circoscritti, cioè in ragione composta delle loro basi ed altezze, ovvero degli assi e dei circoli massimi dell'istesse sferoidi.*

XXXVI.

## XXXVI.

Fig. 58. *Se intorno all' asse* DB *col lato trasverso* BE *si descriva l' iperbola* ABC, *il di cui lato retto* BX *sia doppio del trasverso* BE, *e col raggio* DE *si descriva il circolo* FHDG, *nel quale si ordini la retta* HG, *sarà la conoide iperbolica fatta dall' iperbola intorno all' asse* BD *sempre uguale al segmento sferico fatto dal segmento circolare* GDH *intorno all' asse medesimo* BD.

Preso qualsivoglia punto I s'ordini per esso nell' iperbola la retta LK, e si descriva il circolo MIN. Perchè dunque il lato trasverso EB è la metà del lato retto BK, sarà (*a*) il rettangolo di ED in DB la metà del quadrato della retta AD, e però il rettangolo di FD in DB, ovvero (*b*) il quadrato di DH, sarà uguale al quadrato di AD, ed il circolo fatto dal raggio DH, ovvero (*c*) la superficie sferica fatta dall' arco HD, sarà sempre uguale al circolo fatto nella conoide dal raggio AD. Nella istessa maniera si proverà, che il rettangolo di EI in IB è la metà del quadrato di IL, e però il rettangolo di OI in IB, ovvero il quadrato di IM, è uguale al quadrato di IL, ovvero il circolo del raggio IM, o la superficie sferica fatta dall'arco IM, è uguale al circolo nella conoide fatta dal raggio IL, onde l'intera conoide sarà uguale al segmento sferico fatto dall' arco GDH.

(*a*) 8. XI.
(*b*) 15. VII.
(*c*) 43. IX.

## XXXVII.

Onde *qualsivoglia conoide* ABC *sta alla conoide* LAK *come il segmento sferico* HDG *al segmento sferico* MIN.

## XXXVIII.

Ed *essendo nota la ragione dei segmenti sferici*

*rici fra di loro, sarà anche nota la ragione delle Conoidi iperboliche.*

## XXXIX.

*Se la retta* ZE *sia la metà del lato trasverso* EB, *e però* ZB *sesquialtera del lato trasverso* EB, *sarà la conoide iperbolica fatta dall'iperbola* ABC *al cono inscritto* ABC *come* ZD *a* DE.

Pongasi la QF uguale ad DE, ovvero EF, e perchè il segmento sferico HDG, ovvero (*a*) la conoide iperbolica ABC, sta al cono HDG come QB a BF (*b*), ed il cono HDG al cono ugualmente alto ABC sta come il circolo del raggio HB al circolo del raggio AD, ovvero DH, cioè come il quadrato di HB al quadrato di DH, cioè (*c*) come il rettangolo di FB in BD al rettangolo di FD in DB, cioè come FB ad FD, sarà per ugualità ordinata la conoide iperbolica ABC al suo cono inscritto come QB ad FD, ovvero come la metà di QB alla metà di FD; ma DZ è la metà di QB, essendo ED metà di QE, ed EZ metà di EB, ed ancora il raggio ED è la metà della retta o diametro FD, dunque la conoide al cono inscritto sarà come ZD a DE.

(*a*) 36. *di qu.*
(*b*) 42. X.
(*c*) 15. 16. VII.

L'istesso si proverebbe ancora se il conoide fosse inclinato, ovvero formato intorno al diametro.

## XL.

*Qualsivoglia conoide* PBR, *che abbia il lato trasverso* EB, *e lato retto* BY, *sarà al cono inscritto come* ZD *a* DE.

Descrivasi con l'istesso asse BD, lato trasverso BE, e col lato BX doppio del trasverso BE il conoide ABC, e poichè qualsivoglia circolo nel conoide ABC sta al circolo corrispondente nel conoide PBR come il quadrato di DA al quadrato

drato di DP, ovvero come il lato retto BX al
(a) 3. lato retto BY (a), saranno i conoidi fra loro
di qu. come i circoli delle loro basi, ovvero come i co-
ni iscritti, e permutando il conoide PBR al suo cono
(b) Ant. sarà come il conoide ABC al suo cono, cioè (b)
come ZD a DE.

XLI.

Fig. 49. *Se l' iperbola* ANB, *ed insieme gli asintoti* CT, CS *girino intorno all' asse* QX, *sarà il rotondo solido scavato, coppa, o scodella generata dallo spazio iperbolico* PODNMP *uguale al cilindro, che si produce dal rettangolo* ZDNX.

Perchè tirata per qualsivoglia punto K, o X dell' asse QX qualsivoglia retta HL, o OS, il rettangolo di HM in ML, o di OP in PS è
(c) 53. sempre uguale al quadrato dell' istessa retta DN
XI. (c), sarà ancora sempre (d) l'armilla, o zona
(d) 32. circolare descritta dalla retta HM, o QP ugua-
VIII. le al circolo descritto dalla retta, o raggio DN, o ZX, MK, e però tutte insieme l'armille, ovvero la scodella iperbolica, che esse compongono, sarà sempre uguale a tutti i circoli del cilindro, ovvero al cilindro istesso.

XLII.

Onde *il conoide iperbolico prodotto dall'iperbola* PNR *sarà uguale all'anello conico generato dal triangolo* ODZ *intorno all' asse* QX.

Poichè il tronco di cono generato dal trapezio ODNX è composto tanto dalla scodella conica col conoide iperbolico, quanto ancora dal cilindro fatto dal rettangolo ZDNX coll'anello fatto dal triangolo ODZ intorno all' asse QX, siccome la coppa, o scodella è sempre uguale al
(e) Ant. cilindro (e), così ancora l'anello che resta, sarà sempre uguale al conoide iperbolico.

XLIII.

*Se l' iperbola* RNX *giri intorno alla retta*

Cc *tirata per il centro parallela alla tangente* NE, *sarà il solido, o la coppa iperbolica fatta dal trapezio iperbolico* CcEIN *uguale al cilindro fatto dal rettangolo di* Cc *in* CN *metà del lato trasverso.*

Prolungato l'asintoto TC, e tirata qualsivoglia retta BI parallela all'asse QX, il rettangolo di FI in IE, ovvero di BE in EI, sarà sempre uguale al quadrato di CN (*a*), ovvero di cE, onde (*b*) anche l'armilla, o zona circolare descritta dalla retta EI, sarà sempre uguale al circolo descritto dal raggio CN, o cE, e però tutta la coppa iperbolica sarà uguale a tutto il cilindro.

(*a*) 56. XI.

(*b*) 32. VIII.

## XLIV.

Onde *aggiunto al cilindro istesso il cono fatto dal triangolo* cCE *intorno alla retta* Cc, *si avrà l' intero solido, o cilindro iperbolico fatto dal trapezio iperbolico* CcIN *uguale ad un cilindro, od un cono, ovvero ad un solo cono, o cilindro.*

## XLV.

*Se intorno all' iperbola equilatera* FDU *si descrivano gli asintoti* AB, AC, *i quali comprendano angolo retto* (*c*), *ed al vertice* D *dell' iperbola si tirino le rette* DG, DH *parallele agli asintoti, sarà il solido acuto iperbolico generato dallo spazio iperbolico infinito* GBFG *intorno all' asintoto* AB *uguale al cilindro generato dal quadrato* AGDH, *che gli serve come di base, o piedistallo.* Fig. 59.

(*c*) 55. XI.

Si tiri per qualsivoglia punto N dell' asintoto AC la retta NE, e si compisca il rettangolo NI. Poichè i rettangoli AHDG, ANEI, sono sempre uguali fra loro (*d*); anche le superfi-

(*d*) 21. di qe-

cie

rie cilindriche generate da quei rettangoli, o dalle rette HD, NE saranno sempre uguali fra loro (a); ma la superficie cilindrica fatta dalla retta DH al circolo della base, o del raggio AH, sta come la retta DH alla metà del raggio AH (a), cioè è doppia dell'istesso circolo fatto dal raggio AH, ovvero NM, dunque anche la superficie cilindrica fatta dalla retta NE sarà doppia del circolo fatto dal raggio NM, e così sempre qualsivoglia superficie cilindrica nel solido acuto iperbolico infinito è sempre doppia del circolo fatto del raggio corrispondente nel cilindro generato dal quadrato AHDG intorno all'asintoto AC; dunque tutto il solido iperbolico fatto dallo spazio ABFDHA intorno all'asintoto AB sarà doppio del cilindro fatto dal quadrato AHDG intorno all'asintoto AC, ovvero all'altro asintoto AB; e dividendo il solito acuto iperbolico infinito fatto dallo spazio iperbolico GBF.D sarà uguale al cilindro fatto dal quadrato AGDH intorno all'asintoto AB.

(a) 24. IX.

## XLVI.

Anzi generalmente *qualsivoglia solido acuto fatto dalla rivoluzione dello spazio iperbolico* IBFE *sarà sempre uguale al cilindro fatto dal rettangolo* AIEN.

Tirisi il diametro AE, e per qualsivoglia punto K la retta KL, la quale seghi la retta IE in P, e il diametro AE in O. Poichè la superficie cilindrica descritta dalla retta KL sta alla superficie cilindrica descritta dalla retta KP come LK a KP (b), ovvero LK ad NE, ovvero (c) NA ad AK, ovvero (d) EN ad OK, ovvero PK a KO, sarà qualsivoglia superficie cilindrica nel solido generato dallo spazio AIBFENA alla superficie corrispondente nel cilindro generato dal rettangolo AIEN come è la retta PK nel rettangolo AIEN alla retta OR nel triangolo AEN,

(b) 22. IX.
(c) 21. di qu.
(d) 2. VII.

AEN, e però il solido iperbolico col cilindro al cilindro sarà come il rettangolo al triangolo; dunque, siccome il rettangolo è doppio del triangoli; così il solido intero sarà doppio del cilindro, e dividendo il solido iperbolico sarà sempre uguale al cilindro sottoposto.

XLVII.

*Il solido iperbolico* GBFD *sarà al solido iperbolico* IBFE *come il raggio* GD *al raggio* IE.

Pongasi dopo le rette AH, AN, ovvero GD, IE terza proporzionale la AK, e sarà il cilindro generato dal rettangolo AD al cilindro generato dal rettangolo AM come il circolo di AK al circolo di AN, ovvero come il quadrato di AH al quadrato di AN cioè, (*a*) come la retta AH ad AK, ma il cilindro di AM sta al cilindro di AE come l'altezza AG ad AI (*b*), ovvero AN ad AH, ovvero AK ad AN; dunque per egualità ordinata sarà il cilindro di AD al cilindro di AE, come AH ad AN, ovvero GD ad IE; dunque anche i solidi iperbolici, che sono uguali ai cilindri, saranno fra loro come i raggi GD, IE.

(*a*) 7. X.

(*b*) 14. X.

XLVIII.

E però *nel solido acuto iperbolico si potrà tagliare una porzione* GIED *uguale a qualsivoglia dato cilindro; ovvero due porzioni* GIED, IQLE, *che abbiano fra loro qualsivoglia data ragione.*

XLIX.

*E se le rette* HN, NK *fossero fra loro uguali, anche le porzioni* GIED, IQLE *sarebbero fra loro uguali.*

Anzi

L.

Anzi *l' istesso solido infinito* QBFL *sarebbe uguale a qualsivoglia porzione sottoposta* IQLE, *ovvero* GIED.

FINE.

NOI

# NOI RIFORMATORI

## Dello Studio di Padova.

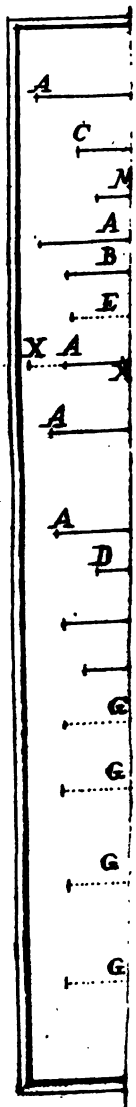
AVendo veduto per la Fede di Reviſione, ed Approvazione del *P. F. Filippo Roſa Lanzi* Inquiſitor General del Sant'Officio di *Venezia* nel Libro intitolato *Stampato e MSS. Elementi di Matematica, e Geometria di Odoardo Corſini Tomi due in ottavo* non v' eſſer coſa alcuna contro la Santa Fede Cattolica, e parimente per Atteſtato del Segretario Noſtro, niente contro Principi, e buoni coſtumi concediamo Licenza ad *Antonio Perlini* Stampator di *Venezia* che poſſi eſſere ſtampato, oſſervando gli ordini in materia di Stampe, e preſentando le ſolite Copie alle Pubbliche Librarie di Venezia, e di Padova.

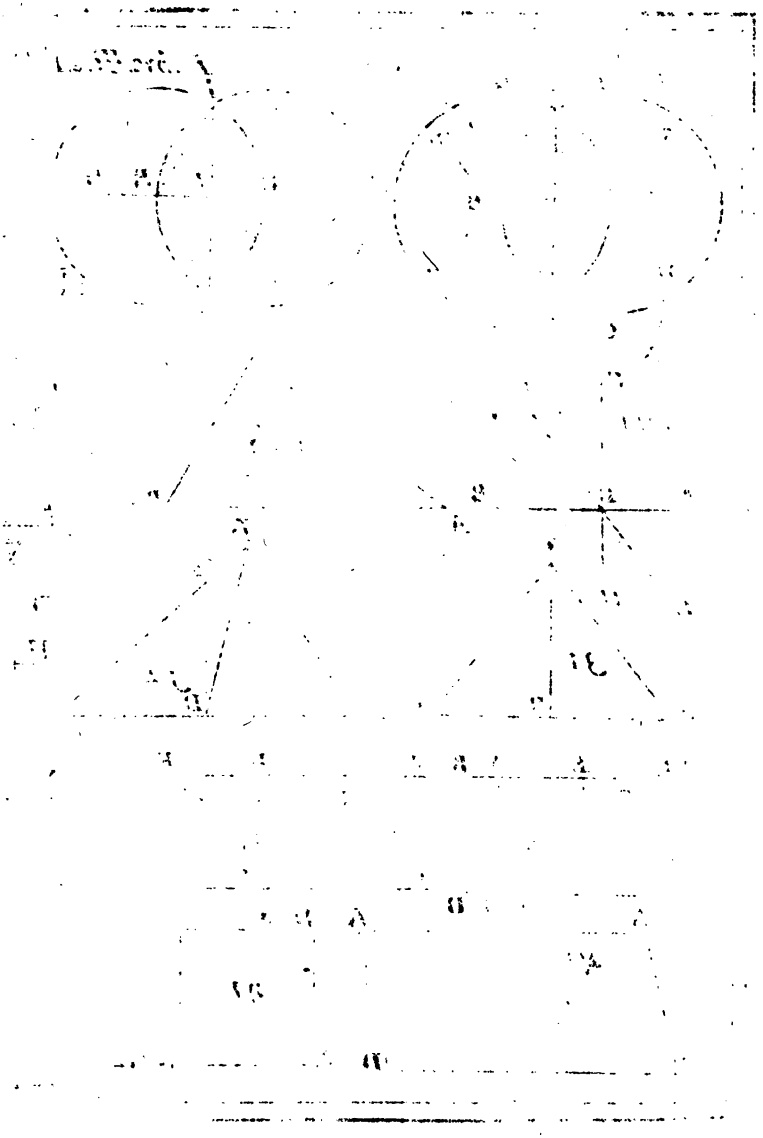
Dat. li 23. Maggio 1764.

( Sebaſtian Juſtinian Ref.
( Alviſe Vallareſſo Ref.
( Franceſco Moroſini 2°. Cav. Procur. Ref.

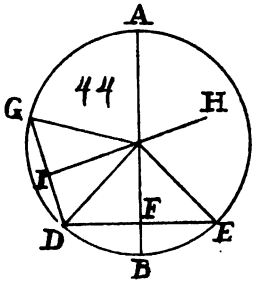
Regiſtrato in Libro a Carte 205. al Num. 1199.

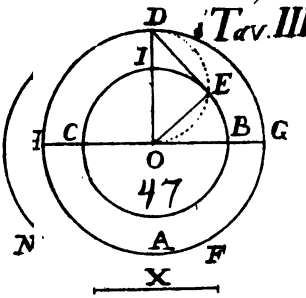
*Davidde Marcheſini Segretario.*

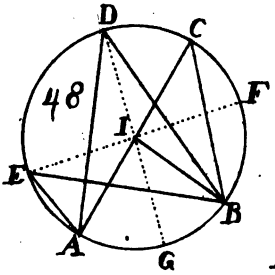

A
C
M
A
B
E
X A X
A
A
D
G
G
G
G

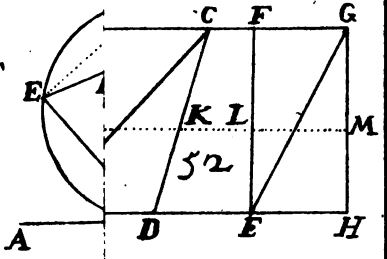


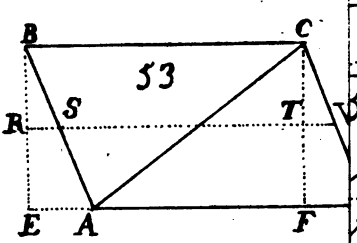
Tav. III

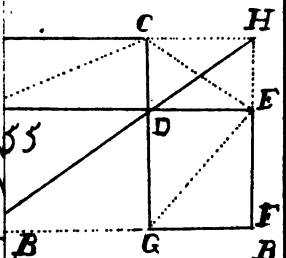

A
44
G
H
I
F
D
E
B

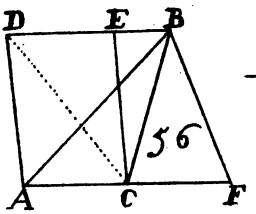

D
I
E
C
B
G
O
47
N
A
F
X

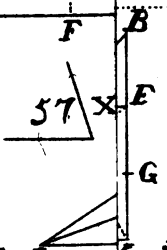

D
C
48
F
I
E
B
A
G

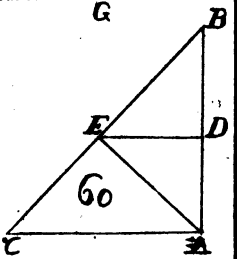

C
F
G
E
K
L
M
52
A
D
E
H

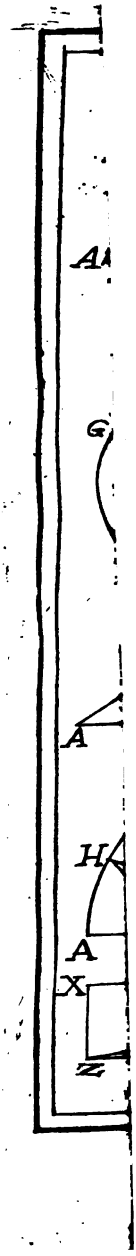

B
C
53
R
S
T
E
A
F


C
H
E
55
D
F
G


D
E
B
56
A
C
F

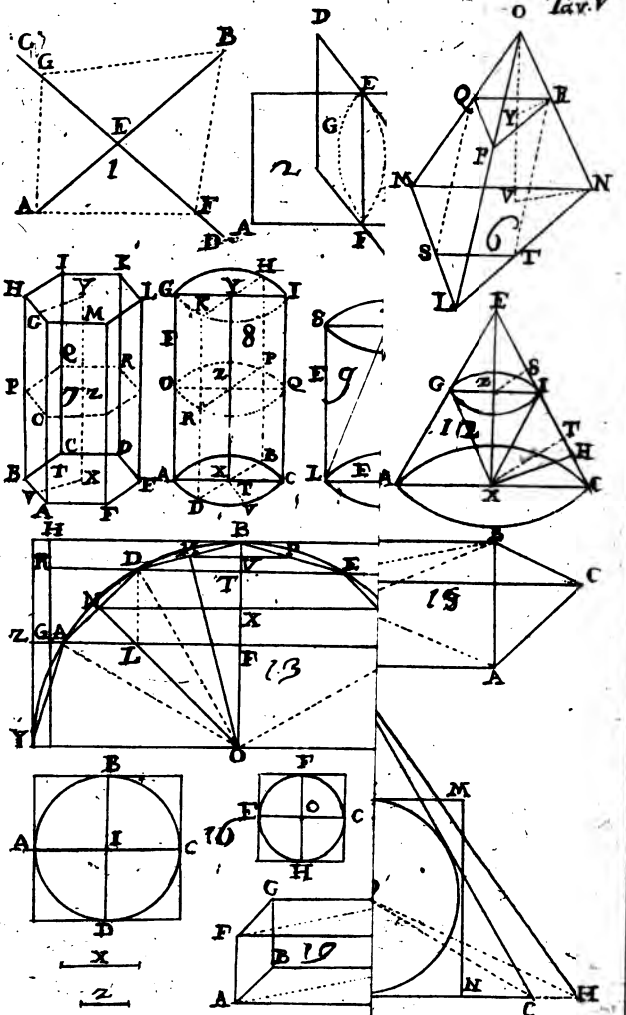

57
X
B
E
G
I
C

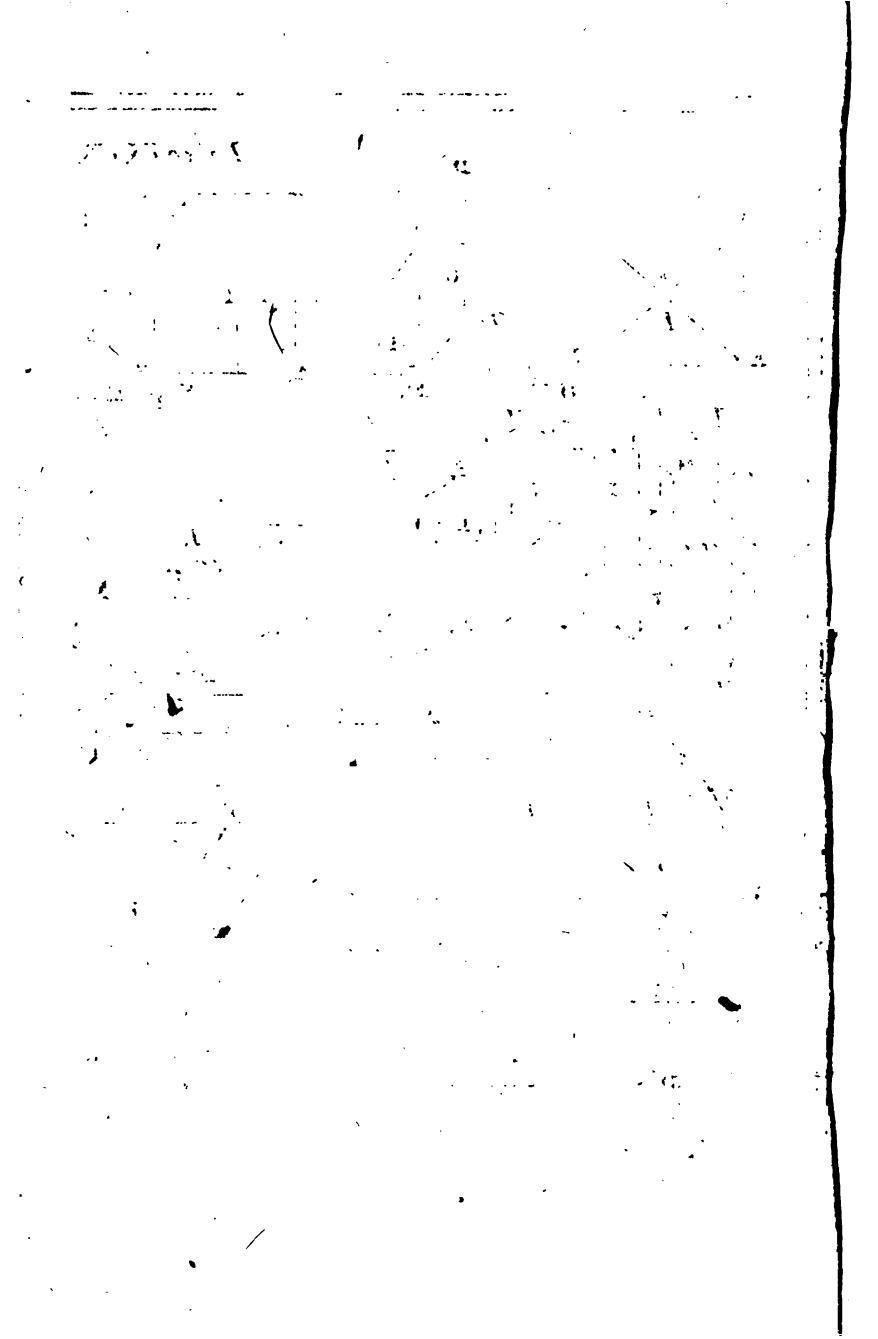

B
E
D
60
C
A

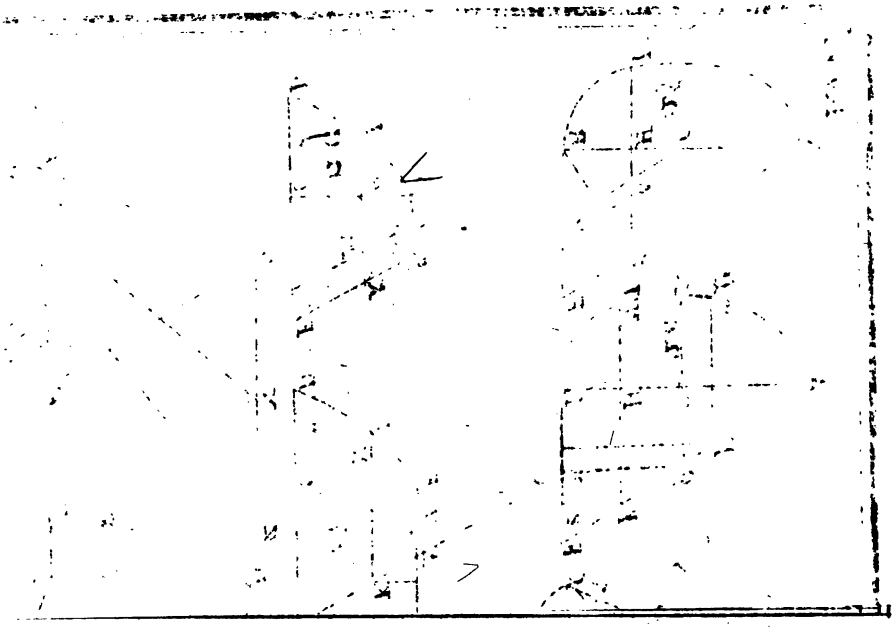

A
G
A
H
A
X
Z

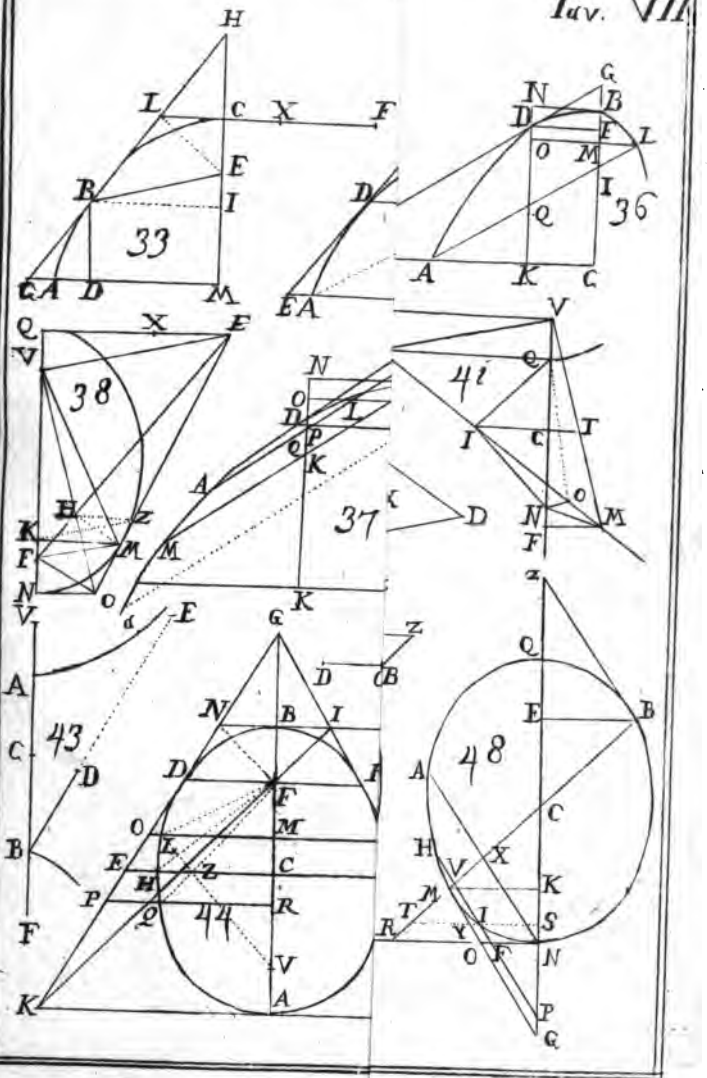


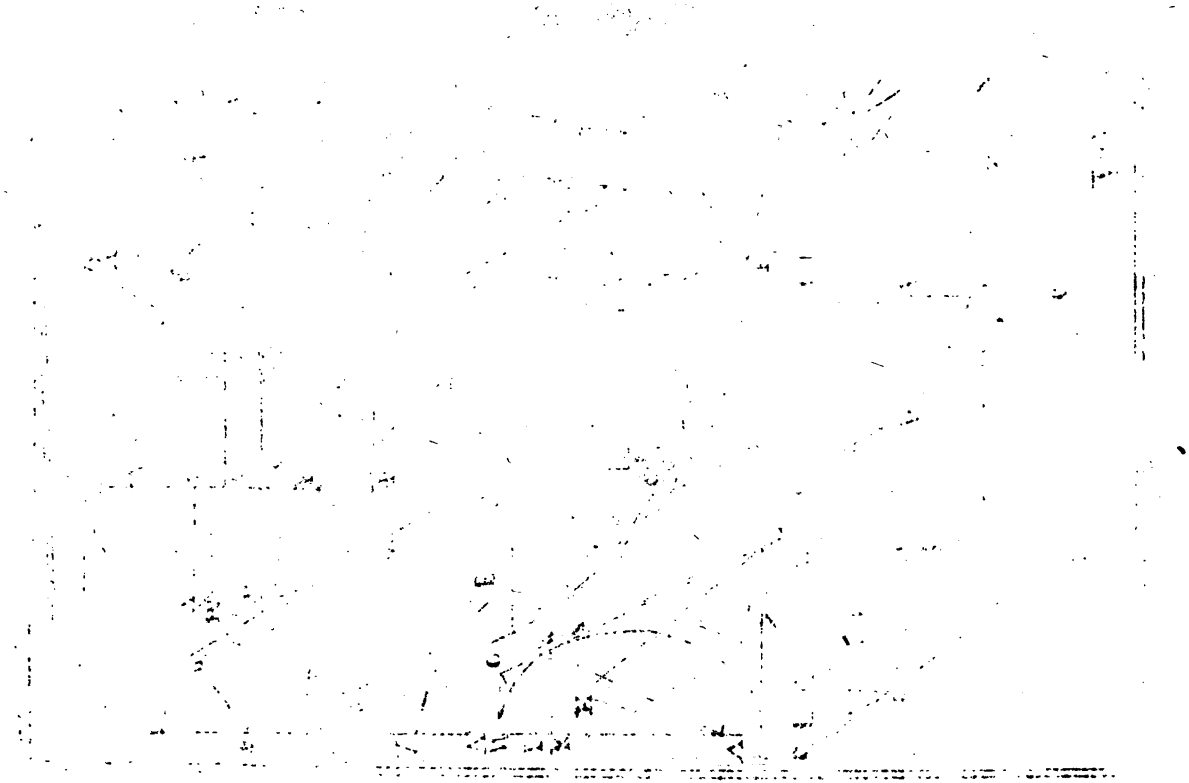
Tav. V

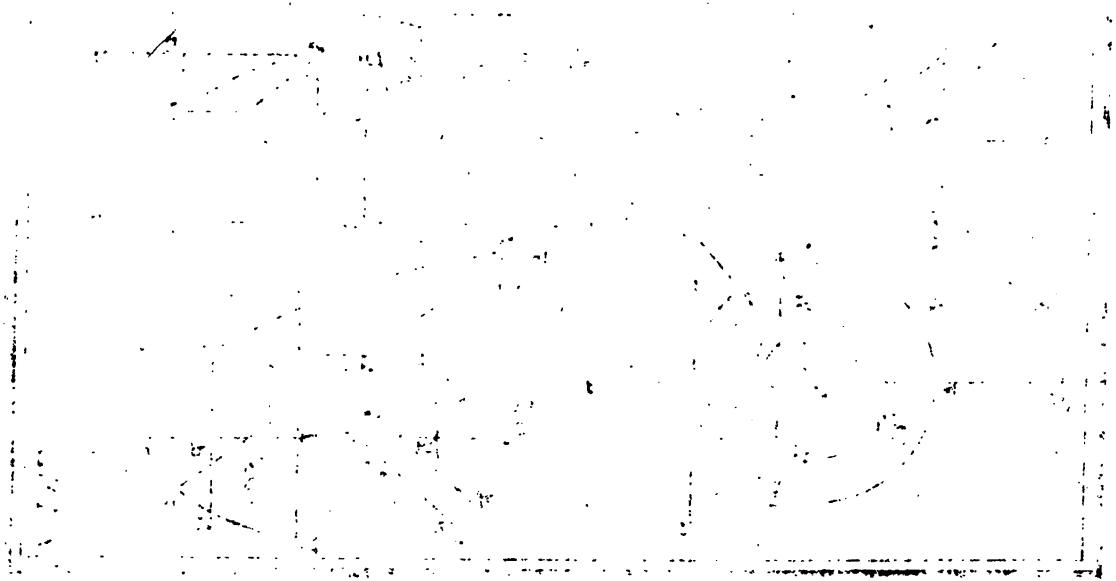







33
36
37
38
41
43
44
48





DEGLI

# ELEMENTI

DI

# MATEMATICA

DI

ODOARDO CORSINI

CH. REGOLARE DELLE SCUOLE PIE.

## PARTE SECONDA,

La quale contiene la Geometria Pratica.

# INDICE

## DE' LIBRI, PARTI ec.

### Della Seconda Parte degli Elementi di Matematica.

*Della Geometria Pratica.*

LIBRO PRIMO. IL quale contiene l'Aritmetica. Pag. 1.
Dell'Aritmetica *Trattato* I. il quale contiene le operazioni de' Numeri interi.
*Parte Prima*, del Numerare. 3
*Parte Seconda*, Del Sommare. 6
*Parte Terza*, Del Sottrarre. 10
*Parte Quarta*, Del Moltiplicare. 13
*Parte Quinta*, Del Partire, o dividere. 17
Dell'Aritmetica *Trattato* II. il quale contiene le operazioni de' numeri Rotti. 22
Operazioni ed Algoritmi de' Rotti. 25
Dell'Aritmetica *Trattato* III. il quale contiene la Regola del Tre, e l'estrazione delle Radici. 37
*Parte Prima*, Della Regola del Tre. *ivi*
*Parte Seconda*, Dell'estrazione della Radice quadra. 39
*Parte Terza*, Dell'estrazione della Radice cuba. 44
LIBRO Secondo, il quale contiene la Trigometria. 47
Definizioni, ovvero notizie da presuporsi 52
Propositioni. 48
De' Triangoli obliquangoli. 60

LI-

LIBRO Terzo, il quale contiene la descrizione delle Linee, e Figure. 65
*Definizioni*. 66
*Proposizioni*. 73
LIBRO Quarto, il quale contiene la misura delle Superficie, e dei Solidi. 102
*Proposizioni*. 103
LIBRO Quinto, il quale contiene varj Problemi ed operazioni. 123
*Proposizioni*. 124



DEL-

# DELLA GEOMETRIA PRATICA

# LIBRO I.

## *Il quale contiene l'Aritmetica.*

QUanto nobile e ragguardevole riputar si debba la scienza, o cognizione dei Numeri, che *Aritmetica* chiamar si suole, potrebbesi ben facilmente conoscere, e dimostrare dall'antichissima origine, ch' ella trasse dagli Fenicj ed Egizj, dalle mirabili verità, ch' ella contiene, e dalla serie luminosa di quei scrittori, che l'illustrarono. Quello però che deve più vivamente accendere o risvegliare all'acquisto di questa scienza, è l'uso incredibile, e maravigliosa utilità che ricavasi dall' Aritmetica istessa; poichè non vi è certamente osservazione alcuna in cui non apparisca, e richieggasi l'uso dei numeri, ed in conseguenza ancora l'artifizio, o perizia dell'Aritmetica: onde potè Platone giustamente asserire, che chi toglieste da tutte le Arti, o facoltà la perizia di numerare, tutto quello che restasse loro, esser dovrebbe inutile, manchevole, ed imperfetto. Per essere dunque l'Aritmetica sì necessaria per tutte le varie osservazioni, che si dovranno pre-

ſcrivere ed inſegnate ne' ſeguenti Libri della Geometria Pratica, ſarà convenevole parlare in primo luogo de' varj Algoriſmi, ovvero operazioni, che ad eſſa appartengono, e dalle quali derivano i varj calcoli e cognizioni, che in tutta la rimanente ſerie dell'Opera ſi incontreranno.



DELL'

# DELL' ARITMETICA

# TRATTATO I.

*Il quale contiene le operazioni de' Numeri interi.*

## PARTE PRIMA.

### *Del Numerare.*

I. LA prima e più ſemplice operazione dell'Aritmetica è il *Numerare*, cioè l'eſprimere, rilevare, o pronunziare qualſivoglia numero eſpreſſo con una, ovvero con più cifre, o caratteri.

II. Queſte cifre, o caratteri, li quali formano ed eſprimono i numeri, ſono dieci

0. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1.

La prima cifra collocata alla ſiniſtra parte del foglio, ed a man dritta di chi ſcrive, è l'unità; la ſeconda ſignifica due unità; tre la terza; e così per ordine le altre che ſeguono: ſicchè la nona eſprime, o ſignifica nove unità; ma l'ultima cifra o, che chiamaſi *zero*, non eſprime, o ſignifica da ſe ſteſſa unità, o quantità veruna, ma ſolo accreſce il valore delle altre cifre, a ſiniſtra delle quali ſia collocata.

III. E queſto è il valore di qualſivoglia cifra conſiderata da ſe ſola come diſgiunta dall'altre:

3 1 2 4

che ſe ſi congiungono inſieme più cifre, ovvero ſi formi un numero eſpreſſo, o compoſto di più cifre, allora cominciando la ſerie dalla più ſini-

ſtra cifra del dato numero, creſce il valore delle iſteſſe cifre in ragione decupla ſecondo il luogo, o poſto che occupano nell'ordine, o ſerie delle cifre iſteſſe, ſicchè la prima, o più ſiniſtra cifra ſignifica le unità; la ſeconda ſignifica le decine di unità; la terza le centinaja di unità; la quarta le migliaja di unità, e così ſucceſſivamente; ſicchè nel dato numero tante ſaranno le ſemplici unità, quante ne ſono nella prima cifra; tante le decine di unità, quante unità ſono nella ſeconda; tante le centinaja di unità, quante unità ſono nella terza, e così ſempre nel ſeguente numero 4365, il 5, che prendeſi per prima cifra, ſignifica 5 unità; il 6 ſignifica 6 decine; il 3 ſignifica 3 centinaja; e il 4 ſignifica 4 migliaja; e però volendolo eſprimere, o pronunziare, dovrebbeſi dire *quattromila trecento ſeſſantacinque unità*, ovvero ſemplicemente *quattromila trecento ſeſſantacinque*.

IV. Che ſe nel principio, o per prima cifra del numero ſi trovi il zero, ſignifica il non eſſere nel dato numero unità ſemplici; ſiccome, ſe l'iſteſſo zero foſſe ne' luoghi intermedj, o fra le altre cifre, ſignifica non eſſere in quel luogo, onde ritrovaſi il zero, numero di decine, o centinaja ec. e però nel pronunziarſi quel numero non dovrebbero eſprimerſi le decine, o centinaja ec. Così per eſempio il numero 3750 ſi pronunzierà *tremila ſettecento cinquanta*; ed il numero 2608 ſi pronunzierà *duemilaſeicentotto*.

V. Per eſprimere poi, o rilevare qualſivoglia numero compoſto di molte cifre, ſi oſſervi il valore di qualſivoglia cifra ſecondo il luogo, ch' ella occupa nella ſerie delle cifre iſteſſe, cominciando ſempre dalla prima, o più ſiniſtra: il qual valore per chiarezza e brevità maggiore è notato nella ſeguente Tavola.

| Luogo | Valore |
|---|---|
| 1 | unità |

2 decine
3 centinaja
4 migliaja
5 decine di migliaja
6 centinaja di migliaja

7 milioni
8 decine di milioni
9 centinaja di milioni
10 migliaja di milioni
11 decine di migliaja di milioni
12 centinaja di migliaja di milioni

13 milioni di milioni
14 decine di milioni di milioni
15 centinaja di milioni di milioni
16 migliaja di milioni di milioni
17 decine di migliaja di milioni di milioni
18 centinaja di migliaja di milioni di milioni
19 milioni di milioni di milioni

VI. dovendosi dunque rilevare, o pronunziare il numero

8 5 2 6 4 3 5 2 9 8 7 1 6
2 1

riflettasi, ch' egli è composto di 15 cifre, e che però l'ultima cifra 8 occupa il tredicesimo luogo nella serie già esposta, ed in conseguenza deve esprimere i milioni di milioni; la seguente cifra 5 deve esprimere le centinaja di migliaja di milioni; e così successivamente si conoscerà il valore di qualsivoglia cifra dal luogo occupato nella loro serie. Si dovrà dunque il dato numero così pronunziare *otto milioni di milioni cinquecentoventiseimila quattrocento trentacinque milioni dugento novantottomila settecento sedici.*

VII. E altresì comodissimo per rilevare ed esprimere un dato numero il distinguere le sue cifre a tre a tre, cominciando dalla prima, o dalla cifra delle unità, e ponendo dopo le tre prime cifre

un punto, dopo le tre seguenti l'unità, dopo le altre tre un'altro punto, dopo le tre seguenti un 2, e così successivamente; poichè il primo membro, o le prime tre cifre confermano le centinaja, decine, e numero di unità; il secondo membro le centinaja, decine, e numero di migliaja; il terzo le centinaja, decine, e numero di milioni; il quarto le centinaja, decine, e numero di migliaja di milioni; il quinto le centinaja, decine, e numero di milioni di milioni, e così per ordine.

VIII. Così scambievolmente dovendosi scrivere qualsivoglia numero concepito, o proferito, come per esempio *ventisette milioni cinquecento quarantatremila ottocento settantaquattro*, osservisi, che l'ultima cifra del numero concepito esprime decine di milioni, e però appartiene all'ottavo luogo nella serie de' numeri; onde il numero proferito deve costare di 8 cifre, le quali si dovranno scrivere coll'ordine, serie, o regola già dimostrata nel seguente modo.

27 543. 874.

1

## PARTE SECONDA.

### *Del Sommare.*

I. IL *sommare* più numeri altro non è che raccogliere, adunare, congiugnere, o unire insieme più numeri, o loro valori, sicchè ne risulti un'altro numero uguale a tutti quei dati numeri presi insieme, e però chiamasi loro *somma*, ed *aggregato*: come unendosi insieme il 4, il 6, il 12, risulta il numero 22 uguale a tre numeri 4, 6, 12 presi insieme.

II. Per rendere più sicura e più facile questa osservazione nei numeri composti di molte cifre, è necessario collocare un numero, o partita sotto

to

to dell'altra in maniera tale, che le cifre dell' uno sieno collocate sotto le cifre corrispondenti dell'altro; sicchè la prima cifra di un numero sia sotto la prima cifra dell'altro; la seconda sotto la seconda ec. vale a dire, le unità sotto le unità; le decine sotto le decine; le centinaja sotto le centinaja, e così successivamente, come vedesi nel seguente esempio.

III. Si debbano dunque raccogliere insieme, o sommare i tre numeri, o tre partite 8256, 342, 5091; dopo di averle disposte come sopra, tirisi sotto i dati numeri una linea orizontale, e poi si uniscano insieme i numeri delle unità collocate nella prima fila, cioè 1, 2, 6; e la loro somma 9 pongasi sotto la linea nell'istessa fila. Indi si sommino i numeri delle decine, collocate nella seconda fila, cioè 9, 4, 5; e perchè la loro somma 18 eccede la decina di decine, ovvero il centinajo (poichè dieci decine formano il centinajo) scrivasi sotto la linea nella fila delle decine il solo 8, numero delle decine che avanzano sopra il centinajo; e il numero delle centinaja formato, cioè 1, si unisca, o sommi con gli altri numeri delle centinaja posti nella terza fila, cioè con 0, 3, 2; e la loro somma 6 scrivasi sotto la linea nella fila delle centinaja. Finalmente si uniscano insieme i numeri delle migliaja, 5, 8 posti nella quarta fila, e la loro somma 13 scrivasi sotto la linea, sicchè il 3. numero di migliaja resti sotto il 5, o l' 8 numero di migliaja; ed l' 1, che significa le decine di migliaja, tenga il quinto, o l'ultimo luogo, e sarà il numero 13689 uguale a tutti i numeri dati presi insieme.

```
  8256
   342
  5091
 -----
 13689
```

IV. Suole però talora succedere, che le partite, le quali si debbono sommare, o unire insie-

me, non sieno dell'istessa, ma differente spezie, come per esempio braccia, soldi, e denari, piedi, polici, e linee; miglia, passi, e piedi; gradi, minuti, scrupoli ec. Nel qual caso devesi fare la loro somma nella maniera, o coll'avvertenza che segue.

Si debbano dunque unire insieme braccia, soldi, e denari, e suppongasi, che denari 12 formano un soldo, e soldi 20 formano un braccio. Si scrivano le partite l'una sotto dell'altra in maniera tale, che le parti, o numeri di una spezie restino collocate sotto i numeri, o parti della spezie simile, come le braccia sotto le braccia, i soldi sotto i soldi, e i denari sotto i denari, e tirisi sotto le date partite la linea orizontale. Poi si uniscono insieme i numeri dei denari, cioè 2, 4, 8; è poichè la loro somma 14 supera il 12, vale a dire supera il soldo, ed avanza 2, scrivasi sotto la linea nella fila dei denari il solo 2, che avanza, ed il soldo formato aggiungasi agli altri numeri de'solidi, 18, 10, 16; e poichè la loro somma 45 supera il 40, cioè due braccia, ed avanza 5, scrivasi il 5 che avanza, sotto la linea nella fila de'soldi, ed il numero 2 delle braccia formate si unisca con gli altri numeri delle braccia 14, 3, 25, i quali poi per essere parti, o numeri di un'istessa spezie, si sommino al solito, e la loro somma 44 scrivasi sotto la linea nella fila delle braccia; e sarà il numero di br. 44. sol. 5. den. 2. uguale a tutte le partite, o numeri dati.

| | br. | sol. | den. |
|---|---|---|---|
| | 25. | 16. | 8. |
| | 3. | 10. | 4. |
| | 14. | 18. | 2. |
| | 44. | 5. | 2. |

V. Similmente ancora, se dovessero sommarsi piedi, polici, e linee, collocati i numeri, o partite coll'ordine già dimostrato, e supponendo che 12 linee formano un police, e 2 polici formano un piede, si sommino le linee, e se la loro som-

ſomma ſupera il 12, o forma un qualche numero di polici, queſto ſi aggiunga ai numeri de' polici poſti nella ſeguente fila, e ſotto la linea pongaſi il ſolo avanzo ſopra dei polici; così ſommati i politi, ſe la loro ſomma ſupera il 12, e forma un qualche numero di piedi, queſto numero ſi aggiunga agli altri numeri de' piedi poſti nella ſeguente fila, e ſotto i polici ſi ſcriva il ſolo avanzo ſopra de' polici, come vedeſi nel ſeguente eſempio.

VI. Nell' iſteſſa maniera appunto ſi potranno ſommare i gradi, minuti, e ſcrupoli; ſupponendo che 60 ſcrupoli fanno un minuto, e 60 minuti formano un grado. Si poſſono altresì ſommare miglia, paſſi, e piedi; ſupponendo che 5 piedi formano un paſſo, e 1000 paſſi formano un miglio.

| | pied. | pol. | lin. |
|---|---|---|---|
| | 243. | 8. | 6. |
| | 82. | 10. | 4. |
| | 354. | 2. | 8. |
| | 26. | —— | 10. |
| | 706. | 10. | 2. |

VII. Perchè finalmente nel raccogliere, o ſommare inſieme più numeri può facilmente ſuccedere che ſi commetta un qualche errore, oltre all' attenzione che deveſi uſare nell' aggiugnere un numero ad un' altro, nello ſcrivere l'avanzo, e nel *portare* dalla prima alla ſeguente fila i numeri delle decine, centinaja, ſoldi, braccia ec. formati, o raccolti nell'antecedente fila, ſi può riſcontrare, o riconoſcere l'eſattezza e bontà della ſomma già fatta con rifarla nuovamente; e ſe prima ſi erano ſommati o raccolti i numeri di qualſivoglia fila aſcendendo, raccorli nuovamente diſcendendo. Siccome ancora ſi ſuole, dopo fatta l'intera ſomma di tutte le partite, ſommarle nuovamente, laſciandone fuori una ſola, ed aggiugnendo alla ſomma delle altre queſta partita laſciata, e poi vedere ſe queſta ultima ſomma ſia uguale alla prima ſomma totale fattaſi da principio. Poichè, ſe rifatta la ſomma

con

con una, o più di queste cautele, sempre risulti l'istessa somma o aggregato, sarà contrassegno, che l'osservazione, o somma è ben fatta.

## PARTE TERZA.

### *Del Sottrarre.*

I. IL *Sottrarre* un numero da un'altro numero è il togliere, o cavare dalle unità del maggiore altrettante unità, quante unità si trovano nel minore; onde il minore dicesi *levato*, *tolto*, *o sottratto* dal maggiore; e quello che resta nel maggiore dopo levato il minore, vale a dire la differenza o eccesso del maggiore sopra il minore, dicesi *residuo*, *resto* o *rimanente*, come togliendo dal 14 il 6, resta 8.

II. Per sottrarre dunque un numero minore dal maggiore scrivasi il minore sotto del maggiore, sicchè la prima cifra del minore sia sotto la prima cifra del maggiore; la seconda sotto la seconda, e così successivamente; e tirato sotto il numero minore da sottrarsi una linea orizontale, dalla prima cifra del numero maggiore o superiore sottragasi la prima cifra del numero inferiore, ed il residuo scrivasi sotto la lineetta; così la seconda cifra sottragasi dalla seconda, la terza dalla terza, e così per ordine. Che se nel numero superiore vi fossero alcune cifre, sotto le quali nel numero inferiore non fossero cifre corrispondenti, ovvero fossero zeri; allora sotto la linea si scrivano l'istesse cifre del numero superiore, come nell'esempio che segue, in cui devesi sottrarre il numero 3205 dal numero 274639.

```
  2 7 4 6 3 9
      3 2 0 5
  ---------
  2 7 1 4 3 4
```

III. Se qualche cifra nel numero superiore fosse minore della cifra corrispon-

pondente o sottoposta nel numero inferiore, allora aggiungasi alla cifra superiore il 10, e dall' aggregato 6 somma del 10, e della cifra data nel numero superiore sottraggasi la cifra inferiore, e scrivasi sotto la linea il residuo; ed in tal caso la cifra seguente nel numero inferiore si accresca di una unità, e così accresciuta sottraggasi dalla cifra seguente superiore. Così dovendosi sottrarre da 157639 l'84352; sottrato il 2 dal 9, e scritto sotto la linea il residuo 7. perchè non può toglierſi il 5 dal 3, aggiungasi il 10 all'istesso 3, sicchè divenga 13, e sottratto il 5 dal 13 scrivasi sotto la linea il residuo 8; indi sottraggasi dal 6 non il 3, ma il 4, e scrivasi il residuo 2; similmente sottratto il 4 dal 7 scrivasi il residuo 3, e sottratto l'8 dal 75 scrivasi il residuo 7; e sarà il residuo o differenza de' dati numeri il 73287.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 5 | 7 | 6 | 3 9 |
| | 8 | 4 | 3 | 5 | 2 |
| | 7 | 3 | 2 | 8 | 7 |

IV. Siccome nel sommare così nel sottrarre ancora suole accadere, che il numero o quantità da sottrarsi, o quello ancora, da cui si fa la sottrazione, sia composto di parti di differente spezie, come braccia, soldi, e denari. In tal caso, se qualsivoglia parte del numero inferiore sia minore della parte simile, o corrispondente nel numero superiore, si operi come sopra sottrando denari da denari, soldi da soldi, e braccia da braccia, scrivendosi sotto la linea i residui.

| | br. | sol. | den. |
|---|---|---|---|
| | 25. | 12. | 8. |
| | 14. | 5. | 3. |
| | 11. | 7. | 5. |

V. Ma se il numero inferiore dei denari sia maggiore del numero superiore, come nel seguente esempio il 3 è maggiore del 2, aggiungasi al 2 superiore il 12, cioè un soldo, sicchè divengano 14 denari, da quali sottraggasi il 3, e scrivasi sotto la linea il residuo 11; indi quel

sol-

| | br. | sol. | den |
|---|---|---|---|
| | 42. | 10. | 2. |
| | 24. | 16. | 3. |
| | 17. | 13. | 11. |

soldo aggiunto al 2 numero superiore de' denari, aggiungasi al 16 numero inferiore de' soldi, che diverrà 17; e perchè il 17 non può sottrarsi dal 10 numero superiore de' soldi, aggiungasi il 20, cioè un braccio, all'istesso 10, e sottraggasi il 17 dal 30, scrivendosi sotto la linea nella fila de' soldi il residuo 13; e quel braccio aggiunto a 16 soldi aggiungasi al 4 numero delle braccia che segue nel numero, o partita inferiore; e sottratto il 3 dal 12 scrivasi il residuo 7; e finalmente sottratto il 3 dal 4 scrivasi il residuo 1.

VI. Nell'istessa maniera si può sottrarre una partita di piedi, polici, e linee da un'altra partita di piedi, polici, e linee, ovvero da un numero intero; aggiugnendo sempre al numero superiore delle linee, quando egli sia minore del suo inferiore, ovvero quando sia zero, il 12; e scrivendo il residuo sotto la linea, si unisca il police aggiunto al numero inferiore de' polici collocato nella fila seguente; ed aggiugnendo similmente al numero superiore de' polici, se egli è minore del suo sottoposto, o se è zero, il 12, e scritto il residuo, si aggiunga al numero inferiore de' piedi collocato nella fila seguente quel piede aggiunto al numero superiore de' polici; ed operando nel restocome sopra.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 289. | —. | —. |
| | 53. | 8. | 4. |
| | 235. | 3. | 8. |

VII. La prova del sottrarre si fa col sommare o unire insieme il numero sottratto col residuo trovato; poichè se la loro somma o aggregato sia uguale al numero maggiore o superiore, da cui sottrarre dovevasi il minore, sarà contrassegno che la sottrazione è ben fatta, come apparisce ne' passati esempj.

PAR-

## PARTE QUARTA.

### *Del Moltiplicare.*

I. IL *moltiplicare* un numero per un'altro numero consiste in trovare un terzo numero tanto moltiplice del numero moltiplicato, quanto il numero moltiplicante è moltiplice dell'unità; vale a dire, pigliare il numero moltiplicato altrettante volte, quante il numero moltiplicante contiene in sè l'unità; ovvero finalmente il fare come l'unità al numero moltiplicante, così il numero moltiplicato ad un'altro numero, il quale perciò chiamasi sempre *prodotto*, o formato dalla moltiplicazione dei dati numeri: come moltiplicandosi il 4 per 3 risulta 12, il quale contiene in sè il 4 moltiplicato 3 volte, siccome aggiunto 3 volte il numero moltiplicante 3, contiene in sè l'unità.

II. Per potere con franchezza e facilità maggiore moltiplicare qualsivoglia numero composto di molte cifre per un'altro numero, è necessario sapere ed imprimere vivamente nell'animo la moltiplicazione de'numeri semplici fra loro, dalla quale poi risulta o dipende la moltiplicazione de'numeri maggiori ancora, o composti.

III. Debbasi dunque in primo luogo moltiplicare qualsivoglia numero composto per un numero semplice. Scrivasi il numero minore moltiplicante sotto il maggiore moltiplicato, e tirisi la linea orizontale. Poi moltiplicandosi la prima cifra del numero superiore per il numero moltiplicante, scrivasi il prodotto sotto la cifra moltiplicata; e se questo prodotto supera il 10, o forma decine, scrivasi sotto la cifra moltiplicata il solo avanzo sopra le decine; ed il numero delle decine formato aggiungasi al prodotto dal numero moltiplicante colla cifra superiore seguente, e così successivamente.

Co-

Così dovendosi moltiplicare il 2586 per 3, moltiplicando 6 per 3 fà 18; scrivasi 8, ed al prodotto di 3 in 8, cioè al 24, aggiungasi il numero 1 della decina formata, e sarà 25; scrivasi il 5 sotto la linea, e il 2 numero delle decine formate si aggiunga al 15 prodotto di 3 in 5, e sarà 17, del quale scrivasi sotto la linea 7; e l'1 numero delle decine formato aggiungasi al 6 prodotto di 3 in 2, ed il prodotto o aggregato 7 scrivasi sotto la linea.

```
2586
   3
-----
7758
```

IV. Ovvero si cominci a moltiplicare dall'ultima cifra 2; ed il 6 prodotto di 3 in 2 scrivasi sotto la cifra moltiplicata 2; e perchè il prodotto di 3 in 5 è 15, scrivasi il 5 sotto la cifra moltiplicata 5, ma l'1 numero di decine scrivasi in un'altro rigo o fila inferiore sotto il primo prodotto 6; così, perchè il prodotto di 3 in 8 è 24, scrivasi il 4 sotto l'8 moltiplicato, e il 2 nella fila inferiore sotto il 5; e finalmente, perchè 3 in 6 fa 18, scrivasi l'8 sotto la cifra moltiplicata 6, e l'1 nella fila inferiore sotto il 4; ed unendo insieme i due prodotti, o le due file, si avrà l'istesso prodotto totale 7758.

```
2586
   3
-----
6548
1211
-----
7758
```

V. Che se il numero moltiplicante ancora è composto di più cifre, come se debbasi moltiplicare 2586 per 43, scrivasi il numero moltiplicante sotto il moltiplicato, e tirata la linea scrivasi sotto di quella il prodotto di tutto il numero 2586 per la prima cifra 3. Indi si trovi il prodotto dell'istesso numero 2586 per la seconda cifra 4, e scrivasi questo secondo prodotto sotto del primo prodatto; in maniera tale però, che la prima cifra del secondo prodotto sia collocata sotto la seconda cifra del primo; vale a dire, la prima cifra di qualsivoglia prodotto sia collocata sot-

sotto la sua cifra moltiplicante; poichè sommati insieme que' prodotti partiali, si avrà l'intero prodotto di 2586 per 43.

2 5 8 6
4 3
7 7 5 8
10 3 4 4
11 1 1 9 8

VI. Se nel principio di uno de' numeri dati da moltiplicarsi fossero zeri, si trovino i prodotti delle altre cifre, ed alla loro somma si aggiungano altrettanti zeri, quanti erano nel numero dato.

5 8 4 6
4 2 0 0
1 1 6 9 2
2 3 3 8 4
2 4 5 5 3 2 0 0

E se nel principio dell' uno e dell' altro numero fossero zeri, si moltiplichino le altre cifre degli stessi numeri, ed al loro prodotto si aggiungano i zeri dell' uno e dell' altro numero.

2 6 0 0 0
4 9 0 0
2 3 4
1 0 4
1 2 7 4 00000

VII. Può finalmente succedere, che debbasi moltiplicare una partita, o numero composto di parti di differenti spezie per un numero intero, o per un' altro numero e partita composta altresì di parti di spezie differente.

Così per esempio debbasi moltiplicare miglia 5, passi 32, piedi 4 per 7; scrivasi il 7. moltiplicante a dirimpetto alla partita data, e moltiplicato il 4 numero de' piedi per 7 poichè il prodotto 28 forma 5 passi, ed avanzano 3 piedi, scri-

7 — 5. 32. 4.
5. 229. 3.

ſcrivaſi il 3 ſotto i piedi, ed i 5 paſſi formati ſi aggiungano al 224 prodotto de paſſi 32 per 7, e ſaranno paſſi 229, i quali ſi ſcrivano ſotto a' paſſi; e moltiplicando il 5 numero delle miglia per 7 ſcrivaſi il loro prodotto 35, ſotto la fila delle miglia.

VIII. Che ſe doveſſero fra loro moltiplicarſi partite compoſte di differenti ſpezie, come piedi, pollici, e linee per piedi, pollici, e linee, riducaſi prima l'una e l'altra partita a' numeri dell'iſteſſa minima ſpezie, per eſempio linee; e poi ſi faccia la moltiplicazione di queſte due partite così ridotte. Così dovendoſi moltiplicare br. 8 ſol. 12 den. 4 per br. 5 ſol. 6 den. 10, moltiplicando per 20 ſi riducano le braccia 8 a ſoldi 160, a' quali aggiunti i ſoldi 12, ſaranno ſoldi 172; i quali moltiplicati per 12 ſaranno uguali a' denari 2064, a' quali aggiunti i denari 4, avremo la prima partita ridotta, ed uguale a' denari 2068. Così l' altra partita moltiplicante riduceſi a denari 1282, i quali moltiplicando il numero 2068 daranno il prodotto di denari 2651176, il quale riſulta dal moltiplicare inſieme le due partite date; e può colla diviſione, della quale poi parleremo, ridurſi ad una partita uguale di br. 11046. ſol. 11. den. 4.

IX. La prova del moltiplicare ſi fa col dividere; poiche dovendo il numero prodotto dalla moltiplicazione contenere tante volte il numero moltiplicato, quante volte il numero moltiplicante contiene in sè l'unità, ſe dividendo il prodotto per il numero moltiplicato viene per quoziente l'iſteſſo numero moltiplicante; ſarà contraſſegno, che la moltiplicazione è ben fatta; come chiaramente ſi potrà conoſcere da ciò, che nella ſeguente Parte dimoſtreremo.

PAR-

## PARTE QUINTA.

### *Del partire, o dividere.*

I. IL *partire*, o *dividere* un numero maggiore per un'altro numero minore, è togliere il minore istesso dal maggiore quante volte si può, vale a dire, quante volte vi è contenuto; ed esprimere insieme il numero delle volte, che vi è contenuto: come dividendo il 12 per 4, questo si toglie dal 12 tre volte. Quindi è che nella divisione, oltre al numero maggiore che si divide, e il numero minore per cui dividesi, e però chiamasi *divisore*, o *partitore*, vi deve anche essere il numero *quoziente*, il quale esprime, o palesa il numero delle volte, che il divisore è contenuto dal numero che si divide.

II. Debbasi dunque in primo luogo dividere il numero composto 82 56 45 per un numero semplice 5. Scrivasi il divisore a dirimpetto al numero da dividere, ed osservisi quante volte il divisore 5 entra nell'ultima cifra 8: e, poichè vi entra una volta, scrivasi l'1 sotto all' 8, e quel 3 che avanza, si concepisca come scritto avanti al 2, penultima cifra che segue nel numero da partirsi, e però si concepisca quel 2 come 32, e perchè il divisore 5 entra sei volte nel 32, scrivasi il 6 sotto il 2, e il 2 che avanza concepiscasi avanti al 5, che diverrà 25; nel quale entrando il divisore 5, cinque volte scrivasi il 5 sotto il 5: perchè poi il divisore 5 entra nel 6 una volta, scrivasi 1 sotto il 6; e concepito l'1 che avanza, accanto al 4, che diverrà 14, in esso entrerà il divisore 5 due volte, e però scrivasi il 2 sotto il 4; e finalmente concepito il 4 che avanza, come posto avanti al 5, perchè il divisore 5 en-

5 — 82 56 45
16 51 29

tra nel 45 nove volte, scrivasi il 9 sotto il 5, ed il quoziente ricercato sarà 165129.

Che se il divisore 5 fosse maggiore, o non entrasse nell'ultima cifra 2 del numero che si divide, si cerchi quante volte entri nel numero composto delle ultime due cifre, cioè nel 24; e perchè vi entra 4 volte, scrivasi 4 sotto la penultima cifra 4, e si continui la divisione come sopra. 5 —— 24685 4937

Così incontrandosi nel numero che si divide un qualche zero, ovvero un qualche numero minore del divisore, scrivasi nel quoziente un zero; e concependo quel numero, o cifra minore come posta avanti alla cifra seguente, sicchè ne risulti un numero composto, si continui l'operazione come sopra. 6 —— 72054. Così nel seguente esempio il 12009. 6 nel 7 una volta; il 6 nel 12 due volte; il 6 nel zero zero; il 6 nel 5 zero; il 6 nel 54 nove volte.

III. Debbasi in secondo luogo dividere un numero composto, come 652418 per un'altro numero composto 24. Scrivasi questo a dirimpetto a quello, ed osservisi quante volte l'ultima cifra 2 del partitore entra nell'ultima cifra 6, del numero che si divide; e sarà 3 volte: ma perchè l'altra cifra 4 del divisore non entra anche essa 3 volte nell'altra cifra 5 del numero che si divide, scemisi il quoziente trovato 3, e dicasi che il 2 entra nel 6 due volte; poichè avanzando 2, che col 5 seguente fa 25, anche il 4 entra benissimo nel 25 due volte. Scrivasi dunque il 2 co-

24 —— 65248

2718 16 / 24 — 48 172 168 44 24 208 192 16

me

me ultima cifra del quoziente sotto il partitore; e moltiplicando il partitore istesso per 2, il prodotto 48 che può essere minore, o uguale, ma non però maggiore del 65, scrivasi sotto il 65; e sottraendolo da quello, scrivasi il residuo 17; accanto al quale si abassi la cifra seguente 2 nel numero che si divide, sicchè faccia 172; e poi cerchisi quante volte il 2 ultima cifra del partitore entra nel 17, e benchè vi entrasse 8 volte, perchè nondimeno il 4 altra cifra del partitore non entrerebbe 8 volte nel 12, che resterebbe nel numero 172, scemisi il quoziente, e dicasi 7; poichè avanzando 3, che col 2 seguente dice 32, in questo entra benissimo il 4 sette volte; e però scrivasi il 7 per altra cifra dal quoziente, per la quale moltiplicando il partitore 24 scrivasi il prodotto 168 sotto il 172, e sottraendo quello da questo, scrivasi il residuo 4; accanto al quale si abbassi il 4 che segue nel numero da partirsi, e diverrà 44, nel quale entrando il partitore 24 una volta, scrivasi 1 per altra cifra del quoziente, la quale moltiplicando il partitore 24 fa 24, che scrivasi sotto, e sottraggasi dal 44; ed accanto al residuo 20 scrivasi, o si abbassi l'8, altra cifra del numero che si divide, che diverà 208; e perchè il partitore 24 nel 208 entra 8 volte, scrivasi l'8 come cifra del quoziente, che moltiplicando il partitore 24 farà 192, il quale residuo 16 scrivasi accanto al quoziente trovato sopra una linetta, sotto la quale scrivasi il divisore 24, e sarà il quoziente cercato $2718\frac{16}{24}$

IV. Dovendosi poi dividere una partita, o somma composta di parti di differenti specie, come di braccia 16, soldi 6, denari 8, per un numero intero 7, pongasi il 7 partitore a dirimpetto alla partita, o somma 7 —— 16 6 8
che si riduce; e poi divi- 2 6 8
dasi il 16 per 7; ed il quoziente 2 scrivasi sot-

to il 16; ma le 2 braccia che avanzano, moltiplicate per 20 riducanſi a ſoldi 40, a' quali ſi aggiungano i dati ſoldi 6; e dividendoſi il 46 per il diviſore 7, ſcrivaſi il quoziente 6 ſotto la fila de' ſoldi; e riducendo i ſoldi 4 che avanzano, a denari con moltiplicargli per 12, il loro prodotto 48 ſi uniſca con i denari dati 8; e dividendo 56 ſomma de' danari per il partitore 7, ſcrivaſi il quoziente 8 nella fila dei denari, ed il quoziente cercato ſarà br. 2. ſol. 6. den. 8. Che ſe diviſa la ſomma dei denari per il partitore avanzaſſe un qualche numero di denari minore del partitore, ſcrivaſi queſto a parte ſopra una linea, ſotto la quale ſcrivaſi il partitore iſteſſo, come vedeſi in queſto eſempio, in cui il quoziente 5 —— 48 16 3
è br. 9. ſol. 15. den. 3. 9 15 3

V. Finalmente dovendoſi dividere partite, o ſomme compoſte di parti di diverſa ſpezie per altre partite, o ſomme altresì compoſte di parti di diverſa ſpezie, ſi riduca prima l'una e l'altra partita a due partite della iſteſſa minima ſpezie, per eſempio a' denari; e poi facciaſi la diviſione in queſte due partite, come ſe foſſero numeri interi. Così dovendoſi dividere piedi 24, pollici 10, e linee 8, per piedi 3, pollici 5, linee 9; la prima partita riducaſi a linee 3584; la ſeconda a linee 501; e dividendo 3584 per 501, ſi avra per quoziente $\frac{77}{501}$ 7, ovvero proſſimamente $7\frac{1}{6}$.

Coll' artifizio, o per mezzo della diviſione ſi può ridurre un numero di parti di ſpezie minore a parti di ſpezie maggiore, come un numero di denari a braccia, ſoldi, e danari. Sia dato il numero di denari 1826, dividendolo per 12 ſi avranno come quoziente ſoldi 152, e 2 denari che avanzano; dividendo ſimilmente il 152 per 20, ſi avranno per quoziente braccia 7, e 12 ſoldi che avanzano; e però denari 7826 formano br. 7. ſol. 12. den. 2.

VII.

VII. Siccome poi la prova del moltiplicare si fa col dividere; così la prova del dividere o partire si fa col moltiplicare il numero divisore per il quoziente trovato. Poichè consistendo il dividere un numero maggiore per un minore in trovare quante volte il minore è contenuto nel maggiore, ed esprimendosi questo numero di volte con il quoziente, è chiarissimo, che moltiplicando il partitore per il quoziente trovato, se la divisione è giusta ed esatta, dovrà restituirsi, e prodursi l'istesso numero maggiore, che si è diviso; come si può facilmente conoscere in tutti gli esempj di sopra adotti.

# DELL' ARITMETICA

# TRATTATO II.

## *Il quale contiene le operazioni de' Numeri Rotti.*

I. Il numero *rotto*, che più brevemente ancora chiamar si suole *rotto*, *frazione*, o *minuzia*, è una parte, ovvero più parti dell' unità, o di qualsivoglia cosa divisibile in varie parti, e concepita come unità. Così per esempio, se l'unità concepiscasi come divisa in quattro parti; e di queste quattro parti sene piglino tre, queste tre quarte parti, o questi tre quarti dell'unità saranno un rotto. Quindi è, che dovendosi esprimere in qualsivoglia rotto, in quante parti sia diviso il tutto, o l'unità; ed insieme quante di queste parti si piglino, qualsivoglia rotto è sempre composto di due numeri posto l'uno sopra dell'altro con una lineetta orizontale, che gli separa. Il numero superiore, il quale *numera*, palesa, ed esprime il numero delle parti prese, ovvero *quante* parti si piglino dell'unità divisa, chiamasi *numeratore*; e l'inferiore, il quale esprime in quante parti si era divisa l' unità, ovvero *quali* parti si piglino dell'unità, chiamasi *denominatore*. Così ne seguenti rotti $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{6}$, i quali si pronunziano, o significano *trequarti*, *cinque settimi*, *due sesti*, il 3, il 5, il 2 dicesi numeratore; ed il 4, il 7, il 6 sono i denominatori.

II. Per ben comprendere la natura e proprietà de' Rotti, e tutte le loro operazioni, deve si in primo luogo osservare, che il rotto non è sempre parte della semplice unità; ma talvolta ancora di qualsivoglia numero o grandezza, che si concepisca divisa in varie parti fra loro uguali.

Così

Così se il numero 36 si concepisca diviso in tre parti uguali, il numero 24 sarà $\frac{2}{3}$ del 36; ed in questo caso il rotto $\frac{2}{3}$ sarà uguale al numero intero 24.

III. Quindi apparisce ancora, che gli stessi rotti sono numeri o quantità a similianza appunto degl' interi, potendo uno essere uguale, maggiore, o minore di un'altro; con questo divario però, che la grandezza o quantità de' numeri interi apparisce ed esprimesi coll' istesso numero intero; ma la grandezza o quantità di un numero rotto non si può conoscere, se non riferiscasi il rotto istesso ad un' intero; vale a dire se non conoscasi insieme il tutto o l'intero, che si è diviso. Così la grandezza o quantità del numero 24 si conosce ed esprime vedendosi il 24; ma la grandezza o quantità del rotto $\frac{2}{3}$ non si può conoscere, se non conoscasi ancora il tutto, che si è diviso in tre parti: potendo in fatti accadere, che il valore o quantità del rotto $\frac{2}{3}$ sia maggiore o minore, secondochè sia maggiore o minore quel tutto, che si è diviso; siccome appunto il 24 è $\frac{2}{3}$ del 36; e l'8 è $\frac{2}{3}$ del 12; ma il $\frac{2}{3}$ del 36 è tanto maggiore del $\frac{2}{3}$ del 12, quanto il 36 è maggiore del 12. Per togliere nondimeno ogni ambiguità e confusione negli algorismi ed operazioni de' Rotti che si esporanno, devesi intendere, e sempre supponesi qualsivoglia Rotto come parte dell'unità, o dell'istesso intero o tutto, che si divida; sicchè per conoscere il loro valore o quantità non debbano più riferirsi all' intero o tutto diviso, ma unicamente paragonarsi

narsi fra loro nella maniera, che quì sotto dimostreraſſi al num. VII.

IV. Dovendoſi poi concepire qualſivoglia Rotto come grandezza, o come parte dell'intero, o dell'unità che ſi è diviſa, è chiariſſimo, che l'iſteſſo Rotto all'intero, o unità ha l'iſteſſa proporzione, che il numeratore al ſuo denominatore. Poichè eſprimendoſi nel Rotto $\frac{2}{3}$ eſſere ſtata l'unità diviſa in tre parti, ſe ſi pigliaſſero tutte queſte tre parti, ſi formerebbe l'intero, o unità diviſa; dove pigliandone due ſole formaſi il Rotto; e però il Rotto all'unità avrà l'iſteſſa proporzione che il numero delle parti preſe al numero delle parti, in cui ſi è diviſa l'unità; vale a dire, la ſteſſa proporzione del numeratore al ſuo denominatore.

V. E però, ſe il numeratore di un Rotto foſſe uguale al ſuo denominatore, come $\frac{3}{3}$, il Rotto ſarebbero uguale all'intero, o unità divina; e ſe il numeratore foſſe maggiore del denominatore, il Rotto ſarebbe uguale ad una, o più unità; ovvero ad una, o più unità con un Rotto; il che ſi conoſce dividendo il numeratore per il denominatore, poichè il quoziente, che riſulta da queſta diviſione, eſprimerà l'intero, o l'intero un Rotto, a cui equivaglia il Rotto dato. Così $\frac{6}{3}$ equivale a 2, così $\frac{4}{3}$ equivale a $1\frac{1}{3}$ e così finalmente $\frac{8}{3}$ è uguale a $2\frac{2}{3}$.

VI. E' manifeſto altresì, che due Rotti ſaranno fra loro uguali ſe i loro numeratori abbiano a' proprj denominatori l'iſteſſa proporzione; come $\frac{3}{4}$ è uguale a $\frac{6}{8}$. Poichè avendo per ipoteſi il 3 al 4 l'iſteſſa proporzione, che ha il 6 all' 8, avran-

avranno i due rotti $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$ l'istessa, o uguale ragione all' unità; e però saranno fra loro uguali. Ma se il 5 numeratore di un Rotto $\frac{5}{4}$ avesse al proprio denominatore 4 maggiore ragione del 6 all' 8, il Rotto $\frac{5}{4}$ sarebbe maggiore dell' altro Rotto $\frac{6}{8}$.

VII. Si potrà poi facilmente conoscere se di due Rotti dati $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{8}$ uno sia maggiore, o uguale all' altro, se si moltiplichino in croce il numeratore dell' uno col denominatore dell' altro, e si scrivano i loro prodotti sopra i numeratori moltiplicanti; poichè se i prodotti sieno uguali, uguali saranno i Rotti; ma se i prodotti fossero disuguali, quel Rotto sarebbe maggiore, il numeratore del quale desse un prodotto maggiore, come vedesi in questi esempj.

| 24 | 24 | 40 | 24 |
|---|---|---|---|
| 3 | 6 | 5 | 6 |
| 4 | 8 | 4 | 8 |

VIII. Se finalmente due Rotti abbiano l'istesso denominatore, saranno fra loro come i numeratori; e però $\frac{2}{4}$ sarà a $\frac{3}{4}$ come il 2 al 3. Ma se avranno l'istesso numeratore, saranno fra loro come i denominatori presi reciprocamente, cioè il primo rotto al secondo sarà come il denominatore del secondo al denominatore dal primo; onde $\frac{2}{4}$ a $\frac{2}{6}$ avrà l'istessa ragione che il 6 al 4.

## OPERAZIONI
### ed Algorismi de' Rotti.

### I.

*Ridurre il dato Rotto a minori termini.*

Ridurre a minori termini, ovvero *schizzare* il dato Rotto, consiste in trovare un'altro Rotto equi-

equivalente ed uguale al Rotto dato; ma espresso con numeri, o termini minori, se egli è possibile: debbasi dunque schiasare, o ridurre il rotto $\frac{48}{64}$, e trovisi un numero, il quale sia parte, cioè esattamente divida e misuri l'uno e l'altro dei termini del dato Rotto, come per esempio è l'8: ed il numero delle volte, che l'8 entra nel numeratore 48, cioè il 6, scrivasi come nuovo numeratore, siccome il numero delle volte, che l'istesso 8 entra nel denominatore 64, cioè l'8, scrivasi sotto la lineetta come nuovo denominatore; e sarà il rotto $\frac{6}{8}$ uguale al dato rotto $\frac{48}{64}$; e perchè nell'istessa maniera anche il rotto $\frac{6}{8}$ riducesi a $\frac{3}{4}$, sarà anche $\frac{3}{4}$ uguale a $\frac{48}{64}$.

Ovvero sottraggasi il 48 dal 64, ed il residuo 16 sottraggasi dal 48, e dal residuo 32 sottraggasi di nuovo il 16; e così successivamente sottraggasi il numero minore dal maggiore finchè il residuo resti uguale al sottratto, come sottraendo 16 dal 32 resta 16, e poi dividendo per questo ultimo residuo uguale al sottratto il numeratore 48, scrivasi il quoziente 3 come nuovo numeratore; siccome dividendo per l'istesso 16 il denominatore 64, scrivasi il quoziente 4 sotto la linea come nuovo denominatore; e sarà il rotto $\frac{3}{4}$ uguale a $\frac{48}{64}$.

$$\begin{array}{r} 64 \\ 48 \\ \hline 16 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 32 \\ 16 \\ \hline 16 \end{array}$$

Che se non potesse trovarsi alcun numero, che dividesse il numeratore e denominatore insieme dal Rdato otto, e sottraendo come sopra finalmente si trovasse la sola unità, sarebbe contrassegno, che il dato Rotto non può schiarsi, o ri-

ridurre a minori termini, se non se per approssimazione, come il rotto $\frac{45}{64}$ riducesi per approssimazione a $\frac{3}{4}$.

II.

*Ridurre due rotti dati ad un'istesso denominatore.*

Si debbano ridurre al medesimo denominatore i due rotti $\frac{4}{6}$, $\frac{3}{5}$. Si moltipfichino in croce il numeratore dell'uno col denominatore dell'altro, ed i prodotti 20, 18 si scrivano come nuovi numeratori, indi moltiplicati fra loro i denominatori, il loro prodotto 30 scrivasi come 30 nuovo e comune denominatore, e sarà $\frac{4}{6}$ uguale a $\frac{20}{30}$, e $\frac{3}{5}$ uguale a $\frac{18}{30}$.

Che se fossero dati più rotti da ridurre all'istesso denominatore, come $\frac{4}{6}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$, si riducano prima, come sopra, i due primi Rotti ai due Rotti uguali $\frac{20}{30}$ e $\frac{18}{30}$; e poi si riducano i due Rotti $\frac{18}{30}$, $\frac{2}{7}$ a' Rotti di un'istesso denominatore, cioè a $\frac{126}{210}$, $\frac{60}{210}$; e finalmente riducasi i rotti $\frac{20}{30}$, $\frac{2}{7}$ a' Rotti dell'istesso denominatore $\frac{140}{210}$, $\frac{60}{210}$; saranno ridotti i tre Rotti dati $\frac{4}{6}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$, a'Rotti $\frac{126}{210}$, $\frac{140}{210}$, $\frac{60}{210}$.

Ovvero più brevemente si moltiplichino fra loro i denominatori, e il loro prodotto scrivasi come nuovo comune denominatore; poi moltiplicandosi ciascuno dei dati numeratori nel prodotto dei denominatori degli altri Rotti, il loro prodotto

to sarà il nuovo numeratore. Così moltiplicando insieme 6, 5, 7, il loro prodotto, o nuovo denominatore sarà 210. Moltiplicando il primo numeratore 4 per 35 prodotto dei denominatori 5, 7, il prodotto 140 sarà il primo numeratore. Moltiplicando il secondo numeratore 3 in 42 prodotto dei denominatori 6, 7, il loro prodotto 126 sarà il secondo numeratore. Moltiplicando il terzo numeratore 2 in 30 prodotto dei denominatori 6, 5, il prodotto 60 sarà il terzo numeratore; e però i Rotti dati $\frac{4}{6}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$ saranno ridotti a $\frac{126}{210}$, $\frac{140}{210}$, $\frac{60}{210}$.

III.

*Ridurre qualsivoglia Rotto ad un'altro Rotto uguale, che abbia il dato denominatore.*

Debbasi ridurre il Rotto $\frac{5}{6}$ ad un Rotto uguale, che abbia per denominatore il 12. Si moltiplichi il numeratore 5 per 12, e dividendo il prodotto 60 per il denominatore 6, scrivasi il quoziente 10 per nuovo numeratore; e sarà il Rotto $\frac{10}{12}$ uguale al dato Rotto $\frac{5}{6}$.

Che se fatta la moltiplicazione e divisione, il quoziente che ne risulta non fosse numero intero, come se il Rotto dato $\frac{5}{7}$ dovesse ridursi al denominatore, e perciò il prodoto di 5 in 12, cioè il 60 diviso per 7 dasse per quoziente 8 $\frac{4}{7}$, si scriva l' intero 8 come nuovo numeratore sopra del 12, ed accanto scrivasi il rotto $\frac{4}{7}$; ed esprimerà, che il datto Rotto $\frac{5}{7}$ è uguale a $\frac{8}{12}$ con $\frac{4}{7}$ di un dodicesimo. Così

sup-

ſuppoſto il piede di 12 pollici, e volendo ridurre a pollici $\frac{5}{6}$ di un piede, ſi ridurrà come ſopra a $\frac{10}{12}$, cioè a pollici 10.; e volendo ridurre a pollici $\frac{5}{7}$ di un piede, ſi ridurrà a $\frac{8}{12}\ \frac{4}{7}$, cioè polici 8 con $\frac{4}{7}$ di un pollice: la quale frazione o Rotto compoſto potrà ridurſi a un rotto ſemplice, come ſi dimoſtra al numero XXII.

IV.

*Ridurre un numero intero dato ad un rotto uguale, che abbia il dato denominatore.*

Debbaſi ridurre il 6 ad un rotto, che abbia per denominatore l'8. Pongaſi il prodotto di 6 in 8, cioè il 48, come numeratore, il quale ſcrivaſi il dato denominatore; e ſarà il rotto $\frac{48}{8}$ uguale all'intero 6.

V.

*Sommare, o unire inſieme un rotto con un'altro rotto.*

Se i dati rotti abbiano l'iſteſſo denominatore, come $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{8}$, ſi aggiungano, o ſommino inſieme i loro numeratori 3, 2, e la loro ſomma 5 ſcrivaſi come nuovo numeratore, e ſarà il rotto $\frac{5}{8}$ uguale ai due rotti dati $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{8}$ preſi inſieme. Che ſe i dati rotti aveſſero denominatore, come $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{5}$, ſi riducano prima a due rotti, che abbiano l'iſteſſo denominatore, cioè a $\frac{15}{40}$, $\frac{16}{40}$, e poi ſi uniſcano inſieme i numeratori di queſti due rotti; e ſarà il rotto $\frac{31}{40}$ uguale a due rotti dati

VI.

## V I.

*Sommare un'intero con rotto.*

Debbasi aggiugnere, o sommare il 3 con $\frac{4}{5}$. Riducasi l'intero ad un rotto, che abbia per dominatore il 5, cioè a $\frac{15}{5}$; e poi si congiungano insieme i due rotti $\frac{15}{5}$, $\frac{4}{5}$; e sarà il rotto $\frac{19}{5}$ uguale all'intero 3 insieme col rotto $\frac{4}{5}$.

## V I I.

*Sommare uno, o più interi con uno, o più rotti.*

Debbansi unire, o sommare 3 e 7 con $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{8}$. Si riducano prima i rotti $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$ all'istesso denominatore, come $\frac{16}{40}$, $\frac{15}{40}$; ed altresì gl'interi si riducano a'rotti uguali, che abbiano per denominatore il 40, cioè a $\frac{120}{40}$, $\frac{280}{40}$, e poi si unischino insieme questi nuovi Rotti; e sarà il numero rotto $\frac{431}{40}$, ovvero 10 $\frac{31}{40}$ uguale agl' interi, e rotti dati.

## V I I I.

*Sottrare un rotto da un'altro rotto.*

Se i dati rotti abbiano l'istesso denominatore come $\frac{5}{8}$, $\frac{2}{8}$, sottragasi il numeratore minore 2 dal maggiore 5; ed il residuo 3 scrivasi come nuovo numeratore; e sarà il rotto $\frac{3}{8}$ la differenza de'due rotti dati.

Ma se i dati rotti avessero denominatore diverso, come $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{7}$, si riducano prima all'istesso denomina-

minatore, come $\frac{35}{56}$, $\frac{24}{56}$, e poi sottragasi il numeratore 24 dal 35; ed il residuo 11 scrivasi come nuovo numeratore; poichè il rotto $\frac{11}{56}$ sarà la differenza de' due dati rotti.

## IX.

*Sottrarre un rotto minore dell' unità dall' istessa unità.*

Debbasi sottrarre $\frac{5}{8}$ dall' unità. Sottraggasi il numeratore 5 dal denominatore 8, ed il residuo 3 pongasi come nuovo numeratore; e sarà il rotto $\frac{3}{8}$ la differenza del rotto dato dall' unità.

## X.

*Sottrarre un rotto maggiore dell' unità dall' intero.*

Debbasi sottrarre $\frac{8}{5}$ dall' intero 6. Riducasi l' intero 6 ad un rotto, che abbia per denominatore il 5, cioè a $\frac{30}{5}$, e da questo sottraggasi il rotto minore $\frac{8}{5}$; poichè scrivendo il residuo 22 come nuovo numeratore, sarà il rotto $\frac{22}{5}$ la differenza del rotto dato dall'intero.

Nell' istessa maniera potrebbesi sottrarre scambievolmente un' intero 4 dal rotto $\frac{14}{3}$, che sia maggiore dell'intero 4, riducendosi prima l'intero 4 ad un rotto uguale $\frac{12}{3}$, il quale sottratto da $\frac{14}{3}$ darebbe per residuo il rotto $\frac{2}{3}$.

## XI.

*Sottrarre un' intero con rotto da un'intero.*

Debbasi sottrarre $3\frac{2}{5}$ da 8. Si riducano l' intero

tero e rotto $3\frac{2}{5}$ ad un rotto uguale $\frac{17}{5}$, il quale sottraggasi dal rotto $\frac{40}{5}$ uguale all' intero dato 8; e sarà il rotto $\frac{23}{5}$ uguale alla differenza di $3\frac{2}{5}$ dall'intero 8.

## XII.

*Sottrarre un'intero da un'intero con rotto.*

Debbasi sottrarre 6 da $8\frac{2}{3}$. Riducasi $8\frac{2}{3}$ ad un rotto uguale $\frac{26}{3}$, ed altresì l'intero 6 ad un rotto uguale, che abbia per denominatore il 3, cioè a $\frac{18}{3}$, il quale sottraggasi da $\frac{26}{3}$; e sarà il rotto $\frac{8}{3}$, ovvero $2\frac{2}{3}$ residuo e differenza dell'intero 6 da $8\frac{2}{3}$.

## XIII.

*Sottrarre un'intero con rotto da un'intero con rotto.*

Debbasi sottrarre $4\frac{3}{5}$ da $6\frac{2}{7}$. Riducasi $4\frac{3}{5}$ al rotto uguale $\frac{23}{5}$; ed altresì $6\frac{2}{7}$ al rotto uguale $\frac{44}{7}$; e poi si riducano questi due rotti $\frac{23}{5}$, $\frac{44}{7}$ all'istesso denominatore, cioè a $\frac{161}{35}$, $\frac{220}{35}$; e finalmente sottratto il minore dal maggiore, sarà il rotto $\frac{59}{35}$, ovvero $1\frac{24}{35}$ la differenza di $4\frac{3}{5}$ da $6\frac{2}{7}$.

XIV.

*Moltiplicare un rotto per un' altro rotto.*

Debbasi moltiplicare $\frac{3}{5}$ per $\frac{4}{6}$. Si moltiplichino fra loro i numeratori 3, 4, e scrivasi il loro prodotto 12 come nuovo numeratore; siccome moltiplicati i denominatori 5, 6, scrivasi il loro prodotto 30 come denominatore; e sarà il rotto $\frac{12}{30}$, ovvero $\frac{2}{5}$ il prodotto dei due rotti dati.

XV.

*Moltiplicare un rotto per un' intero.*

Debbasi moltiplicare $\frac{6}{8}$ per 4. Si moltiplichi il numeratore 6 per l'intero dato 4, ed il prodotto 24 scrivasi come nuovo numeratore; e sarà il rotto $\frac{24}{8}$, ovvero l'intero 3, il prodotto del dato rotto coll' intero.

XVI.

*Moltiplicare un' intero con rotto per un' intero.*

Debbasi moltiplicare $3\frac{5}{7}$ per 6. Riducasi $3\frac{5}{7}$ ad un rotto uguale $\frac{26}{7}$, il quale si moltiplichi per l'inteto 6; e sarà il rotto $\frac{156}{7}$, ovvero $22\frac{2}{7}$ il prodotto di $3\frac{5}{7}$ per 6.

Ovvero moltiplicato prima l'intero 3 per l'intero 6, il prodotto de' quali è 18, si moltiplichi il rotto $\frac{5}{7}$ per l'istesso 6; ed il prodotto loro $\frac{30}{7}$, ovvero $4\frac{2}{7}$ si unisca coll'altro prodotto 18; e sarà come prima $22\frac{2}{7}$ il prodotto di $3\frac{5}{7}$ per 6.

## XVII.

*Moltiplicare un'intero con rotto per un'intero con rotto.*

Debbasi moltiplicare $5\frac{2}{3}$ per $6\frac{4}{7}$. Riducasi $5\frac{2}{3}$ ad un rotto uguale $\frac{17}{3}$; e similmente in $6\frac{6}{7}$ ad un rotto uguale $\frac{46}{7}$, e poi moltiplicati fra loro i due rotti $\frac{17}{3}$, $\frac{46}{7}$, il loro prodotto $\frac{782}{21}$ ovvero $37\frac{5}{21}$ sarà il prodotto di $5\frac{2}{3}$ per $6\frac{4}{7}$.

## XVIII.

*Dividere un rotto per un' altro rotto.*

Debbasi dividere $\frac{8}{15}$ per $\frac{4}{5}$. Se i termini del rotto divisore, cioè il 4 e 5, sieno parti, o dividano esattamente i termini dell'altro rotto, cioè l' 8 e 15, si pongano i quozienti di quelle divisioni, cioè il 2 e 3, come termini di nuovo rotto $\frac{2}{3}$, che sarà il quoziente, il quale risulta dal dividere $\frac{8}{15}$ per $\frac{4}{5}$.

Ovvero universalmente in qualsivoglia rotto si moltiplichi in croce il numeratore 8 del rotto maggiore, che si da a dividere, per il denominatore 5, e pongasi il loro prodotto 40 come nuovo numeratore; indi moltiplicato il numeratore 4 per il denominatore 15, pongasi il loro prodotto 60 per denominatore; e sarà il rotto $\frac{40}{60}$, ovvero $\frac{2}{3}$ il quoziente nato nella divisione di $\frac{\frac{8}{15}}{\frac{4}{5}}$ per $\frac{4}{5}$.

## XIX.

*Dividere un rotto per un'intero.*

Debbasi dividere $\frac{5}{8}$ per 6. Si moltiplichi

il

il denominatore 8 per 6, ed il prodotto 48 scrivasi come nuovo denominatore; e sarà il rotto $\frac{5}{48}$ il quoziente nato dal dividere $\frac{5}{8}$ per 6.

## XX.

### *Dividere un' intero per un rotto.*

Debbasi dividere 6 per $\frac{5}{8}$. Piglisi il prodotto di 6 in 8 come nuovo numeratore, ed il 5 numeratore del rotto dato scrivasi come nuovo denominatore, ed il rotto $\frac{48}{5}$ sarà il quoziente richiesto, il quale schisando riducesi a $9\frac{3}{5}$.

## XXI.

### *Dividere un' intero con rotto per un' intero.*

Debbasi dividere $4\frac{2}{3}$ per 5. Riducasi $4\frac{2}{3}$ ad un rotto uguale $\frac{14}{3}$, il quale dividasi per 5, moltiplicando il denominatore 3 per l'istesso 5; e sarà il rotto $\frac{14}{15}$ il quoziente ricercato.

## XXII.

### *Dividere un'intero con rotto per un' intero con rotto.*

Debbasi dividere $8\frac{2}{5}$ per $3\frac{4}{7}$. Riducasi $8\frac{2}{5}$ al rotto uguale $\frac{42}{5}$; e similmente $3\frac{4}{7}$ ad un rotto uguale $\frac{25}{7}$; e poi dividendo $\frac{42}{5}$ per $\frac{25}{7}$, si avrà il quoziente $\frac{294}{125}$, ovvero $2\frac{44}{125}$.

## XXIII.

### *Ridurre qualsivoglia rotto di rotto, a frazione seconda ad un rotto semplice, o frazione prima.*

Siccome qualsivoglia rotto, è parte dell'unità che dividesi in molte parti, così potendosi qual-

sivoglia rotto ancora concepire come diviso in varie parti, queste parti del rotto si chiamano *rotti di rotti*, ovvero *frazioni*, o *rotti secondi*.

Debbasi dunque per chiarezza e facilità maggiore de' calcoli ridurre $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$, cioè *tre quarti dell' unità*, e di più *due terzi degli stessi tre quarti* ad un rotto semplice. Moltiplicati i due numeratori, 3, 2, pongasi il loro prodotto 6 come nuovo numeratore; e moltiplicati altresì i due denominatori 4, 3, scrivasi il loro prodotto 12 come nuovo denominatore, e sarà il rotto semplice $\frac{6}{12}$ uguale al rotto $\frac{3}{4}$ col rotto di rotto $\frac{2}{3}$; vale a dire $\frac{3}{4}$ dell'unità, e $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$ saranno uguali a $\frac{6}{12}$ dell'istessa unità, cioè alla metà dell'unità.

Così supponendosi il piede diviso in 12 pollici, e ciascun pollice in 12 linee, i $\frac{3}{4}$ di un piede saranno 9 pollici; ed i $\frac{2}{3}$ di 9 pollici saranno 6 pollici metà del piede.

DELL'

# TRATTATO III.

*Il quale contiene la Regola del tre, e l'estrazione delle Radici.*

DOpo di avere già dimostrate le varie operazioni, che possono farsi ne' Numeri, o interi, o rotti che sieno, resta per ultimo a dimostrare la maniera, colla quale si possano trovare i numeri proporzionali; sicchè dati tre numeri si ritrovi il quarto loro proporzionale; ovvero dati due numeri si trovi il terzo proporzionale; ovvero finalmente dati due numeri si trovi il numero, che sia medio loro proporzionale, e perchè a questa operazione è connessa l'estrazione delle radici, si dovrà parlare ancora dell'estrazione delle radici, affinchè si abbia insieme unito tutto quello, che è necessario per la cognizione de' Numeri, ed operazioni dell'Aritmetica.

## PARTE PRIMA.

*Della Regola del tre.*

I. UNa delle più belle e più frequenti operazioni de' numeri è l'invenzione de' numeri proporzionali, la quale, per essere di un uso incredibile, e maravigliosa utilità, suole comunemente chiamarsi *Regola d'oro*, o *Regola del tre*; siccome ancora potrebbesi chiamare *Regola di proporzione*, poichè consiste, o tutta riducesi a ritrovare un quarto, o un terzo, ovvero un medio numero proporzionale.

II. Debbasi dunque in primo luogo dati tre numeri trovare il quarto loro proporzionale. Si moltiplichi il terzo per il secondo, ed il prodotto loro dividasi per il primo; poichè il quoziente, che

risulta da questa divisione, sarà il quarto proporzionale, che cercasi.

Così dovendosi trovare il quarto proporzionale ai tre numeri dati 3, 9, 8, si moltiplichi 8 per 9; ed il prodotto loro 72 dividasi per 3; ed il quoziente 24 sarà il quarto proporzionale; vale a dire, il 3 sarà al 9 come l'8 al 24.

Dati tre numeri 15, 26, 54 cerchisi il quarto proporzionale. Il 1404 prodotto di 54 in 26 dividasi per 15, ed il quoziente $93\frac{9}{15}$ sarà quarto proporzionale.

III. Così quando ancora alcuno, ovvero più dei dati numeri fossero rotti, come 5, $\frac{4}{7}$, 12, moltiplicati fra loro $\frac{4}{7}$ e 12, il prodotto loro $\frac{48}{7}$ dividasi per 5; e sarà il quoziente $\frac{48}{35}$, ovvero $1\frac{13}{35}$ il quinto proporzionale.

Così dati i tre numeri $\frac{2}{5}$, 6, $\frac{4}{9}$ cerchisi il quarto proporzionale, dividasi per $\frac{2}{5}$ il prodotto di 6 in $\frac{4}{9}$, cioè il $\frac{24}{9}$; ed il quoziente $\frac{120}{18}$, ovvero $6\frac{12}{18}$, ovvero $6\frac{2}{3}$ sarà quarto proporzionale.

Così finalmente se tutti i tre numeri dati fossero rotti, come $\frac{15}{18}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{22}$ si moltiplichi $\frac{7}{22}$ per $\frac{2}{5}$, ed il prodotto $\frac{14}{110}$ dividasi per $\frac{15}{18}$, ed il quoziente $\frac{252}{1650}$, ovvero $\frac{126}{825}$ sarà il quarto proporzionale.

IV. Debbasi in secondo luogo trovare il terzo numero proporzionale dopo due dati numeri. Si moltiplichi il secondo per se stesso, ed il prodot-

to dividasi per il primo; poichè il quoziente sarà il terzo numero proporzionale, che cercasi. Così dati i due numeri 3, 9, il prodotto di 9 in 9, ovvero di 9 in sestesso, cioè l'81 dividasi per 3; ed il quoziente 27 sarà il terzo proporzionale. Così il terzo proporzionale dopo 7 e 15 sarà il $32\frac{1}{7}$; dopo il 6 e $\frac{5}{8}$ sarà il $\frac{29}{384}$; dopo $\frac{2}{29}$ e il $\frac{7}{24}$ sarà il $\frac{7}{11}\frac{3}{5}\frac{5}{2}$.

V. Si debba finalmente trovare fra due dati numeri il medio proporzionale; ficchè il primo dato sia al medio trovato come l'istesso medio al secondo numero dato. Si moltiplichino fra loro i due numeri dati, ed estraggasi dal loro prodotto la radice quadra; poichè la radice istessa sarà il numero medio proporzionale, che cercasi. Può nondimeno frequentemente succedere, che i due dati numeri non ammettino fra loro verun' altro numero medio proporzionale; il che si potrà facilmente conoscere, dall'osservare se il loro prodotto sia quadrato, da cui perciò possa estrarsi la radice quadrata. Ma poichè questa notizia ed operazione dipende dall'estrazione delle radici, parleremo quì brevemente delle radici medesime, e loro estrazione.

## PARTE SECONDA.

### *Dell' estrazione della Radice quadra.*

I. QUalsivoglia numero, che moltiplicato in se stesso produce un'altro numero, dicesi *radice quadrata*, ovvero *radice quadra* di quel numero prodotto; e l'istesso numero prodotto dalla moltiplicazione di un'altro numero per se medesimo, dicesi *numero quadrato* di quella radice. Così il numero 6 dicesi radice quadra del 36, poichè moltiplicato in se stesso produce il 36; siccome il 36 dicesi quadrato del 6, poichè risulta dalla

moltiplicazione di 6 in se stesso. Che se un qualche numero, ovvero radice moltiplicando il quadrato da se prodotto, produce un'altro numero, questo si dice *numero cubo*; e la radice, ovvero numero, che moltiplicando il proprio quadrato produce il numero cubo, rispetto all'istesso numero cubo, si chiama *radice cubica*, ovvero *radice cuba*. Così perchè il 6 moltiplicando il 36 numero quadrato da se prodotto fa 216, questo numero 216 dicesi cubo; ed il 6, che moltiplicando il proprio quadrato 36 produce il 216, dicesi radice cuba del 216, siccome dicevasi radice quadra del 36.

II. Dunque l'estrarre la radice quadra da un dato numero, altro non è, che ritrovare un numero, il quale moltiplicato in se stesso produca quel dato numero; siccome l'estrarre la radice cuba da un dato numero unicamente consiste in trovare un numero, il quale moltiplicando il quadrato da se prodotto produca il dato numero.

III. Così pigliato qualsivoglia numero semplice, cioè minore del 10, come radice, è facile trovare il suo numero quadrato, o cubo corrispondente: siccome scambievolmente dato il numero cubo, o quadrato di una radice semplice, è facile il trovare la sua radice quadrata, o cuba, come per chiarezza, o comodità maggiore si veggono espresse nella seguente Tavola.

IV. Ma per estrarre la radice quadra da un numero composto di molte cifre si devono fare molte operazioni; le quali tutte per ordine qui sotto dimostreremo. Debbasi dunque estrarre la radice quadra da qualsivoglia numero composto, per esempio da 54756.

| Radici | Quadrati | Cubi |
|---|---|---|
| 1. | 1. | 1. |
| 2. | 4. | 8. |
| 3. | 9. | 27. |
| 4. | 16. | 64. |
| 5. | 25. | 125. |
| 6. | 36. | 216. |
| 7. | 49. | 343. |
| 8. | 64. | 512. |
| 9. | 81. | 729. |
| 10. | 100. | 1000. |

1. Si distinguano prima le cifre del dato numero a due a due, cominciando dalla prima, o più fini-

sinistra con un punto; e sarà distinto il dato numero in varie parti, o membri, che saranno coppie di cifre, a riserva dell'ultima parte, o membro, che può essere composto di una cifra sola; e riflettasi, che quante sono le parti, o membri distinti nel dato numero così diviso, altrettante saranno le cifre nella radice quadra, che cercasi.

2. Cerchisi dopo nella Tavola sopra esposta la radice quadra del numero, che forma il primo membro 5; ovvero, se egli non è numero quadrato, la radice quadra del numero quadrato prossimamente minore del 5, cioè la radice del 4, che sarà 2; e scrivasi questa radice trovata 2 a dirimpetto del dato numero, come l'ultima cifra della radice quadra, che cercasi.

| | |
|---|---|
| 234.1 | 5. 47. 56 |
| | 4 |
| 43 | 247 |
| 3 | |
| 129 | 129 |
| 464 | 1856 |
| 4 | 1856 |
| 1856 | 0000 |

3. Indi sottraggasi il quadrato della radice trovata 2, cioè il 4, dal primo membro 5; ed il residuo 1 scrivasi sotto il 5; ed accanto al residuo stesso 1 scrivasi il membro seguente 47, sicchè si formi quasi un nuovo membro totale 147.

4. Radoppisi la radice trovata 2, ed il suo doppio 4, che chiamasi *divisore*, scrivasi a dirimpetto al membro totale 147, e cerchisi quante volte il divisore 4 entra nel 14, cioè nel membro totale 147 lasciata la prima cifra 7; e trovando che vi entra tre volte, scrivasi il 3 come penultima cifra radicale accanto al 2.

5. L'istessa cifra radicale 3 scrivasi accanto al divisore 4 sicchè divenga 43; e moltiplicato l'istesso 43 per la cifra medesima, o radice 3 sottragasi il loro prodotto 129 dal membro totale 147; ed accanto al residuo 18 si scriva l'altro membro 56 del dato numero, sicchè formi quasi un nuovo membro totale 1856.

6. Si radoppj la radice fra quì trovata 23, ed il suo doppio 46 sarà il secondo divisore, il quale

le ſcrivaſi a dirimpetto al membro totale 1856; e cercheſi quante volte il diviſore 46 entra nel 185, cioè nel membro 1856, laſciata la prima cifra 6; e trovato, ch' egli vi entra, o vi è contenuto 4 volte, ſcrivaſi il 4 come nuova cifra radicale accanto al 3.

7. Scrivaſi ancora l'iſteſſa cifra 4 accanto al diviſore 46, ſicchè divenga 464; e moltiplicato l'iſteſſo 464 per la medeſima cifra radicale 4 ſottraggaſi il loro prodotto 1856 dal membro totale 1856: poichè, ſe il reſiduo ſia zero, o niente avanti, ſarà contraſſegno, che il numero trovato 234 è la radice quadrata del dato numero 54756. E ſe dopo fatta la ſottrazione avanzaſſe un qualche numero, ſarebbe contraſſegno, che il dato numero non è quadrato; ma diverebbe bensì quadrato ſe da lui ſi toglieſſe quel numero, che avanzava.

8. L' iſteſſe operazioni che ſi ſono ſpiegate, o preſcritte ne' numeri 4. 5. 6. 7. ſi debbono continuare ſinchè nel dato numero ſono altre parti, o membri, i quali ſi devono ſempre per ordine abbaſſare, o ſcrivere accanto ai reſidui de' membri precedenti, finchè ſi arrivi all' ultimo membro compoſto delle due prime cifre del dato numero.

V. Può nondimeno talora ſuccedere, che fatta la moltiplicazione preſcritta nel num. 5 e 7, il prodotto ſia maggiore del membro totale, e però non poſſa da quello ſottrarſi. In tal caſo deveſi ſcemare la cifra radicale trovata, e farſi tanto minore, che fatta come ſopra la moltiplicazione, il prodotto ſia minore, e però poſſa ſottrarſi dal membro totale. Così dovendoſi eſtrarre la radice quadra dal numero 225, troviſi la proſſima radice del 2, cioè l' 1, il quale ſottratto dal 2 laſcia per reſiduo 1; accanto al quale ſcrivaſi il membro ſeguente 25; e radoppiata la radice 1 ſi avrà per divi-

15 — — | 225
1
26 ..... 125
6
156
25..
125

divisore il 2; il quale entrando nel 12, cioè nel membro 125, lasciata la prima cifra 5, sei volte, dovrebbesi scrivere il 6 come penultima cifra radicale, la quale scritta altresì accanto al divisore 2 farebbe 26, il quale moltiplicato per la medesima radice 6 farebbe 156 maggiore del membro totale 125. Scemisi dunque la cifra radicale, e pigliando non più il 6, ma il 5, e scrittala accanto al divisore 2, sicchè formi 25, moltiplicando il 25 per 5, il prodotto 125 scrivasi sotto il membro totale 225; poichè sottratto quello da questo darà per residuo zero; e però la radice del dato numero 225 sarà il 15.

VI. Può similmente accadere che il divisore trovato non entri nel membro totale neppure una volta; ed allora devesi scrivere il zero come nuova cifra radicale, ed accanto a quel membro troppo piccolo devesi scrivere il membro che segue, e poi continuare l'operazione come sopra. Così dovendosi estrarre la radice quadrata da 826281. Trovato il 9 radice prossima di 82, e sottratto il quadrato 81 dal membro 82, resta per residuo 1; accanto al quale scritto il membro seguente 62, e radoppiata la radice 9, sicchè ne risulti il divisore 18; poichè questo divisore 18 non entra nel 16, scrivasi zero accanto al 9 come nuova cifra radicale; ed accanto al membro 162 troppo piccolo scrivasi il membro seguente 81, sicchè risulti il membro totale 16281; e radoppiata la radice 90, scrivasi il 180 secondo divisore a dirimpetto al membro 16281; e poichè il divisore 180 entra nel 16281 nove volte, scrivasi 9 come cifra radicale, la quale altresì scritta accanto al divisore 180 fa 1809, il quale moltiplicato per 9 dà 16281; il quale sottratto dal membro totale 16281 lascia zero; e però la radice di 826281 sarà 909.

| 909 | 82. 62. 81 |
|---|---|
| | 81 |
| 18 | 162 |
| 1809 | 16281 |
| 9 | |
| 16281 | 16281 |
| | 00000 |

VII.

VII. Devesi finalmente osservare, che se l'ultimo membro del dato numero sia 1, 2, 03, nissuno de' quali è numero quadrato, nè può avere altra radice, che l'unità, in tal caso si ha da scrivere l'1 per ultima cifra radicale; ed il quadrato di lei, cioè l'unità stessa, devesi sottrarre dal primo membro.

Così dovendosi estrarre la radice quadra da 225, si è presa per ultima cifra radicale l'unità, e poi sottratto il suo quadrato 1 dal 2, e continuate le altre operazioni.

VIII. Si può trovare, ed estrarre ancora la radice da un dato rotto; se le parti, o termini, che lo compongono, cioè il numeratore e denominatore, sieno numeri quadrati; poichè estraendo le loro radici quadre, e scrivendole come parti, o termini di un nuovo rotto, sarà questo la radice quadra dal dato rotto. Così $\frac{2}{5}$ è radice quadra di $\frac{4}{25}$; $\frac{3}{8}$ è radice quadra di $\frac{9}{64}$. Che se le parti del dato rotto non fossero numeri quadrati, non si potrebbe dal dato rotto estrarre radice alcuna quadrata, se non per approssimazione, come il rotto $\frac{5}{7}$ sarebbe prossimamente la radice quadra di $\frac{27}{56}$; essendo radice quadra di $\frac{25}{49}$ come sopra si è dimostrato.

## PARTE TERZA.

### *Estrazione della Radice cuba.*

I. PEr estrarre da qualsivoglia numero dato la radice cuba, si facciano le seguenti operazioni. Sia per esempio il numero dato 97336, di cui si cerca la radice cuba.

1. Si distinguano prima le cifre del dato numero a tre a tre, cominciando dalla prima, o più finivra; e sarà diviso il dato numero in varie parti, o membri, ciascuno de' quali sarà composto di tre cifre,

fra, a riſerva dell' ultimo, o più deſtro, il quale può coſtare di due ſole, o di una cifra; e quanti ſaranno i membri, o parti così diſtinte nel dato numero, tante ſaranno le cifre nella radice cuba cercata.

2. Cerchiſi dopo la radice cuba dell' ultimo membro 97, cioè del cubo 64 proſſimamente minore, che ſarà 4; la quale ſcrivaſi come ultima cifra della radice, e ſottraendo dal membro 97 il 64 cubo della radice trovata 4, ſcrivaſi accanto al reſiduo 33 il membro ſeguente 336; ſicchè riſulti un nuovo membro totale 33336.

| | | |
|---|---|---|
| | 46 | 97. 336 |
| | | 64 |
| 492 | | 33336 |
| | | 33336 |
| | | 00000 |

3. Poi ſi triplichi il 16 quadrato della cifra radicale 4, e ſcrivaſi il prodotto 48; e triplicandoſi altresì la cifra iſteſſa 4, ſcrivaſi il prodotto 12 ſotto il 48, nella maniera, che qui vedeſi; e la loro ſomma 492; ſarà il *diviſore*, il quale ſcrivaſi a dirimpetto al membro totale 33336.

| |
|---|
| 48 |
| 12 |
| 492 |

4. Si cerchi quante volte il diviſore 492 entra nel 3333, cioè nel membro 33336 laſciata la prima cifra 6; e perchè vi entra ſei volte, ſcrivaſi accanto al 4 il 6 come nuova cifra radicale.

5. Per la cifra radicale 6 ſi moltiplichi il triplo del quadrato dell' altra cifra 4, cioè il 48; e facciaſi il prodotto 288; e per il 36 quadrato della radice 6 ſi moltiplichi il triplo dell' altra radice 4, cioè il 12, e farà 432; e finalmente troviſi il cubo dell' iſteſſa radice 6, moltiplicando la radice 6 nel ſuo quadrato 36, e ſarà il prodotto 216; ed avendo collocati queſti tre prodotti nella maniera, che quì accanto vedeſi, la loro ſomma 33336 ſottraggaſi dal membro totale 33336; e ſe avanza zero, ſarà contraſſegno che il dato numero 97336 è cubo, la radice del quale ſarà 46. Che ſe avanzaſſe un qualche reſiduo dopo la ſottrazione, il dato numero non ſarebbe cubo; ma

| |
|---|
| 288 |
| 432 |
| 216 |
| 33336 |

di-

diverrebbe cubo, togliendo da lui quel residuo, o numero, che avanzava.

Che se nel dato numero fosse ancora un'altro membro, si dovrebbe questo scrivere accanto al residuo del membro precedente, e poi triplicarsi il quadrato della radice trovata 46; e continuarsi tutte le altre operazioni espresse, o prescritte sopra al num. 3. 4. 5. finchè non restasse membro alcuno nel dato numero.

II. E perchè può talvolta accadere che dopo fatta la moltiplicazione prescritta al num. 3, il prodotto sia maggiore del membro totale, e però non possa da quello sottrarsi; ovvero che il divisore trovato non entri nel membro totale levatagli la prima cifra; ovvero finalmente, che nell'ultimo membro sia 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, niffuno de' quali è cubo, si debbono in questi tre casi osservare le istesse cautele, o compensi già dimostrati per la radice quadra nella Parte II. al num. V. VI. VII.

III. Dovendosi finalmente estrarre la radice cuba da un rotto, si estraggano, se egli è possibile, le radici cube dai termini, o parti del rotto istesso, cioè dal numeratore, e denominatore; e scritte queste radici come nuove parti di un rotto, sarà questo nuovo rotto la radice cuba del rotto dato. Così $\frac{3}{5}$ sarà la radice cuba di $\frac{27}{125}$; $\frac{2}{4}$ la radice cuba di $\frac{8}{64}$ Che se le parti, o termini del rotto dato non fossero numeri cubi, non si potrebbe dal rotto dato estrarre la radice cuba richiesta, se non per approssimazione; come il rotto $\frac{5}{6}$, essendo radice cuba del rotto $\frac{125}{512}$, sarà prossimamente ancora la radice cuba del rotto $\frac{130}{20}$.

DEL-

# LIBRO II.

*Il quale contiene la Trigonometria.*

DOpo di avere già dimostrate le più nobili e più necessarie operazioni dei Numeri, o quantità *discreta*, si debbono adesso prescrivere e dimostrare le operazioni, che riguardano le varie spezie della grandezza, o quantità *continua*, vale a dire, le *linee*, *superficie*, e *corpi*. E poichè la prima, e più semplice spezie delle figure è il *Triangolo*, dalla cognizione e misura del quale facilmente poi si deduce la cognizione ancora e misura di qualsivoglia altro genere di figura, o di corpo, parlerò nel presente Libro della Trigonometria o dimensione del Triangolo, dimostrando la maniera, colla quale si possano conoscere e misurare i lati, o linee che lo compongono, e gli angoli ancora, che formati sono dagli stessi lati; siccome opportunamente si parlerà nel libro IV. della maniera, con cui si debba misurare l' area, o superficie, ch' egli contiene. Per rendere poi più sensibile e più chiara la notizia delle parti, e varietà del Triangolo, sarà per avventura giovevole il dare un' occhiata alle prime 14 definizioni del seguente libro, osservando singolarmente quelle, che riguardano la *linea*, la *perpendicolare*, l' *angolo*, la *figura*, e il *Triangolo*. Basterà in tanto quì di passaggio riflettere, che in qualsivoglia triangolo sei cose, ovvero parti si possono considerare, vale a dire, i tre lati, o linee che lo compongono, ed i tre angoli che ne risultano, e che però l' artifizio ed utilità singolare della Trigonometria consiste in dimostrar la maniera, con cui dall' essere conosciute tre sole di queste parti, si possa facilmente inferire, o conoscere la misura, o proporzione delle altre tre, che rimangono.

DE-

# DEFINIZIONI,

## *Ovvero Notizie da presupporsi.*

I.

QUalsivoglia circonferenza del circolo, o grande, o piccolo che questo sia, devesi concepire, o suppore divisa da Matematici in 360 parti fra loro uguali, che si chiamano *gradi*; qualsivoglia di questi gradi in 60 particelle uguali, che si chiamano *minuti*, o *minuti primi*; qualsivoglia minuto primo in 60 particelle fra loro uguali, che si chiamano *minuti secondi*; qualsivoglia minuto secondo in 60 *minuti terzi*; e qualsivoglia minuto terzo in 6 *minuti quarti*: e così successivamente; solendosi esprimere per brevità maggiore una tal divisione in questa maniera gr, 12. 15.ᴵ 23.ᴵᴵ 42.ᴵᴵᴵ 8.ᴵᴵᴵᴵ

II.

Fig. 2. E perchè a qualsivoglia arco, ovvero parte di circonferenza AB, tirati i raggi, IA, IB, corrisponde un'angolo determinato AIB; e tutti i raggi, che dal centro si tirano a qualsivoglia punto della circonferenza, dividuo in varie parti, o varj angoli la somma de' quattro angoli retti, che si formano, o si ritrovano intorno al centro I, anche l'intera somma dei quattro angoli retti intorno ad I devesi concepire, o supporre divisa in 360 parti, e ciascuna di queste parti in 60 particelle fra loro uguali; e così successivamente, sicchè ai gradi, o minuti della circonferenza corrispondano altrettanti gradi, o minuti dell'angolo; siccome ai gradi, o minuti dell' angolo formato dai raggi corrispondono quelle della circonferenza, o dell'arco compreso da' raggi istessi.

III.

Di quì si inferisce, che la misura di qualsivoglia angolo dato AIB è l'arco AB, cioè quella parte di circonferenza, o quell'arco, che si descriva con qualsivoglia intervallo IA intorno alla cima,

ma, o punta dell'angolo I come centro; ficchè tanto maggiore, o minore sia l'angolo dato AIB di un'altro angolo AIC, quanto maggiore, o minore è l'arco, che corrisponde all'angolo AIB, dell'arco che corrisponde all'Angolo AIC; vale a dire, quanto è maggiore, o minore il numero de' gradi, e minuti compresi nell'arco AB del numero de' gradi, e minuti compresi nell'arco AC; avendo sempre fra loro gli archi di un'istesso circolo quell'istessa proporzione, che trovasi fra gli angoli loro corrispondenti.

IV.

Preso nel circolo qualsivoglia arco ABC, ovvero qualsivoglia angolo ADC, e tirata la retta AC, questa chiamasi *corda*, o *sottesa* all'arco istesso ABC, ovvero all'angolo ADC; onde una retta dicesi *sottesa ad un arco* quando congiugne le estremità di quello; siccome dicesi *sottesa ad un'angolo* quando congiugne l'estremità di que'raggi, che formano l'angolo istesso. E benchè la retta AC potesse considerarsi come sottesa anche all'arco AIFEC maggiore del semicircolo, perchè nondimeno non sarebbe sottesa insieme ad un'angolo, perciò si dirà sottesa solamente all'arco ABC minore del semicircolo. Fig. 3.

V.

Che se tirata la corda, o sottesa AC all'arco ABC minore del semicircolo, si tiri l'AF sottesa all'arco AF, che rimane per compimento del semicircolo, e perciò chiamasi *arco del compimento*, la retta, o corda AF, la quale deve essere perpendicolare alla corda AC, chiamasi *sottesa all'arco del compimento* AIF, ovvero all'angolo del compimento ADF, il quale coll'angolo ADC compisce la somma di 180. gradi, ovvero di due angoli retti.

VI.

Il *seno retto* di un'angolo, o di un'arco è quella retta, la quale dall'estremità dell'arco, o di un raggio si tira perpendicolarmente sopra dell'altro raggio: come la retta AG, che dal punto A estre-

mità dell'arco AB, o dal raggio DA si tira perpendicolare sopra dell'altro raggio DB, dicesi seno retto dell'angolo ADB, o dell'arco AB. Donde apparisce, che il seno retto di un'arco, o di un'angolo è la metà della corda sottesa al doppio dell'arco, o dell'angolo dato; poichè la retta, o seno retto AG è la metà della corda AC sottesa all'arco ABC doppio dell'arco AB, o sottesa all'angolo ADC doppio dall'angolo dato ADB.

VII.

Quindi apparisce ancora, che l'istessa retta, o semicorda AG è seno retto tanto dell'arco minore AB, ed angolo ADB, quanto ancora dell'arco maggiore AIFE, ed angolo ADE; benchè chiamandosi la retta AG *seno retto*, sogliasi intendere rispetto all'angolo, o arco minore AB.

VIII.

E perchè la corda, o sottesa maggiore, che può tirarsi nel circolo, è il diametro IV, il seno retto maggiore, che si può tirare nel semicircolo dall'estremità di un'arco perpendicolare sopra di un raggio, sarà la retta ID uguale all'istesso raggio del circolo; e però l'istesso raggio dicesi *seno intero*, *seno tutto*, o *raggio* dell'istesso circolo.

IX.

E siccome l'angolo ADI si chiama *angolo del compimento*, perchè coll'angolo ADB compisce l'angolo di 90 gradi, ovvero l'angolo retto; e l'arco AI dicesi *l'arco del compimento*, poichè coll'arco AB compisce l'arco di 90 gradi, ovvero la quarta parte della circonferenza, così la retta *AH* tirata perpendicolare sopra del raggio DI chiamasi *segno del compimento*, ovvero *seno secondo*.

X.

Finalmente la retta GB intercetta fra il seno retto AG, e la circonferenza ABC, vale a dire, la differenza fra il raggio DB, e il seno del compimento AH, uguale a DG, dicesi *seno verso* dell'arco AB; siccome la retta HI direbbesi *seno verso* dell'arco AI.

XI.

X I

Che se per raggio del circolo non si pigli la ba- Fig. 4.
se, o retta maggiore DA sottoposta all' angolo retto, ma più tosto uno de' lati, come DG; ovvero se al punto G estremità dell' arco GB si tiri la tangente finchè essa concorra, o si seghi con l'altro raggio DB prolungato nel punto A, allora la retta DG dirassi *raggio*; la retta GA si dirà *tangente* dell' arco GB, ovvero dell' angolo GDB; e la retta DA si chiamerà *secante* dell' istesso arco GB, ovvero dell' angolo GDB.

X I I.

Dal che facilmente apparisce, che intorno all' istesso arco GB, ovvero all' istesso angolo GDB, il raggio DG, ovvero DB, sta al seno retto BE come la secante DA alla tangente AG; o la tangente AG al seno retto BE come il raggio DG al seno del compimento DE.

X I I I.

Similmente ancora è chiarissimo, che se ne'cir- Fig. 4.
coli disuguali sia l'angolo GDA uguale all'ango- e 5.
lo LKM, ed in conseguenza l'arco GB sia simile all'arco LN, il raggio, l'arco, il seno retto, la tangente, e la secante di un angolo D saranno proporzionali al raggio, all'arco, al seno retto, alla tangente, e alla secante dell'altro angolo K; e però sarà come il raggio DG al raggio KL così l'arco GB all'arco LN; il seno retto BE al seno retto NO; la tangente GA tangente LM, la secante DA alla secante KM; ovvero come il raggio DG, o DB, al suo seno retto BE, così il raggio KL, ovvero KN, al suo seno retto NO; e come la tangente GA alla sua secante DA, o al suo raggio DG, così la tangente LM alla sua secante KM, o al suo raggio KL.

X I V.

Se dunque in un qualche circolo DGB qualunque egli siasi, conoscasi, o si ritrovi la proporzione, è che fra il raggio, seno retto, tangente, e secante di qualsivoglia arco GB, o di qualsi-

voglia angolo dato GDB, facilmente ancora si conoscerà la proporzione, che trovasi fra il raggio, seno retto, tangente, e secante di un'altro arco simile LN, o di un'altro angolo uguale LKN di qualsivogli altro circolo KLN.

X V.

E però, se nel circolo DGB sia dato l'angolo GDB, e dividendo il raggio DG in qualsivoglia numero di parti fra loro uguali, per esempio 20, si ritrovi, che di quelle 20 parti il seno retto BE ne contiene 12; la tangente GA ne contiene 15; la secante DA ne contiene 25; anche nel circolo KLN intorno all'angolo LKN uguale all'angolo GDB, dividendo il raggio KL in 20 parti fra loro uguali, di quelle 20 parti il seno retto NO ne conterrà 12, la tangente LM ne conterrà, 15, e la seccante KM ne conterrà 25; vale a dire, divisi i due raggi in egual numero di parti uguali, i due seni retti, le due tangenti, e le due secanti conterranno sempre ugual numero di quelle parti, nelle quali divisi furono i loro raggi.

Ora gli antichi ed illustri Inventori della Trigenometria già ritrovata, per quanto credesi, da Ipparco, e Menelao, concepirono il raggio del circolo diviso in un certo numero di parti fra loro uguali; e poi cercarono quante di queste parti fossero contenute nel seno retto, tangente, e secante di qualsivoglia arco, o angolo dato dell'istesso circolo; vale a dire, qual proporzione avesse il seno retto, tangente, e secante di un angolo, o arco dato all'intero raggio del circolo; affinchè poi si potesse l'istessa divisione, o proporzione applicare a' seni retti, tangenti, e secanti di un' altro angolo uguale, ovvero di un' altro arco simile col raggio del proprio circolo. Così Tolommeo divise il raggio in 60 parti, e ricercò il numero di queste parti, che fossero contenute nel seno retto, tangente, e seccante di qualsivoglia angolo, o arco dato; ma perchè questo numero così piccolo di poche parti rendeva poco esatta,

esatta e precisa la proporzione del raggio col seno retto, tangente, e secante, e spesso ne risultavano rotti, i quali perturbavano le operazioni ed i calcoli; perciò i Moderni dopo il Retico, e Longomontano sogliono comunemente dividere il raggio in 10000000 parti, e poi ricercano quante di queste parti sieno contenute nel seno retto, tangente, e secante di qualsivoglia angolo dato distinto in gradi, e minuti primi. Così, benchè il numero di queste parti già ritrovato, o determinato nel seno retto, tangente, o secante non sia talora esattissimo, e vi sopravanzi, o vi manchi qualche piccola particella; perchè nondimeno questa piccola particella, o differenza è minore di una diecimilionesima parte del raggio, si può riputare insensibile; e però la misura, o proporzione ritrovata ed espressa nelle loro Tavole può giudicarsi esatta e perfetta.

Ed ecco l'artifizio mirabile, e l'infinita pena, con cui sono calcolate e disposte le Tavole de' seni retti, tangenti, e seccanti, sopra le quali raggirasi, ed è fondata la Trigonometria; ed ecco altresì l'uso incredibile, che se ne fa, affinchè dato uno triangolo rettangolo, del quale conoscasi qualsivoglia angolo, subito si conosca ancora, e ritrovisi sulle Tavole la proporzione de' lati: e perciò se uno dei lati sia conosciuto, o misurato in qualsivoglia genere di misura, subito ancora veggasi in un'occhiata la proporzione, o grandezza degli altri lati nell'istesso genere di misura; il che facilmente poi si stende agli obliquangoli ancora, come a suo luogo dimostrerassi.

Così per esempio, se nel triangolo rettangolo BDE si conosca l'angolo BDE di gr. 38, 20, e supponendosi il raggio DG, o DB di parti 10000000, si cerchi nelle Tavole l'angolo dato 38, 20, si troverà in quelle a dirimpetto all'angolo istesso 38, 20, il seno retto BE di parti 6202355; la tangente GA di parti 7906975; o la secante AD di parti 12748343: e però se mi- Fig. 4

ſurato uno de' lati, come il raggio DG, o DB ; e trovandoſi di braccia 20 ſi faccia

come 10000000 a 6202355

così 20 ad un quarto numero 12 $\frac{4047100}{10000000}$

avremo il ſeno BE di braccia 12 $\frac{40471}{100000}$, ovvero proſſimamente di braccia 12 $\frac{2}{5}$. Se facciaſi

come 10000000 a 7906975

così 20 a 15 $\frac{81395000}{10000000}$

ſarà la tangente GA di braccia 15 $\frac{81395}{100000}$, ovvero proſſimamente di braccia 15 $\frac{4}{5}$. Se finalmente facciaſi

come 10000000 a 12748343

così 20 a 25 $\frac{4966860}{10000000}$

avremo la ſecante DA di braccia 25 $\frac{496686}{1000000}$, ovvero proſſimamente di braccia 25 $\frac{6}{13}$.

Per trovare il ſeno del compimento DE, baſta trovare il quarto numero proporzionale dopo la tangente GA, il ſeno retto BE, ed il raggio DG, per eſſerſi già dimoſtrato nella defin. 12, come GA ad EB così GD a DE. Ma più brevemente ed eſattamente ancora potrà trovarſi il ſeno del compimento DE con riflettere, che eſſendo la ſomma dei tre angoli di qualſivoglia triangolo uguale a' due retti, ovvero a 80 gradi, ſe l' angolo DGA è retto, cioè di 90 gradi, e l' angolo D poneſi di gr. 38, 20', l'angolo rimanente A ſarà di gr. 51, 40', il quale appunto nelle Tavole è a dirimpetto all'angolo dato 38, 20', ed a queſt' angolo 51, 40' corriſponde nell'iſteſſe Tavole il ſeno retto 7844157; e però la retta DE, che è ſeno retto riſpetto all'angolo B, o A, e inſieme

ſeno

seno di compimento rispetto all' angolo D, sarà di parti 7844157; e però facendo

come 1000000 a 7844157

così 20 a 15 $\frac{6883140}{10000090}$,

sarà questo il numero delle braccia contenute nella retta DE, le quali sottraendosi dall'intero raggio DG, che è di braccia 20, si avrà il seno verso GE di braccia 4 $\frac{3116860}{10000000}$.

E perchè mio pensiere non è di rendere quì la ragione, o dimostrare la maniera, colla quale già discuoprirono i Matematici la proporzione, che si ritrova fra i lati del triangolo rettangolo considerati come raggio, seno retto, e seno di compimento, ovvero come raggio, tangente, e secante; ma solamente di far conoscere l'uso mirabile, che si abbia a fare nella Trigonometria delle Tavole di questi seni, tangenti, e secanti da loro composte per la misura, o scuoprimento dei lati ed angoli, che nel triangolo dato fossero incogniti, io supporrò quì come esatte le Tavole istesse, o le proporzioni, e misure da quelle espresse; potendosi facilmente un tale artifizio conoscere da chi lo bramasse nelle loro Opere, ed in gran parte ancora dedurre da quelle varie Proposizioni, che da me furono dimostrate nella Geometria speculativa, e che talvolta ancora citate sono nel margine di questo libro.

Dopo di avere ben chiaramente appreso le definizioni, o Notizie fin quì spiegate, farà facilissimo l'intendere tutte le Proposizioni che seguono, alle quali riducesi tutta la cognizione, o scienza della Trigonometria.

Per renderle però più sensibili, e nel tempo stesso più chiare, ho giudicato bene di contrasegnare, o distinguere nelle Figure le cose, che nel triangolo dato si suppongono note, con una *, e le incognite con una †: ponendo ancora quì sul principio la serie di tutte le Proposizioni, affinchè

veggasi in un'occhiata quello, che in qualsivoglia proposizione supponesi conosciuto, ed incognito; e chiaramente ancora appariſca non potervi essere in uno triangolo combinazione alcuna di cose o parti incognite, o conosciute, la quale non sia compresa, o non riducasi ad alcuna delle seguenti Proposizioni.

Nel Triangolo rettangolo, in cui sempre supponesi conosciuto l'angolo retto.

Prop. 1. * a. l. † l.
2. * a. l. † b.
3. * a. b. † l.l.
4. * l. b. † a.a.
5. * l. b. † l.
6. * l. l. † a.a.
7. * l. l. † b.
8. * a.a. † l.l.

Nel Triangolo obliquangolo.

9. * l.l.l. † sb.p.
10. * l.l.l. † a.a.a.
11. * a.a.a. † l.l.l.
12. * l.l.a. † a.a.
13. * l.l.a. † l.
14. * l.l.a. † a.a.
15. * l.l.a. † l.
16. * l.a.a. † l.l.

La lettera l, significa *lato*; la lettera a, significa *angolo*; la lettera b, significa *base*; la lettera sb, significa *segmenti della base*; la lettera p, significa *perpendicolare*.

## PROPOSIZIONI.

### I.

### Del Triangolo Rettangolo.

Fig. 6. *Dato un' angolo* A, *ed un lato* AB *trovare l' altro lato* BC.

Sia l'angolo dato A di gr. 45, 36', il lato AB di piedi 64, e preso l'istesso lato AB come raggio di parti 10000000, si trovi nelle Tavole la tangente dell'angolo dato 45, 36', che sarà di parti 10211664, poi facciasi

come 10000000 a 10211664

così 64 a $65\frac{3546496}{10000000}$

e sarà questo il numero de' piedi contenuti nella tangente, o lato BC.

II.

II.

*Dato un' angolo* A, *ed un lato* AB *trovare la baſe* AC. Fig. 6.

Sia nell'iſteſſa figura 6ª l'angolo dato A di gr. 45, 36, e il lato AB di piedi 64, e trovata la ſecante dell'angolo dato 45, 36', che ſarà 14292588, facciaſi

come 10000000 a 14292588

così 64 a $91\frac{4725632}{10000000}$

e ſarà queſto il numero de' piedi contenuti nella ſecante, o baſe AC.

Ovvero per eſſere in qualſivoglia triangolo rettangolo il quadrato della baſe uguale ai quadrati de' lati preſi inſieme, dopo trovato per l'antecedente il lato BC ſi uniſcano inſieme i quadrati dei lati AB, BC, cioè di 64 e 65, i quali ſono 4096, 4225; e dalla loro ſomma 8321 eſtraggaſi la proſſima radice quadra 91, che eſprimerà il numero de' piedi contenuti nella baſe AC.

Che ſe foſſe dato l'angolo A di gr. 45, 36', ed il lato BC, troviſi l'angolo rimanente C di gr. 44, 24', e preſo come raggio il lato BC, ſi trovi come prima la tangente BA, e la ſeccante CA.

III.

*Dato l'angolo* A, *e la baſe* AC *trovare qualſivoglia lato* AB, *ovvero* BC. Fig. 7.

Sia la baſe AC di piedi 50, e l'angolo dato A di gr. 22. 7', troviſi la ſua ſecante 10794250. e facciaſi

come 10794250 a 10000000

così 50 a $46\frac{3464506}{10794250}$

e ſarà queſto il numero de' piedi contenuti nel lato, o raggio AB.

Ovvero troviſi nelle Tavole a dirimpetto all'angolo dato A di gr. 22. 7' l'angolo di compimento C, che ſarà di gr. 67. 53'; e poſto AC come

me

me raggio trovisi il seno retto dell'angolo 67, 53, che sarà 9264191, poi facciasi

come 10000000 a 9264191

così 50 a $46\frac{3209550}{10000000}$,

e sarà questo il numero de' piedi contenuti nel lato AB.

Per trovare l'altro lato BC pongasi AC come raggio, e trovisi il seno retto dell'angolo dato A 22. 7', che sarà 3764938; poi facciasi

come 10000000 a 3764938

così 50 a $18\frac{8246900}{100000000}$;

che sarà il numero de' piedi contenuti nel lato BC.

Ovvero da 2500 quadrato di 50, cioè della base AC, sottragasi 2116 quadrato di 46, cioè dal primo lato AB; e dal rimanente 384 estraggasi la prossima radice quadra 19, che esprimerà il numero de' piedi contenuti nell'altro lato BC.

## IV.

Fig. 8. *Dato un lato* AB *e la base* AC, *trovare qualsivoglia angolo* A, *ovvero* C.

Sia il lato AB di piedi 36, la base AC di piedi 42. Pongasi AB come raggio, e facciasi

come 36 a 42

così 10000000 a $11666666\frac{24}{36}$,

e sarà la secante AC di parti 11666666, alla quale corrisponde nelle Tavole l'angolo di gr. 31. e però l'angolo A sarà di gr. 31. e l'angolo rimanente C di gr. 59.

Ovvero posto AC come raggio, facciasi

come 42 a 36

così 10000000 a $8571428\frac{24}{42}$,

e sarà il lato, o seno retto AB di parti 8571428, al quale nelle Tavole corrisponde l'angolo di gr. 59; e però l'angolo C sarà di gr. 59, l'angolo rimanente A di gr. 31.

*Da-*

V.

*Dato un lato* AB *e la base* AC, *trovare* Fig. 9.
*l' altro lato* BC.

Sia il lato AB di piedi 25, la base AC di piedi 32; si trovino per la passata gli angoli A, C, per la prima si avrà l'altro lato BC.

Ovvero trovisi il quadrato di 32, cioè della base AC, che sarà 1024; e da questo sottraggasi il quadrato di 25, cioè del lato AB, che sarà 625; e dal rimanente 399 estraggasi la radice quadra 20, che sarà il numero de' piedi contenuti nel lato BC.

Ovvero preso il lato AB come raggio, facciasi

come 25 a 32
così 10000000 a 12800000,

e sarà la seccante AC 12800000, alla quale nelle Tavole corrisponde la tangente 7992425, e però il lato BC sarà di parti 7992425. Facciasi finalmente

come 10000000 a 7992425
così 25 a $19\frac{9810625}{10000000}$,

e sarà questo il numero de' piedi contenuti nel lato BC.

*Dati i due lati* AB, BC, *trovare gli an-* Fig. 10.
*goli* C, A *opposti agli stessi lati*.

Sia il lato AB di piedi 34, e il lato BC di piedi 26; e preso qualsivoglia lato AB come raggio, si faccia

come 34 a 26
così 10000000 a $7647058\frac{28}{34}$,

e sarà la tangente BC di parti 7647058, alla quale corrisponde nelle Tavole l'angolo di gr. 37, 24.[1] e però l'angolo A sarà prossimamente di gr. 37, 24.[1] e l'angolo rimanente C di gr. 52, 36.[1]

VII.

*Dati i due lati* AB, BC, *trovare la base* AC. Fig. 11.

Sia il lato AB di piedi 324, e il lato BC di piedi 135. Si trovino per la passata gli angoli A, C, e per la seconda si avrà la base AC.

Ovvero

Ovvero moltiplicandosi ciascuno de' lati AB, BC, cioè 135, 324, ed uniti insieme i loro quadrati 18225, 104976, dalla loro somma 123201 si estragga la radice quadra 351, che sarà il numero de' piedi contenuti nella base AC.

Ovvero preso AB come raggio facciasi

come —324 a 135
così 10000000 a 4166666,

e sarà la tangente BC di parti 4166666, alla quale nelle Tavole corrisponde la secante 10833081. Finalmente facciasi

come 10000000 a 10833081.
così 324 a $350\frac{29}{100}\frac{18}{1000}\frac{24}{10000}$,

e sarà questo il numero de' piedi contenuti nella secante, o base AC.

## VIII.

Fig.12. *Dati gli angoli* A, C, *trovare la proporzione de' lati loro corrispondenti* BC, AB.

Sia l'angolo A di gr. 28, 16.' e però l'angolo rimanente C di gr. 61, 44.' Trovisi nelle Tavole il seno corrispondente all'angolo 28, 16.' che sarà 4735859; ed il seno corrispondente all'angolo 61, 44.' che sarà 8807530; e però sarà il lato BC al lato AB come 4735759 al 8807530, ovvero prossimamente come 145 a 269.

## De' Triangoli Obliquangoli

## IX.

Fig.13. *Dati i tre lati* AB, BC, CA, *e tirata la perpendicolare* CD *trovare i segmenti* AD, DB, *e la perpendicolare istessa* CD.

In qualsivoglia triangolo la base sta alla somma degli altri due lati, come la differenza degli stessi lati alla differenza de' segmenti dell' istessa base. Pongasi dunque la base AB di piedi 256; il lato BC di piedi 220, e il lato CA di piedi 152, e facciasi

come

come AB cioè 256
alla somma de' lati 372
così la differenza de lati 68
alla differ. de' segmenti $98\frac{208}{256}$

poichè togliendo questa differenza 98 da 128 metà dalla base AB, darà 30 per il segmento minore AD; ed aggiunta all'istessa metà 128 la differenza medesima 98, darà 226 per il segmento maggiore DE. E perchè nel triangolo rettangolo ADC si conosce il lato AD e la base AC, si conoscerà ancora per la 5.ª il rimanente lato, o perpendicolare CD.

Che se la perpendicolare CD cadesse fuori della base AB, sottraggasi dal quarto numero trovato come differenza de' segmenti l'istesso lato AB, e si conoscerà il rimanente segmento AD; e però conoscendosi nel triangolo rettangolo ADC il lato AD e la base AC, si conoscerà ancora il lato rimanente, o perpendicolare CD. Fig.14.

X.

*Dati i tre lati* AB, BC, CA, *conoscere, o trovare gli angoli corrispondenti* C, A, B. Fig.15.

Tirisi dal vortice di qualsivoglia angolo C la perpendicolare CD; e per la passata si trovino i segmenti AD, DB, e la perpendicolare CD: poichè conoscendosi ne' triangoli rettangoli ADC, BDC tutti i tre lati, si conosceranno ancora gli angoli A, B, e tutto ancora l'intero angolo C.

XI.

*Dati gli angoli, conoscere, o ritrovare la proporzione de' lati loro corrispondenti.* Fig.16.

I lati sono fra loro come i seni degli angoli corrispondenti agli istessi lati; e però conoscendosi gli angoli, e ritrovandosi nelle Tavole i loro seni, quell'istessa proporzione, che sarà fra quei seni, sarà ancora fra' lati del triangolo dato.

XII.

*Dati due lati* AB, AC, *e l'angolo* A, *ch'essi contengono, trovare gli altri due angoli* B, C. Fig.17.

Dal

Dal vertice, o punta di uno degli angoli incogniti tirisi sovra del lato conosciuto la perpendicolare CD; e perchè nel triangolo rettangolo ACD si conosce il lato, o base AC, e l'angolo A, si conoscerà per la 3.ª e 4.ª anche la perpendicolare CD, l'angolo ACD, ed il lato AD; onde si conoscerà ancora l'altro lato DB: e perciò nel triangolo rettangolo CDB si conosceranno i due lati CD, DB; onde si conosceranno ancora l'angolo, B, e l'angolo DCB; il quale aggiunto all' angolo ACD già conosciuto, si conoscerà l'angolo intero ACB, ovvero C.

Ovvero. Sia il lato AB di piedi 256, il lato AC di piedi 152, l'angolo A di gr. 70, e sarà la somma degli angoli rimanenti C, B di gr. 110. e la metà di questa somma gr. 55, al qual' angolo 55 corrisponde nelle Tavole la tangente 14271480. Ora facciasi

come

la somma de' lati AB, AC, cioè piedi 408
alla loro differenza, cioè piedi 104

così

la tangente trovata, cioè 14281480
ad un quarto numero 3640377,

che sarà la tangente dell'angolo, il quale sia la metà della differenza degli angoli incogniti B, C; e perchè a questa tangente 3640377 corrisponde nelle Tavole l'angolo 20, la differenza degli angoli B, C sarà di gr. 40, la quale differenza aggiunta alla metà della somma degli angoli B, C, cioè a 55, darà l'angolo maggiore C di gr. 95; e tolta dall' istessa metà 55, darà l'angolo minore B di gr. 15.

## XIII.

Fig. 18. *Dati i due lati* AB, AC, *e l'angolo* A *da quelli contenuto trovare il terzo lato* CB.

Si trovino per la passata gli angoli C, B, e per la 11.ª si avrà il lato rimanente CB.

Ovvero tirisi la perpendicolare CD; e perchè nel triangolo rettangolo ACD si conosce la base AC, e l'angolo A, si conoscerà per la 3.ª ancora

ra il lato perpendicolare CD, ed il lato AD; e in conseguenza si conoscerà ancora il lato rimanente DB; onde nel triangolo rettangolo CDE conosciuti i lati CD, DE si conoscerà anche il lato, o base CB.

## XIV.

*Dati i due lati* AC, CB *ed un' angolo* A, *non compreso o contenuto da quelli, trovare l' altro angolo* B, *o* C. Fig. 19.

Sia il lato AC di piedi 12, il lato CB di piedi 8, l'angolo A di gr. 35. si trovi il seno dall' angolo 35, che sarà 5735764, poi facciasi

come
il lato CB di piedi 8
al seno dell'angolo A 5735764.
così
il lato AC di piedi 12
al seno dell'angolo B 8603646;

al qual seno corrisponde nella Tavola l'angolo di gr. 59 22.' onde l'angolo B sarà di gr. 59. 22'. e l'angolo rimanente C di gr. 85. 38.'

Che se l'angolo B fosse ottuso, cioè maggiore di gradi 90, allora l'angolo ritrovato nelle Tavole, e corrispondente al seno 8603646 dovrebbesi sottrarre da 180, e l'angolo rimanente sarebbe l'angolo ricercato B; e però similmente si troverebbe come prima l'angolo rimanente C. Fig. 20.

Ovvero, tirata dal punto C, dove concorrono i lati conosciuti, la perpendicolare CD, si conoscerà nel triangolo rettangolo ACD la base AC, e l'angolo A; e però per la 3.a si conosceranno ancora i lati AD, DC, e l'angolo ACD. Similmente ancora conoscendosi nel triangolo rettangolo CDB la base CB, e il lato CD, si conosceranno ancora il lato BD, l'angolo BCD, e l'angolo DBC, dal che facilmente si può conoscere l'angolo ABC, e ACB.

## XV.

*Dati i due lati* AC, CB, *e l'istesso angolo* A *non contenuto da quelli, conoscere il terzo lato* AB. Fig. 19. 20.

Essen-

Essendosi conosciuti per la passata gli angoli C, B, si potrà facilmente conoscere per la 13.ª anche il lato AB. Ovvero, essendosi conosciuti i due segmenti AD, DB, si conoscerà ancora l'intero lato AB.

## XVI.

Fig.21. *Dato un lato* AE, *e due angoli* A, C *trovare qualsivoglia lato* AC, *ovvero* BC.

Sia il lato AB di piedi 152, l'angolo A di gr. 75, l'angolo C di gr. 70. Si ritrovi il seno dell'angolo A, che è 9659258, ed il seno dell'angolo C, che è 9396926, e poi facciasi

come

il seno dell'angolo C 9396926

al suo lato opposto AB di piedi 152,

così

il seno dell'Angolo A 9659258

al suo lato opposto BC di piedi $146\frac{2286760}{9396926}$

e nell'istessa maniera, che si è ritrovato il lato BC, potrebbesi ritrovare il lato AC; siccome dall'essere conosciuti i due lati AB, BC, e gli angoli A, C, si può per la 13.ª conoscere il lato rimanente AC.

Fig.22. Che se un'angolo dato C fosse ottuso, per esempio di gr. 110, si dovrebbe questo sottrarre da 180, e resterebbe l'angolo BCE di gradi 70, ed il seno corrispondente all'angolo di gr. 70, o all'angolo BCE, è l'istesso che il seno corrispondente all'angolo di gr. 110; onde per trovare il seno dell'angolo ottuso C di gr. 110, basta trovare il seno dell'angolo rimanente BCE di gr. 70, che sarà come sopra 9396926.

Devesi finalmente osservare, che supponendo note le parti del triangolo espresse in qualsivoglia delle ultime sette Proposizioni, si può facilmente ancora trovare la perpendicolare tirata da qualsivoglia angolo sopra del lato opposto. Poichè supponendosi conosciuti, ovvero conoscendosi per le passate 7 Proposizioni i lati e gli angoli del triangolo, si potrà per la 9.ª conoscere la perpendicolare ancora.

DELLA

# DELLA GEOMETRIA PRATICA.

# LIBRO III.

## *Il quale contiene la descrizione delle Linee, e Figure.*

L'Utilità grandissima ed estensione insieme della Geometria Pratica mirabilmente apparisce dall' incredibile varietà di quelle grandezze, figure, o corpi, ch' ella considera, le più frequenti e più necessarie delle quali si debbono poi misurare nel IV. libro che segue. A rendere però più sensibili, e nel tempo stesso più facili quelle operazioni, o misure sarà necessario il dimostrare prima la maniera con cui si formino, o si descrivano le grandezze istesse, che si farà nelle varie Proposizioni di questo libro. La serie e l'ordine loro non poteva essere per avventura o più naturale, o più chiaro: giacchè mi è stato a cuore di cominciare dalle operazioni più semplici, per poi passare di grado in grado alle più composte; unendo però sempre insieme quelle operazioni, che fossero fra loro simili; nè prescrivendo giammai operazione alcuna, la quale non sia stata prima già dimostrata, come potrà facilmente conoscersi dall'ordine istesso delle Proposizioni. Ho finalmente giudicato bene raccogliere ed esporre qui tutte insieme le varie definizioni, le quali appartengono al presente libro, ed a quello ancora che segue; affinchè veggasi in un' occhiata la varietà delle grandezze, che poi si dovranno o descrivere, o misurare.

# DEFINIZIONI.

I.

LA *linea* è una lunghezza senza larghezza, o grossezza alcuna.

II.

La linea *retta* è la più breve di tutte quelle, che si possono tirare da un punto a un'altro.

III.

L' *angolo* è l'inclinazione di due linee rette, le quali, non essendo poste per diritto, s' incontrano; e prolungate si segano in un punto, il quale dicesi *punta*, *cima*, o *vertice* dell' angolo istesso.

IV.

Fig. 3. e 4. Se cadendo una linea retta sopra di un' altra, sia egualmente inclinata tanto verso dell' una, che verso dell'altra parte, e però faccia gli angoli accanto fra loro uguali; gli angoli si dicono *retti*, e la linea si dice essere perpendicolare a quella, sopra cui cade.

V.

Fig. 8. Che se la linea cadesse obliquamente sopra dell'altra, e però facesse gli angoli disuguali; il maggiore di quelli chiamasi *ottuso*, ed il minore dicesi *acuto*.

VI.

Fig. 16. e 17. Linee *parallele*, o *equidistanti* si dicono quelle, che sono sempre ugualmente distanti fra loro, e questa *distanza* loro è misurata dalle perpendicolari, le quali si tirino da qualsivoglia punto di una linea sopra dell'altra.

VII.

Fig. 27. La linea si dice essere divisa *in estrema, e media ragione*, quando l'intera linea sta alla sua parte maggiore, come l' istessa parte maggiore sta alla minore.

La

VIII.

La *superficie* è una lunghezza insieme, e larghezza, o profondità.

IX.

Superficie *retta*, o *piana* dicesi quella, nella quale si possono tirare per qualsivoglia parte linee rette.

X.

La figura è una superficie chiusa, o compresa da una, o da più linee come da termini; ed il *perimetro*, o *contorno* della figura sono tutti gli stessi termini, o linee, che la circondano, prese insieme.

XI.

Il *triangolo* è una figura composta di tre lati, Fig. 55.
o linee rette, che concorrono, o si congiungono insieme.

XII.

Due linee del triangolo si chiamano *lati*, e la terza, sopra cui posa, chiamasi *base*.

XIII.

Se tutte le tre linee del triangolo sieno fra lo- Fig. 44.
ro uguali, il triangolo dicesi *equilatero*; se due 35. 40.
sole *iscocele*, o *equicrure*; se tutte tre sieno disuguali, *scaleno*.

XIV.

Se il triangolo contenga un'angolo retto, di- Fig. 6.
cesi *rettangolo*; se un'angolo ottuso, *ottusiangolo*; se tutti tre gli angoli sieno acuti, *acutiangolo*.

XV.

Il *parallelogrammo* è una figura composta di Fig. 76.
linee parallele, ovvero in cui i lati opposti sono 78. 86.
paralleli.

XVI.

L'altezza de' parallelogrammi è la perpendico- Fig. 78.
lare, che da qualsivoglia punto di un lato tirasi sopra il lato opposto, che si considera come base.

XVII.

Fig.79. Siccome l'altezza de' triangoli è la perpendicolare, che si tira sopra la base dalla cima, o vertice dall'angolo opposto all'istessa base.

XVIII.

Fig.76. Il rettangolo è quella figura, o parallelogrammo, che oltre all'avere i lati opposti paralleli, ha ancora tutti i quattro angoli retti ed uguali.

XIX.

Fig.45. E se tutti i quattro lati sieno frà loro uguali, e tutti gli angoli sieno retti, la figura sarà *quadrato*.

XX.

Fig.78. e 80. Che se abbia bensì i lati, ma non gli angoli uguali, dicesi *rombo*; e se gli angoli e i lati sieno disuguali, *romboide*.

XXI.

Fig.47. Tutte le altre figure quadrilatere, nelle quali i lati opposti non sieno paralleli ed uguali, si chiamano *trapezj*.

XXII.

Fig.64. 48. E generalmente la figura composta di qualsivoglia numero di lati dicesi *rettilineo*, *figura*, o *poligono*.

XXIII.

Fig.84. 85.86. 86. Figure, poligoni, o rettilinei *simili* sono quelli, che sono composti di egual numero di lati e angoli; sicchè ciascun'angolo di uno sia uguale all'angolo corrispondente dell'altro, ed intorno agli angoli uguali sieno i lati proporzionali.

XXIV.

Fig.44. 45.46. 48.49. Figura, o poligono *regolare* dicesi quello, nel quale tutti gli angoli, e tutti i lati sono fra loro uguali.

XXV.

Fig.30. e 49. Questi poligoni pigliano il loro nome dal numero de' loro lati, come *triangolo* dicesi quello di tre; *quadrato* di quattro; *pentagono* di cinque; *esagono* di sei, *decagono* di dieci lati ec.

Po-

XXVI.

Poligoni *regolari simili* sono quelli, che hanno ugual numero di lati, ovvero l'istesso nome.

XXVII.

Il *circolo* è una figura compresa da una sola linea curva, che chiamasi *circonferenza*; ciascun punto della quale è sempre egualmente lontano da un punto preso dentro dal circolo, il quale chiamasi *centro*. Fig. 30 e 49.

XXVIII.

Le linee rette fra loro uguali, che si tirano dal centro alla circonferenza diconsi, *raggi*; qualsivoglia parte della circonferenza tagliata da' raggi, chiamasi *arco*.

XXIX.

La linea retta, che tirata per il centro arriva dall'una e dall'altra parte alla circonferenza, dicesi *diametro*; il quale divide il circolo in due parti uguali, che si chiamano *semicircoli*. Fig. 30.

XXX.

Che se la retta non passasse pel centro, dicesi *corda*, e le parti disuguali del circolo da lei divise chiamansi *porzioni*, o *segmenti*.

XXXI.

*Settore* del circolo è una porzione di circolo compresa da due raggi, e da un arco tagliato, o compreso dagli stessi raggi. Fig. 98.

XXXII.

Settori *simili* diconsi quelli, che comprendono angoli uguali, e però sono parti simili de' loro circoli interi. Fig. 98. 100.

XXXIII.

*Ellisse, o figura ovale* dicesi quella, che è compresa da una linea curva a similitudine del circolo, ma di lunghezza maggiore della larghezza. La proprietà di questa figura si è, che qualsivoglia rettangolo di AE in EB sta al quadrato corrispondente di ED, come il rettangolo di AL in IB sta al quadrato corrispondente di LK; e pe- Fig. 62.

rò facendo come uno di que' rettangoli al ſuo quadrato corriſpondente, così la retta AB alla retta AH, ſarà qualſivoglia altro rettangolo al ſuo quadrato corriſpondente come l' iſteſſa AB ad AH.

XXXIV.

Fig.62. Il punto E diceſi *centro* dell' eliſſe; la retta AB *aſſe maggiore*; la retta CD *aſſe minore*; la retta AH *parametro*, o *lato retto*; ſiccome qualſivoglia retta OQ, che paſſa per il centro, chiamaſi *diametro*.

XXXV.

Fig.64. *Parabola* è una figura compreſa da una linea curva, e da una linea retta come baſe. La proprietà della parabola ſi è, che il quadrato di qualſivoglia retta CO ſta al quadrato di qualſivoglia altra retta parallela RS come l' altezza CD all' altezza DR; e però facendoſi come DC a CO così CO a DP, ſarà ſempre il rettangolo di CD in DP uguale al quadrato di CO, ed il quadrato di RS uguale al retttangolo di RD in DP.

XXXVI.

La retta DC, che ſega ad angoli retti tutte le ordinate CO, RS, diceſi *aſſe*; la retta LM parallela all' aſſe diceſi *diametro*; la retta DP *parametro*, o *lato retto* della parabola.

XXXVII.

Fig.75. e 71. *Iperbola* è una figura compreſa da una linea curva, e da linea retta come baſe. La proprietà ſua ſi è, che prolungato l' aſſe DC fino in *F*, ſempre il rettangolo di FC in CD ſta al quadrato corriſpondente di CB, come il rettangolo di FO in OD al quadrato di ON; e però facendo come un rettangolo al ſuo quadrato corriſpondente così la retta FD alla retta DP, ſarà ſempre qualſivoglia rettangolo al ſuo quadrato come FD a DP.

XXXVIII.

La retta FD diceſi *lato traſverſo*, e la retta

DP

DP *lato retto*, o *parametro* dell' iperbola; ed il punto X, nel quale dividesi in mezzo il lato trasverso, chiamasi *centro*; e qualsivoglia retta M L, tirata per il centro, dicesi *diametro*.

XXXIX.

*Solido*, o *corpo* dicesi quello, che ha tre dimensioni, lunghezza, e profondità. Tavole del Libro IV.

XL.

Il *Prisma* è un solido, nel quale i piani, o facce opposte sono parallele ed uguali; ma gli altri piani, che lo circondano sono parallelogrammi. Fig. 25. 27. 30. Fig. 25.

XLI.

Che se tutti i piani sieno parallelogrammi, chiamasi *parallelepipedo*. Fig. 26.

XLII.

E se tutti i sei piani sieno quadrati uguali, chiamasi *cubo*.

XLIII.

*Piramide* è un solido contenuto da tre almeno, o più triangoli, che posano sopra i lati di un poligono come base, e concorrono in un punto, che chiamasi *cima*, *punta*, o *vertice* della piramide. Fig. 27. 28.

XLIV.

L'altezza della piramide è la perpendicolare tirata dal vertice sopra la base; siccome altresì l' altezza del prisma è la perpendicolare tirata da qualsivoglia punto di un piano sopra del piano opposto considerato come base. Fig. 26. 27. 28.

XLV.

Il *cilindro*, o colonna è un solido contenuto da due circoli uguali e paralleli, e da una superficie curva cilindrica descritta da una linea retta, che movasi radendo le circonferenze de' circoli opposti. Fig. 30.

XLVI.

La retta K I, che congiugne i centri de' circoli opposti, chiamasi asse; e se egli sia perpendicola- Fig. 30.

lare sopra della base, il cilindro dicesi *retto*; e se egli è inclinato, il cilindro dicesi *obliquo*.

XLVII.

Fig.33. Il *cono* è un solido compreso da un circolo come base, e dalla superficie curva, che si produce da una retta, che rivolgendosi intorno al punto immobile I, il quale chiamasi *cima*, *punta*, o *vertice* del cono, rade la circonferenza intera della base.

XLVIII.

La retta IK tirata dal vertice al centro della base dicesi *asse*; e se egli è perpendicolare sopra la base, il cono dicesi *retto*; e se egli è inclinato, il cono dicesi *obliquo*.

XLIX.

Fig.35. La *sfera* o *palla* è un solido generato dalla revoluzione del circolo intorno al suo diametro DB.

L.

*Settore sferico* è il solido generato dalla rivoluzione del settore di circolo AFC intorno al raggio FB.

LI.

*Segmento*, o *porzione di sfera* è quella, che risulta dal tagliarsi la sfera per traverso; e se le porzioni sieno fra loro uguali, si chiamano *emisferi*.

LII.

Fig.38. *Sferoide* è il solido generato dalla rivoluzione dell' elissi intorno al proprio asse AC, ovvero BD.

LIII.

Fig.47. *Conoide parabolico* è il solido generato dalla rivoluzione della parabola AEC intorno al proprio asse EF.

LIV.

Fig.42. *Conoide iperbolico* è il solido generato dalla rivoluzione dell' iperbola AEC intorno al suo asse EG.

LV.

L V.

*Porzioni*, *tronchi*, o *segmenti* di sferoidi, o conoidi sono le parti delle sferoidi, e conoidi tagliati da' piani trasversi.

## PROPOSIZIONI.

I.

*FRA due punti dati* A, B *trovare altri due punti, i quali sieno posti in diritto, o nell' istessa linea retta co' punti dati.* Fig. 1. *Dalla* 1. *e* 10. *del III.*

Co' centri A, B, e con qualsivoglia raggio, o intervallo descrivansi gli archi CD, EF, i quali si seghino ne' punti G, H; indi fattosi centro in G, H coll' istesso intervallo si descrivano gli archi IK, LM, che si interseghino ne' punti N, O, i quali saranno per diritto, o nell' istessa retta co' punti dati A, B; e però le rette AN, NO, OB formeranno una istessa linea retta AB.

II.

*Dividere in mezzo la data retta linea* AB. Fig. 2. 1. *III.*

Col centro A, e qualsivoglia intervallo si descriva l'arco CD, e coll' istesso intervallo, e centro B descrivasi l'arco EF, e da' punti G, H, ne' quali si segano gli archi descritti, si tiri la retta GH, la quale dividerà in mezzo la data linea retta AB nel punto I.

Ovvero descritti, co' centri A, B, gli archi, i quali si seghino nel punto H cogli stessi centri A, B, e qualsivoglia intervallo maggiore, o minore del primo si descrivano due altri archi, i quali si seghino nel punto G, e tirisi per i punti G, H la retta HI. Fig. 3. *dalla* 12. *e* 13. *III.*

III.

*Sopra la data retta linea* AB *dal punto* C *dato in essa alzare la perpendicolare.* Fig. 4. 2. *III.*

Si

Si piglino intorno al punto C le parti uguali CD, CE, e col centro D, e qualsivoglia intervallo, maggiore però della parte DC, descrivasi l'arco GF; e coll'istesso intervallo e centro E descrivasi l'arco HI; e dal punto K, nel quale gli archi si segano, tirisi al punto C la retta KC, che sarà perpendicolare sopra l'AB.

## IV.

Fig. 5. dalla 8. V. *Sopra la data retta* A C *alzare la perpendicolare dal punto* C, *che sia nell'estremità dell'istessa retta* A C.

Preso qualsivoglia punto B come centro, coll'intervallo BC descrivasi il circolo DCE, che seghi la data retta AC nel punto G, e tirisi per G, B il diametro, che prolungato seghi l'istesso circolo in F; poichè tirata la FC sarà questa perpendicolare sopra la retta AC.

Fig. 6. dalla 9. V. Ovvero presa qualsivoglia parte CG, co' centri C, G e l'istesso intervallo GC si descrivano due archi, i quali si seghino nel punto B, e prolungata la GB, e presa BF uguale a BC, si tiri la FC, che sarà perpendicolare sopra la AC.

Fig. 7. dalla 9. V. Ovvero col centro C, e qualsivoglia intervallo CB descrivasi il circolo BM; e coll'istesso intervallo dal centro B descrivasi l'arco CE; e dal punto F, dove gli archi si segano, e coll'istesso intervallo si descriva l'arco GH; e dal punto D, in cui si segano gli archi, descrivasi l'arco IK; e finalmente dal punto L, nel quale gli archi si segano, tirisi la retta LC, che sarà perpendicolare sopra la AC.

Ovvero si prolunghi la AC, e sopra l'istessa così prolungata si operi come nella passata Proposizione.

## V.

dalla 13. III. e 12. IV. *Alzare la perpendicolare sopra la punta dell'angolo dato* A B C.

Si taglino le parti uguali BD, BE, e con i

Fig. 8. cen-

centri D, E e qualsivoglia intervallo si descrivano due archi, i quali si seghino nel punto F, dal quale tirisi la retta FB.

Ovvero dividasi in mezzo la retta DE nel punto G, dal quale tirisi per il punto B la retta GF.

## VI.

*Tirare una perpendicolare sopra la data retta* AB *da un punto* C *dato fuori di essa.* Fig. 9. 31. III.

Dal punto C a qualsivoglia punto D preso nella retta AB tirisi la retta CD; e se ella non è perpendicolare sopra l'AB, col centro C ed intervallo CD descrivasi il cerchio EDF, il quale seghi la data retta nel punto G; indi facendosi centro in D coll'istesso intervallo DC descrivasi l'arco CH; e col centro G ed intervallo istesso DC descrivasi l'arco CI; e dal punto K, nel quale gli archi si segano, tirisi la CK, che sarà perpendicolare sopra la retta AB.

Ovvero dopo descritto il circolo EDGF, fattosi centro in D, G con qualsivoglia altro intervallo si descrivano gli archi HI, KL; e dal punto O, nel quale si segano, tirisi per il punto C la retta OL, che sarà perpendicolare sopra l'AB. Fig. 10. dalla 12., e 13. III.

## VII.

*Dividere in mezzo l'angolo rettilineo dato* ABC. 20. III. Fig. 11.

Col centro B e qualsivoglia intervallo descrivasi l'arco DE; indi co'centri D, E e qualsivoglia intervallo descrivansi due archi, i quali si seghino nel punto F, dal quale tirisi la retta FB che dividerà in mezzo l'angolo dato ABC.

Ovvero descritto l'arco DE tirisi la retta DE, e dividendola in mezzo nel punto G si tiri la retta GB.

## VIII.

*Dividere in mezzo l'arco dato* DE. 13. V.

Di- Fig. 11.

Dividasi in mezzo l'angolo dato DBE, colla retta BH.

Fig.12. Ovvero divisa in mezzo la retta DE si alzi la perpendicolare GH, la quale dividerà in mezzo l'arco dato DE.

## IX.

21. III. Fig.13 e 14. *Nel dato punto* A *della retta* AB *formare un' angolo uguale all' angolo dato* CDE.

Col centro D e qualsivoglia intervallo DF descrivasi l'arco FG; e col centro A e l'istesso intervallo descrivasi l'arco HI, dal quale tagliato l'arco HK uguale all'arco FG si tiri la retta AK, che sarà l'angolo HAK uguale all'angolo dato CDE.

## X.

4. IV. Fig.15 *Per il dato punto* A *tirare una linea retta parallela alla data retta* BC.

Tirisi a qualsivoglia punto D preso nella retta BC la retta obliqua AD, e con questa come intervallo, e col centro D descrivasi l'arco AE; e coll'istesso intervallo DA col centro A descrivasi l'arco DF, dal quale si tagli l'arco DG uguale all'arco AE; e per i punti A, G tirisi, e si prolunghi la retta GA, che sarà parallela alla data retta BC.

Fig.16. Ovvero dal punto A tirisi sopra la retta BC *dalla* la perpendicolare AD; e sopra AD si alzi, e si 1. IV. prolunghi la perpendicolare EF.

Fig.17. Ovvero col centro A descrivasi l'arco DE, *dalla* che tocchi, o rada la retta BC nel punto F; e 16. V. coll'istesso intervallo da qualsivoglia punto G co- 2. IV. me centro descrivasi l'arco HI; e per il punto A si tiri la retta AK, la quale tocchi, o rada l'arco HI nel punto L, e sarà l'AK parallela a BC.

Fig.18. Ovvero preso qualsivoglia punto D come centro, descrivasi coll' intervallo DC il semicircolo CAB;

CAB; e preso l'arco BE uguale all'arco AC tirisi la retta AE.

## XI.

*Dividere una linea retta data* AB *in quante parti si voglia, per esempio* 5; *fra loro uguali.* dalla 2. VII. e 27. VI. Fig. 19.

Dal punto A si tiri qualsivoglia retta AC, ed in essa si piglino col compasso 5. parti uguali AD, DE, EF, FG, GH, e per il punto B tirata la BI parallela ad AC, in questa ancora si piglino 5 parti uguali alle parti prese nella retta AC, che sieno BK, KL, LM, MN, NO; e da punti D, N, E, M, F, L, G, K si tirino le rette DN, EM, FL, GK, le quali divideranno in 5 parti uguali la data retta AB.

## XII.

*Tagliare dalla data retta* AB *una parte richiesta, per esempio una terza.* 30. VI. Fig. 20.

Tirisi qualsivoglia retta BC dal punto B, e si prendano in quella 3 parti uguali BD, DE, EF; e congiunta AF si tiri ad essa per il punto D la parallela DG; e sarà la retta BG la terza parte dell'intera retta AB.

## XIII.

*Tagliare, o dividere la data retta* AB *nell'istessa ragione, o proporzione, in cui è divisa la retta* BF *nel punto* D. 29. VI. Fig. 20.

Si congiunga AF, e per il punto D si tiri la DG parallela ad FA; e sarà la AB a BG come FB a BD.

## XIV.

*Date due linee rette* AB, BC, *trovare la terza loro proporzionale.* 31. VI. Fig. 21. e 22.

Pongasi la retta EF uguale all'AB, e la FG uguale alla BC, e la retta ancora EH uguale alla stessa FG, ovvero BC; poi congiunta la FH si tiri ad essa per il punto G la parallela GI, e sarà

sarà la HI terza proporzionale dopo le rette AB, BC.

## XV.

3v. VI. Fig. 21. e 22. *Date tre linee rette* AB, BC, CD, *trovare la quarta loro proporzionale.*

Pongasi la retta EF uguale ad AB, la retta FG uguale a BC, la retta EH uguale a CD; e congiunta la FH, si tiri ad essa per il punto G la parallela GI, e sarà la retta HI quarta proporzionale dopo le rette AB, BC, CD.

## XVI.

17. VII. Fig. 23. *Fra due linee rette date* AB, BC *trovare la media proporzionale.*

Si pongano per diritto, quando non fossero, le date due rette, sicchè formino una retta AC, sopra la quale come diametro descrivasi il semicircolo ADC, e dal punto B si alzi la perpendicolare BE, che sarà media proporzionale fra le due rette AB, BC.

## XVII.

Fig. 24. *Fra le due linee rette date* AB, AC *trovare due medie proporzionali.*

Dividasi in mezzo la retta maggiore AB nel punto E, dal quale come centro descrivasi il semicircolo AIB; e posta la AC applicata al circolo si compisca il parallelogrammo ACDB; dal centro E tirisi la retta EG in maniera tale che la parte EG sia uguale ad EF, ovvero la parte HG sia uguale ad HD, e saranno le due rette CG, BF medie proporzionali fra le due rette date AB, AC.

Fig. 26. Ovvero posta la AD uguale alla metà di AC si alzi la perpendicolare, e posta la retta BE uguale ad AB si tiri la EF, che sia uguale ad EA; e tirata la BF gli si tiri dal punto A la parallela AG; e finalmente dal punto F si tiri la retta FH, sicchè la parte FG sia uguale ad AH,

e sa-

e saranno le due rette FG, GH medie proporzionali fra le due rette date AB, AC.

Ovvero si formi colle due rette date BA, AC il rettangolo BACG, intorno al quale descrivasi il circolo; e prolungata la retta AC si pigli AD uguale alla metà di AC; e tirata la DE parallela ad AB si inclini la retta AF uguale alla metà di AB. Poi si pigli un filo FE sesquialtero di AB, cioè di lunghezza uguale alle due rette insieme FA, AB; e facendo scorrere la cruna di un ago inserita nel filo per la retta AC, tenendo sempre tesa e parallela ad AB la porzione del filo, finchè il nodo o estremità dell' istesso filo E arrivi a segare la circonferenza del circolo nel punto H, per il quale tirata la retta HK parallella a DI, saranno le due rette HL, LB medie proporzionali fra le due rette date BA, AC. Fig. 26.

## XVIII.

*Dividere la data retta linea* AB *in estrema, e media proporzione, ficchè tutta l'* AB *sia alla parte maggiore* AI *come l'istessa parte maggiore* AI *alla minore* IB. 30. VII. Fig. 27.

Si tiri sopra la AB la perpendicolare CD, e presa l'AE uguale alla metà di AB col centro E, ed intervallo EB, si descriva l'arco BF, il quale seghi la retta CD nel punto G; e col centro A, ed intervallo AG descrivasi l'arco GH, il quale segherà la data retta AB in estrema, e media ragione nel punto I.

## XIX.

*Data una retta* AB *prolungarla finchè tutta l'intera retta* AC *sia divisa in estrema, e media ragione nel punto* C. *dalla* 29. e 32. VI. Fig. 28.

Tirisi dal punto A qualsivoglia retta AD, che poi dividasi in estrema, e media ragione nel punto E, e congiunta la EB gli si tiri per il punto

D la

D la parallela DC, poichè sarà divisa la retta AC in estrema, e media proporzionale nel punto B.

## XX.

dalla 27. VI. Fig. 29. *Dato l'angolo* BAC, *tirare una linea per il dato punto* D, *la quale resti divisa in mezzo nel punto* D.

Tirisi per il punto D la retta DE parallela ad AB, e presa EF uguale ad AE si tiri per i punti F, D la retta FG, che sarà divisa in mezzo nel punto D.

## XXI.

*Trovare il centro del dato circolo.* ABC.

3. V. Fig. 30. Si tiri qualsivoglia corda DE, e dividasi in mezzo nel punto F, per il quale si alzi, e si produnghi la perpendicolare AFG, che si divida in mezzo nel punto H, e sarà questo il centro del dato circolo.

Fig. 31. Ovvero presi nella circonferenza tre punti A, B, C, e fattosi centro in A, B, coll'istesso intervallo AB si descrivano due archi, e per i punti D, E, ne'quali si segano, si tiri la retta DF. Similmente fattosi centro in B, C, coll'istesso intervallo BC si descrivano due archi; e per i punti H, G, ne'quali si segano, si tiri la retta GI, ed il punto K, nel quale si segano le due rette DF, GI, sarà il centro del circolo dato.

## XXII.

15. V. Fig. 32. *Al dato circolo* ABC *tirare la tangente per il dato punto* D; *ovvero tirare una retta, che tocchi il dato circolo* ABC *nel dato punto* D.

Tirisi dal dato punto D al centro del circolo il raggio DE, e sopra quello si tiri ad angoli retti la perpendicolare FG, che sarà tangente del circolo nel punto D.

XXIII.

## XXIII.

*Al dato circolo* A B C *tirare la tangente dal punto* D *dato fuori del circolo.* 17. V. Fig. 33.

Tirisi dal punto dato D al centro del circolo la retta DE, sopra la quale descrivasi un semicircolo, che seghi il circolo dato nel punto F; e tirisi la retta DF, la quale toccherà il circolo dato nel punto F.

## XXIV.

*Per tre punti dati* A, B, C *non posti per diritto, o dentro una linea retta descrivere un circolo.* 5. V. Fig. 31.

Facciasi l'istessa operazione della Fig. 31, e poi fattosi centro in K, e circonferenza in A, descrivasi il circolo, che passerà per tutti i tre punti A, B, C.

Ovvero tirate le rette AB, BC si dividano queste in mezzo ne'punti D, E, per i quali si alzino le perpendicolari DF, FG, che prolungate si seghino nel punto I, che sarà il centro del circolo, il quale passi per A, B, C. Fig. 34.

## XXV.

*Intorno al triangolo dato* A B C *descrivere un circolo.* 23. V. Fig. 34.

Dividasi in mezzo i lati AB, BC ne'punti D, E, si alzino da questi le perpendicolari, le quali si seghino nel punto I; e sarà questo il centro del circolo, che passerà per i punti A, B, C; e però sarà descritto intorno al triangolo dato.

## XXVI.

*Dato l'arco* A B C *compire il circolo,* 6. V. Fig. 34.

Preso nell'arco qualsivoglia punto B, si tirino le rette AB, BC, sopra le quali divise in mezzo ne'punti D, E si alzino le perpendicolari DF; EG; ed il punto I, nel quale si segano, sarà il centro dell'arco AB, o dell'intero suo circolo.

## XXVII.

21. *V.* *Descrivere nel dato circolo un triangolo equi-*
Fig. 35. *angolo al triangolo dato* ABC.
e 36. Tirisi a qualsivoglia punto della circonferenza D la tangente EF, e nel punto D si faccia l'angolo EDG uguale all'angolo CAB, e l'angolo FDH uguale all'angolo ACB; e tirata la retta GH, sarà il triangolo DGH equiangolo al triangolo dato ABC.

## XXVIII.

22. *V.* *Descrivere intorno al dato circolo un trian-*
Fig. 37. *golo equiangolo al triangolo dato* ABC.
e 38. Si prolunghi il lato AC in DE, ed al centro F si faccia l'angolo GFH uguale all'angolo DAB, e l'angolo GFI uguale all'angolo ECB; e si tirino per i punti G, H, I le tangenti del circolo, le quali si segheranno, o concorreranno insieme ne' punti K, L, M; e sarà il triangolo KLM equiangolo al triangolo dato ABC.

## XXIX.

24. *V.* *Nel dato triangolo* ABC *descrivere un cir-*
Fig. 39. *colo*,

Si dividano in mezzo gli angoli CAB, ACB con le rette AD, CE; e dal punto F, nel quale queste si segano, si tirino sopra i tre lati del triangolo le perpendicolari FG, FH, FL; e fattosi centro in F coll'intervallo FG si descriva il circolo, che passerà per i punti H, I, ovvero toccherà tutti i lati del triangolo, e però sarà descritto dentro di quello.

## XXX.

*dalla* *Descrivere sopra la data retta* AB *un tri-*
13. III. *angolo, ed equilatero al triangolo dato* CDE.
Fig. 40. Pongasi la retta FG uguale ad EC, e col cen-
e 24. tro F ed intervallo uguale a CD descrivasi l'arco HI; similmente ancora col centro G ed intervallo uguale a DE descrivasi l'arco KL; e dal punto M, dove gli archi si segano, si tirino

le

le rette FM, GM; e saranno, i lati del triango-
FMG uguali ai lati del triangolo dato CDE;
siccome anche gli angoli uguali agli angoli.

XXXI.

*Nell'istessa maniera si potrà formare un tri-* Figg.
*angolo delle tre linee rette date* EC, CD, e 41.
DE; purchè due di quelle prese in qual-
sivoglia maniera sieno maggiori della rima-
nente.

XXXII.

*Sopra la data retta* AB *descrivere un tri-* Fig.43.
*angolo simile, ovvero equiangolo al triangolo dato* CDE.

Nel punto A formisi l'angolo BAF uguale all'angolo ECD, ed al punto B l'angolo ABG uguale all'angolo CED; e sarà il triangolo AIB simile o equiangolo al triangolo dato CDE.

Ovvero presa la AL uguale alla CE, e fat- *dalla*
tosi il triangolo AML uguale al triangolo CDE, 2.*VII.*
tirisi la BG parallela ad LM, e sarà il triangolo AIB simile al triangolo CDE.

XXXIII.

*Sopra la data linea retta* AB *descrivere il* Fig.44.
*triangolo equilatero.*

Fattosi centro in A B, coll'istesso raggio o intervallo AB descrivansi due archi, i quali si seghino nel punto C; poichè tirate le rette AC, BC, il triangolo ACB sarà equilatero.

XXXIV.

*Sopra la data retta* AB *descrivere il qua-* 11.*IV.*
*drato.* Fig.45.

Sopra la data retta AB, si alzino le perpendicolari AC, BD, dalle quali si taglino le parti AE, BF uguali all'istessa retta AB, e congiunta la retta EF il quadrilatero AEFB sarà quadrato.

## XXXV.

dalla 6. 7. VIII. *Sopra la data retta* AB *descrivere il pentagono.*

Fig. 46. Dividasi la data retta AB in estrema e media proporzione nel punto C, ed al segmento maggiore AC si pongano uguali le rette AD, BE; e fatto centro in A coll'intervallo AB descrivasi l'arco HI; e coll'istesso intervallo col centro D descrivasi l'arco FG, che seghi l'altro arco nel punto K. Così da' centri B, E coll'istesso intervallo BA si descrivano due archi, i quali si seghino nel punto L; e coll'istesso intervallo da' centri K, L si descrivano gli archi, i quali si seghino nel punto O; e tirate le rette AK, KO, OL, LB sarà descritto il pentagono AKOLB.

Fig. 43. Ovvero divisa in mezzo la retta AB nel punto C, e posta la perpendicolare DC tripla di CA, si tirino le rette DE, DF; e tagliate le rette AE, BF uguali ad AB, co' centri E, F, ed intervallo uguale ad AB si descrivano due archi, i quali si seghino nel punto G; poichè tirate le rette EG, FG sarà descritto il pentagono AEGFB benchè non esatto.

## XXXVI.

dalla VIII. *Sopra la data retta* AB *descrivere l'essagono.*

Fig. 48. Descrivasi sopra la data retta il triangolo equilatero ACB, e sopra le rette ancora BC, AC si descrivano i triangoli equilateri ADC, CGB; e sopra le rette DC, CG si descrivano i triangoli equilateri DEC, CFG, e si congiunga EF; e sarà descritto l'essagono ADEFGB.

Ovvero descritto il triangolo equilatero ACB, co'raggi CA, CB si descriva il circolo, e preso l'arco AD uguale all'arco AB si tirino le rette DG, AF, DE; poichè tirando le rette DE, EF, FG, GB sarà descritto l'essagono.

Se-

## XXXVII.

*Sopra la data retta* AB *descrivere il decagono.* *dalla 6. VIII.*

Si prolunghi la retta AB in C, sicchè tutta la AC sia segata in estrema e media ragione nel punto B, ed il segmento maggiore sia AB; poi co' centri A, B, ed intervallo AC si descrivano gli archi, i quali si seghino nel punto I, e sarà questo il centro del decagono; e però fatti intorno al centro I dieci angoli uguali all' angolo AIB, sarà descritto il decagono. Fig. 49.

## XXXVIII.

*Nel dato circolo descrivere un triangolo equilatero.* 1. VIII.

Tirisi il diametro AB, e dividasi in mezzo il raggio CB nel punto D, per il quale si alzi la retta EF perpendicolare all'istesso raggio; e tirate le rette EA, FA, sarà descritto nel circolo il triangolo equilatero AEF. Fig. 50.

Ovvero si applichino alla circonferenza del circolo le rette AG, GE uguali all'istesso raggio AC; e tirata la retta AE, e ad essa uguali le rette EF, FA, il triangolo EAF sarà equilatero.

## XXXIX.

*Nel dato circolo descrivere l' essagono.* 4. VIII.

Il lato dell' essagono descritto nel circolo è uguale al raggio dell'istesso circolo AD; e però applicando alla circonferenza del circolo sei rette uguali al raggio AC formeranno l' essagono AG EBFH. Fig. 50.

Ovvero descritto, come nella passata, nel dato circolo il triangolo equilatero, si dividano in mezzo gli archi AE, EF, FA; poichè tirate le rette AG, GE, EB, BF, FH, HA sarà descritto l'essagono.

Nella stessa maniera dividendosi in mezzo gli archi, AG, GE, ec. e tirate le rette o corde agli stes-

si archi divisi si potrà descrivere una figura ; o poligono di 12. 24. 48. 72. lati.

XL.

*6. VIII.* *Nel dato circolo descrivere il quadrato.*

Fig. 51. Si tirino per il centro E i diametri AC, BD, i quali si seghino ad angoli retti; e tirate le rette AB, BC, CD, DA sarà descritto il quadrato ABCD.

Ovvero tirato il diametro AC si divida in mezzo l'arco AC nel punto B; dal quale tirato il diametro BD, si congiungano le rette AB, BC, CD, DA.

XLI.

*6. VIII.* *Descrivere nel dato circolo il pentagono, o decagono.*

Fig. 52.

Dividasi il raggio AB in estrema e media ragione nel punto C, ed alla circonferenza del circolo si applichi la retta BD uguale al segmento maggiore AC, e sarà questa il lato del decagono inscritto nel circolo; e però preso l'arco BE doppio dell'arco BD, e tirata la retta BE, sarà questa il lato del pentagono inscritto nel circolo; e però applicate alla circonferenza quattro rette uguali a BE, sarà descritto il pentagono nel dato circolo.

*dalla* 11. *VIII.* Fig. 53.

Ovvero diviso in mezzo il raggio AB in C, coll'intervallo CD e centro C descrivasi un arco, il quale seghi il diametro nel punto E; indi fattosi centro in D coll'intervallo DE descrivasi un arco, il quale seghi la circonferenza nel punto F, e tirata la retta DF, sarà questa il lato del pentagono descritto nel circolo; e però preso l'arco DG metà dell'arco DF, sarà la retta DG lato del docagono.

XLII.

Fig. 54. *Descrivere nel dato circolo l'eptagono, o figura di sette lati.*

Dividasi in mezzo il raggio AB nel punto C,

dal

dal quale si alzi la perpendicolare CD, e fattosi centro in D, coll'intervallo DC descrivasi un arco, il quale seghi la circonferenza nel punto E; e tirata la retta DE, sarà questa prossimamente il lato dell'eptagono descritto nel circolo.

Ovvero tirisi la retta FG uguale al raggio del circolo, e sopra FG tirisi perpendicolare la retta BH, e sarà questa il lato dell'eptagono.

XLIII.

*Descrivere nel dato circolo l'enneagono, o figura di nove lati.* Fig.55.

Pongasi la retta AB lato del triangolo equilatero descritto nell'istesso circolo, e la retta CD uguale al raggio EF; indi co' centri C, D e l'istesso intervallo CD si descrivano due archi, i quali si seghino nel punto G: poichè tirata la retta EA, e congiunta la retta IF, sarà questa prossimamente il lato dell'enneagono descritto nel dato circolo.

XLIV. 13. VIII.

*Descrivere intorno al dato circolo qualsivoglia poligono, o figura regolare,* Fig.56.

Debbasi descrivere per esempio l'essagono, e prima descrivasi dentro l'istesso circolo l'essagono, che tocchi il circolo ne' punti A, B, C, D, E, F, per i quali si tirino le tangenti, che concorrano insieme ne' punti G, H, I, K, L, M, e sarà descritto l'essagono intorno al dato circolo.

XLV. 14. VIII.

*Descrivere intorno al dato poligono un circolo.* Fig.56.

Dividansi in mezzo due angoli del poligono dato FAB, ABC con le rette AN, BO, le quali si seghino nel punto P, dal quale come centro coll'intervallo PA descrivasi il circolo, che passerà per tutti i punti A, B, C, D, E, F, e però sarà descritto intorno al dato poligono.

XLVI.

*Descrivere il circolo dentro al dato poligono*
16. VIII. GHIKLM.

Fig. 56. Dividansi in mezzo i due lati MG, GH ne' punti A, B, per i quali alzino le perpendicolari AN, BO agl' istessi lati MG, GH; e dal punto P, nel quale quelle si segano, come da centro coll'intervallo PA, ovvero PB descrivasi il circolo, il quale toccherà di dentro tutti i lati del poligono; e però sarà descritto dentro del dato poligono.

XLVII.

Fig. 56. *Descrivere dentro il poligono dato* GHIKLM *dalla un' altro poligono simile.*

13. VIII. Dividansi in mezzo tutti i lati del dato poligono in A, B, C, D, E, F, e si tirino le rette AB, BC, CD, DE, EF, FA; e sarà descritto il poligono ABCDEF simile al poligono dato GHIKLM.

XLVIII.

*dalla Descrivere intorno al poligono dato* ABCDEF
13. *un' altro simile.*

VIII. Dividansi in mezzo gli angoli CBA, BAF
Fig. 56. con le rette BO, AN, le quali si seghino nel punto P, dal quale si tirino i raggi o rette PA, PB ec e sopra le rette PA, PB ec. si tirino le perpendicolari HG, GM ec. le quali concorrano insieme ne' punti G, H, I, K, L, M, e sarà descritto il poligono GHIKLM simile al poligono dato ABCDEF.

XLIX.

15. *Trovare il centro del poligono dato* ABC
VIII. DEF.

Fig. 56. Si dividano in mezzo due angoli CBA, BAF, ed il punto P, nel quale concorrono, o si segano le rette BO, AN, sarà il centro del dato poligono.

*Den-*

L.

*Dentro al dato circolo, ovvero intorno al dato raggio* A B *descrivere una spirale.* Fig. 57.

Si divida la circonferenza dal circolo dato in qualsivoglia numero di parti fra loro uguali, per esempio 8, ed in altrettante parti fra loro uguali il raggio A B; e tirati i raggi A C, A D ec. nel primo raggio A C si pigli la particella C K uguale ad una particella del raggio A B; nel secondo raggio A D la parte D L uguale a due particelle del raggio, e così successivamente finchè nell' ultimo raggio A I resti la parte A Q uguale ad una sola particella del raggio: poi per i punti B, K, L, M, N, O, P, Q, A si descriva la curva, che sarà spirale, tanto più esatta quanto maggiore sarà il numero delle parti, nelle quali sia diviso il raggio e circonferenza del circolo.

LI.

*Dentro del dato circolo, o sopra il dato raggio descrivere una spirale di quante spire o rivoluzioni si voglia.* Fig. 58.

Il numero delle parti, nelle quali dividesi il raggio sia tante volte maggiore del numero delle parti nelle quali dividesi la circonferenza, quante esser debbono le spire, o rivoluzioni nella spirale; e poi per i punti de' raggi presi come nella passata si descriva la curva, che sarà spirale di quante spire si voglia.

Ovvero dividasi il raggio A B o A C in tante parti fra loro uguali, quante esser debbono le spire nella spirale; indi sopra la parte A D come diametro descrivasi il semicircolo A E D, sopra le due parti F D come diametro descrivasi il semicircolo D G F; sopra le tre F H descrivasi il semicircolo F I H; sopra le quattro H K il semicircolo H L K; sopra le cinque C K il semicircolo C M K; e finalmente sopra la 6 parti, o l'intero diametro B C descri- Fig. 59.

crivasi il semicircolo BNC, e sarà formata la spirale richiesta di tre rivoluzioni, o tre spire.

LII.

Fig.60. *Descrivere intorno alla data retta* AB *un elissi, o ovale.*

Dividasi in tre parti uguali la data retta ne' punti C, D, da' quali come da centri coll'istesso intervallo CD si descrivano due circoli, i quali si seghino ne' punti E, F, da' quali si tirino per i centri C, D le rette EDH, FCG; e fattosi centro in F coll' intervallo FG, descrivasi l'arco GI; siccome fattosi centro in E coll' intervallo EH descrivasi l'arco HK, e sarà descritta l'elissi, o ovale richiesta.

Fig.61. Per descrivere intorno l'istessa retta AB un'altra ovale più stretta, dividasi la retta AB in quattro parti fra loro uguali, ne' punti C, D, E; da' quali come da centri con l'istesso intervallo CD si descrivano tre circoli, i quali si seghino ne' punti H, F, G, I; e diviso in mezzo gli archi FG, HI ne' punti K, L, si tirino da questi punti per i centri C, E le rette KEM, LCN; e fattosi centro in K coll'intervallo KM, descrivasi l'arco MO; siccome fattosi centro in L coll' intervallo LN, descrivasi l'arco NP, e sarà formata l'elissi, o ovale più stretta.

LIII.

Fig.62. *Descrivere un elissi, o ovale con la data lunghezza* AB, *e larghezza* CD.

35. IX. La lunghezza e larghezza data si seghino in mezzo, e perpendicolarmente nel centro E; e fattosi centro in C coll'intervallo uguale ad AE, descrivasi l'arco, il quale seghi la lunghezza o diametro AB ne' punti F, G; indi confitti negli istessi punti F, G due chiodi, si attachino ad essi le estremità di un filo, che sia di lunghezza uguale al diametro AB, e passi per la cruna di un'ago; poichè movendosi in giro l'istessa cruna da A verso

so C, B, D, A, tenendo sempre stese o tirate le parti dell'istesso filo, sarà formata, o descritta l'ovale ACBC.

Donde apparisce, che quanto è maggiore la larghezza CD, tanto più i punti F, G, i quali si chiamano *fuochi* dell'elisse, devono accostarsi al centro E; siccome quanto più stretta deve essere l'elisse, tanto maggiore deve essere la distanza de' fuochi, o la retta FG.

## LIV.

Dalla passata facilmente apparisce come si possono facilmente *trovare i fuochi dell'elisse data*. Fig. 62.

## LV.

*Trovare il centro, e diametro di un'elisse data*. dalla 43. XI. Fig. 63.

Tirisi a traverso all'elisse qualsivoglia retta AB, e parallela ad essa la CD; e dividendole in mezzo ne' punti E, F, si tiri la retta GH, la quale dividasi in mezzo nel punto I, che sarà centro dell'elisse. Indi con questo centro I, e qualsivoglia intervallo IG descrivasi un circolo, il quale seghi l'elisse ne' punti G, L, per i quali tirisi la retta GL che dividasi in mezzo nel punto M: e la retta NO tirata per i punti M, I, e perpendicolare alla retta GL, sarà l'asse, o lunghezza, o diametro maggiore dell'elisse; siccome la retta PQ tirata per I perpendicolare ad NO sarà la larghezza, o diametro minore dell'istessa elisse.

## LVI.

*Trovare l'asse e il fuoco della data parabola* AB.

Si tirino in qualsivoglia maniera le due parallele EF, GH, le quali divise in mezzo ne' punti I, K, si tiri la retta LM, e perpendicolare ad essa fra la retta NO; la quale, se non è divisa in mezzo nel punto M, dividasi nel punto C, e si alzi la perpendicolare CD, che sarà l'asse della Fig. 64. dalla 20. 25. XI.

pa-

parabola. Poi fatta come DC a CO così CO a DP, e preso DQ uguale alla quarta parte di DP, il punto Q sarà il fuoco.

Fig.65. dalla 20. XI. Ovvero trovato l'asse CD tirisi ad esso perpendicolare la retta o ordinata EF, e dividendola in mezzo nel punto G si tiri la retta GD, alla quale pongasi perpendicolare la GH; e presa DI uguale ad EH sarà il punto I fuoco della parabola.

## LVII.

Fig.66. dalla 24. XI. *Intorno all'asse dato* CD, *e sopra la data base* CB *descrivere una parabola.*

Trovato il fuoco G, e posta la retta FD uguale a DG si tiri la retta o tangente FE, e sarà la retta CF uguale a GB. Indi presi nell'asse CD varj punti I, I, I, si tirino le perpendicolari IL, IL, IL, e fattosi centro in G con gli intervalli uguali ad IL si descrivano gli archi, i quali seghino le perpendicolari istesse ne' punti K, K, K, poichè la curva descritta per i punti D, K, K, K, B sarà parabola.

Fig.67. Ovvero trovato il fuoco G, e posta la retta DF uguale a DG, e tirata perpendicolare ad FC, col centro D intervallo DF descrivasi un circolo; col centro I intervallo IF un'altro circolo; col centro K intervallo KF un'altro circolo, e così successivamente pigliati varj punti nell'asse CD come centri si descrivano varj circoli, i quali segino la retta DH ne' punti L, M, M; indi si tirino da' punti I, L, K, M, K, M le perpendicolari, le quali si incontrino, o si seghino ne' punti N, O, O; e la curva descritta per i punti D, N, O, O, B sarà parabola.

Fig.68. Ovvero dividasi la base o ordinata CB in varie parti fra loro uguali ne' punti F, F, B, da' quali si tirino parallele all'asse CD le rette EL, FM, BH; e tirata per i punti A, D la retta AH, dividasi la retta BH in altrettante parti

fra

fra loro uguali, in quante si è divisa la base CB, ne' punti K, I, a' quali si tirino le rette AI, AK; poichè descritta una curva per i punti D, L, M, B, ne' quali si segano le linee rette, sarà parabola.

Ovvero trovato il fuoco G, si fermi in esso l' estremità di un filo di lunghezza uguale alle rette CD, DG; e facciasi per l'istesso filo scorrere un ago, sicchè il nodo o l' altra estremità del filo si trovi sempre nella base CB, e la parte del filo OK sia sempre parallela all' asse CD, il che facilmente si ottiene con fare scorrere il filo rasente ad una squadra applicata alla base CB; e sarà la curva così descritta dall'ago una parabola. *dalla 22. XI.* Fig. 69.

Che se la base CB fosse uguale all' asse CD, oltre varie maniere già dimostrate, descrivasi intorno a CD come diametro il semicircolo CDE, e tirata da qualsivoglia punto F la perpendicolare FG, e posta la FH uguale a DI, e così sempre, la curva descritta per i punti D, H, H, B sarà parabola equilatera. Fig. 70.

## LVIII.

*Trovare il centro, l' asse, ed il fuoco dell' iperbola data* AB. Fig. 71.

Si tirino in qualsivoglia maniera le due parallele EF, GH, le quali si dividano in mezzo ne' punti I, K, per i quali tirisi la retta LM: così tirate e divise in mezzo ne' punti N, O le parallele PQ, RS, tirisi la retta TU, ed il punto X, nel quale si segano le rette LM, TU, sarà il centro dell'iperbola. *dalla 12. XI.*

Poi fattosi centro in X con qualsivoglia intervallo descrivasi un arco, il quale seghi l' iperbola ne' punti A, B, e divisa in mezzo la retta AB nel punto C, si alzi la perpendicolare CD, che sarà l'asse, e prolungata passerà per il centro X. Indi presa XF uguale a XD facciasi come DC a CB così CB a CZ, e come FC a CZ così FD a DQ, e presa DY uguale

alla

alla quarta parte della retta DO, il punto Y sarà il fuoco dell'iperbola.

## LIX.

Fig.72. *Intorno all'asse dato* CD, *e sopra la data dalla base* CB *descrivere l'iperbola.*

32. XI. Trovato il fuoco H, e posta la retta CI uguale ad HB si tiri la retta o tangente IK, indi preso qualsivoglia punto L, e tirate le LM, LM perpendicolari all'asse, si taglino le LN, LN uguali all'inclinate HN, e la curva descritta per i punti D, N, N, B sarà iperbola.

Fig.73. Ovvero trovato il fuoco H, e centro X, e presa la retta XK uguale ad XH, si fermino ne' punti H, K l'estremità di due fili, i quali passino per la cruna di un'ago posta in A; indi si faccia scorrere la cruna istessa da A verso D, sicchè le parti dell'uno e dell'altro filo, che escono per la cruna, sieno sempre fra loro uguali, finchè si arrivi nel punto D, e sarà dalla cruna ista dell'ago descritta l'iperbola.

Fig.73. *dalla* 36. XI. Ovvero presa una riga mobile fermata in K, ed un filo fermato in una sua estremità nel fuoco H, si faccia scorrere pel filo istesso la cruna dell'ago, sicchè la cruna e la parte scorsa del filo sempre tocchi la riga, e sarà descritta l'iperbola.

Fig.74. *dalla* 16. XII. Ovvero tirata per il centro X la retta XL perpendicolare all'asse, e presa qualsivoglia retta MN perpendicolare ad KL, e sempre uguale all'inclinata corrispondente MD, la curva descritta per i punti D, N, N, A, sarà iperbola equilatera.

Fig.75. *dalla* 8. VII. Ovvero descritto sopra la retta DF lato trasverso della data iperbola il semicircolo, e tirata a qualsivoglia punto M la tangente MO, alla quale pongasi uguale la retta o perpendicolae ON, la curva descritta per i punti D, N, N, B sarà iperbola equilatera.

De-

LX.

*Descrivere un quadrato uguale al rettangolo dato* ABCD. Fig. 76. dalla 8. VII.

Fra le due rette o lati AB, BC si trovi la media proporzionale EF, e descrivasi sopra quella il quadrato EFGH, che sarà uguale al dato rettangolo ABCD.

LXI.

*Formare un triangolo uguale a qualsivoglia figura rettilinea data* ABCDE. Fig. 77. 25. VI.

Si tirino le rette AC, EC, e per i punti B, D si tirino le rette BF, DG parallele alle rette CA, CE; e tirate le rette FC, GC, di nuovo per gli stessi punti B, D si tirino le rette BH, DI parallele alle rette CF, CG: e si congiunga CH, CI; e sarà il triangolo HCI uguale al rettilineo dato ABCDE.

LXII.

*Formare sopra la data retta linea* AB *un parallelogrammo uguale al dato triangolo* CDE *che abbia un'angolo uguale all'angolo dato* F. Fig. 78. e 79. 79. 29. 23. VI.

Si formi l'angolo BAG uguale all'angolo dato F, ed alzata la perpendicolare AH sene tagli una parte AI uguale alla DK perpendicolare del triangolo dato; e presa la retta AL uguale alla metà della base CE, si tiri per il punto I la retta PM parallela ad AB; e per il punto L la retta LN parallela ad AG; e sarà il parallelogrammo APOL uguale al triangolo dato CDE, ed avrà l'angolo LAP uguale all'angolo dato F.

LXIII.

*Descrivere sopra la data retta* AB *un parallelogrammo uguale al dato triangolo* CDE, *che abbia un'angolo uguale all'angolo dato* F. Fig. 80. e 79. 24. VI.

Si formi sull'istessa retta AB prolungata il parallelogrammo AGHI uguale al dato triangolo CDE, che abbia l'angolo AGH uguale all'an-

go-

golo dato F; e tirando per il punto B una retta parallela ad AI, la quale s' incontri con la retta HI prolungata in L, si tiri la retta LA, che prolungata seghi la retta HG prolungata in M; e per M si tiri la MK parallela a GB, e si prolunghi la retta AN; poichè il parellelogrammo ABKN sarà uguale al parallelogrammo AGHI, ovvero al triangolo CDE; ed avrà l' angolo KBA uguale all' angolo AGH, ovvero all' angolo dato F.

*dalla* 18. *VI.* Ovvero fatto il parallelogrammo IAGH uguale al triangolo dato CDE, si trovi dopo le tre rette BA, AG, IA la quarta proporzionale AN, e si compisca il parallelogrammo ABKN, che sarà uguale al parallelogrammo dato IAGH, ovvero al triangolo dato CDE.

LXIV.

Fig. 80. e 77. Si *farà* ancora *un parallelogrammo uguale a un rettilineo dato*,

Se l' istesso rettilineo dato si riduca prima a un triangolo, ed a questo triangolo si faccia uguale il parallelogrammo; ovvero, se dividendo il rettilineo in tanti triangoli, si facciano altrettanti parellelogrammi uguali a ciascuno de' triangoli; poichè sarebbe l' intero parallelogrammo uguale al rettilineo dato.

LXV.

Donde appariſce ancora, che può *formarſi un quadrato uguale a qualsivoglia triangolo, o rettilineo dato*,

Se riducasi il rettilineo o triangolo dato ad un parallelogrammo o rettangolo uguale, ed a questo rettangolo si faccia un quadrato uguale.

Fig. 81. e 82. 22. *VIII.* LXVI.

*Fare un triangolo, o un rettangolo, o un quadrato uguale al dato poligono regolare* ABCDE.

Tro-

Trovato il centro del dato poligono F, si tiri la retta FG perpendicolare ad un lato AE, ed uguale ad FG pongasi la retta HK, e la retta HI uguale all'intero perimetro ABCDE; e tirata la retta KI, sarà il triangolo HKI uguale al dato poligono.

Presa la retta HL uguale alla metà del perimetro, o di HI, e compito il rettangolo HK LM, sarebbe questo uguale al triangolo HKI, ovvero al dato poligono.

Siccome trovata la MN media proporzionale fra i lati KM, ML, sarebbe il quadrato della MN uguale al poligono.

## LXVII.

*Fare un triangolo, o rettangolo, o quadrato uguale al dato circolo* ABCDE. Fig. 82. e 83.

Pongasi la retta HK uguale al raggio FG, e facciasi come 7 a 22 così FG, o HK alla retta HI e sarà la retta HI uguale alla circonferenza ABCDE; ed il triangolo HKI uguale al dato circolo; e però riducendosi per la passata il triangolo ad un rettangolo, o quadrato uguale, si avrà il rettangolo, o quadrato uguale al dato circolo. *dalla 25. VIII*

## LXVIII.

*Descrivere un triangolo simile al triangolo dato* CDE, *che abbia ad esso qualsivoglia ragione data.* Fig. 84. e 85.

Trovata fra le due rette CE, X la media proporzionale Z, facciasi come Z a CE così l'istessa CE ad AB, e fatto di CE ad X l'angolo ABF uguale all'angolo CED; e l'angolo BAF uguale all'angolo ECD; sarà anche l'angolo AFB uguale all'angolo CDE; ed il triangolo AFB simile al triangolo dato CDE, ed avrà ad esso la ragione data di CE ad X. *dalla 12. VII.*

## LXIX.

Fig.86. e 87. *Sopra la data retta* AB *descrivere un rettilineo simile al rettilineo dato* CDEFG.

Dividasi il rettilineo dato, in tanti triangoli GCE, ECD, GEF; e sopra la retta AB si descriva il triangolo ABI simile al triangolo CGE; sopra la retta AI il triangolo AHI simile al triangolo CDE; sopra la retta BI il triangolo BIK simile al triangolo GEF; e sarà tutto il rettilineo AHIKB simile al rettilineo dato CDEFG.

## LXX.

Fig.88. 89.06 *dalla* 7. *del* VI. e 12. VII. *Descrivere un rettilineo simile al rettilineo dato* GHIK, *ed uguale ad un' altro rettilineo dato* ABC.

Nella data retta GK si formi il rettangolo GKLM uguale al rettilineo dato GHIK; e nella retta KL il rettangolo KLNO uguale al rettilineo dato ABC; e trovata fra le due rette GK, KO la media proporzionale PQ, descrivasi sopra di lei il rettilineo PSRQ simile al rettilineo dato GHIK, che sarà ancora uguale al rettilineo dato ABC.

## LXXI.

*dalla* 19. VII. Fig.91. *Dati due rettilinei simili* ABCD, DEFG, *descrivere un' altro rettilineo simile a ciascheduno di quelli, ed uguale a tutti due presi insieme.*

Si riducano i due rettilinei dati ad un triangolo, o rettangolo uguale; e poi descrivasi un rettilineo uguale a questo triangolo, o rettangolo, simile ad uno de' rettilinei dati.

Ovvero si dispongano le basi AD, DG de' rettilinei dati ad angoli retti, e tirata la retta AG, sopra di essa descrivasi il rettilineo AGHI simile ad uno de' rettilinei dati, che sarà ancora uguale a tutti due presi insieme.

*Dati*

## LXXII.

*Dati due rettilinei simili, e disuguali* AGHI, DEFG, *descrivere un rettilineo simile ad essi ed uguale alla differenza de' rettilinei dati.* Fig.91. *dalla 19. VII.*

Descritto sopra il lato AG un semicircolo si adatti nella circonferenza di quello il lato omologo, o corrispondente GD; e si tiri la retta AD, sopra la quale descrivasi il rettilineo ABCD simile ad uno de' rettilinei dati, e sarà questo la differenza degli stessi rettilinei dati.

## LXXIII.

*Descrivere un rettilineo simile al rettilineo dato* AHIKB; *che abbia all'istesso rettilineo dato qualsivoglia data ragione di* X *ad* AB. Fig.86. e 87. *dalla 12. XII.*

Fra le due rette X, AB trisi la media proporzionale CG, e sopra quella descrivasi il rettilineo CDEFG simile al rettilineo dato AHIKB, e sarà il rettilineo CDEFG al rettilineo simile AHIKB come X ad AB.

## LXXIV.

*Descrivere un circolo, che abbia al circolo dato* ABC *qualsivoglia data ragione di* X *a* Z. Fig.92. e 93. *dalla 28. VIII.*

Come X a Z facciasi il raggio AD del circolo dato ABC alla retta E; e trovata fra le rette AD, E la media proporzionale IK, con essa come raggio descrivasi il circolo IKH, il quale avrà al circolo dato la ragione di X a Z.

## LXXV.

*Descrivere un circolo uguale alla zona, armilla, o fascia circolare* ABCDE. *33. VIII.*

Si tiri per il centro F il diametro GH, e fra le rette GI, IH si trovi la media proporzionale KI, colla quale come raggio descrivasi il circolo AC, che sarà uguale alla zona, o fascia ABCDE. Fig.94. e 95.

Nell' istessa maniera ancora si potrà descrivere Fig.95.

un circolo uguale alla lunula, o differenza de' circoli AGCDEI.

LXXVI.

Fig.94. dalla 26. VIII. *Descrivere un circolo uguale al dato settore* GBF.

Come l'arco GB all'intera sua circonferenza, così facciasi il raggio FH alla retta FL; e trovata fra la HF, FL la media proporzionale FI, con essa come con raggio descrivasi il circolo DEI, che sarà uguale al dato settore.

LXXVII.

Fig.96. 97. *Descrivere un circolo uguale al dato triangolo* ABC.

Riducasi il triangolo dato un quadrato uguale DEFG, e facciasi come 11 al 14 così il lato DG alla retta X; e trovatasi fra le due rette DG, X la media proporzionale HI, con essa come con diametro descrivasi il circolo HI, che sarà uguale al triangolo dato.

LXXVIII.

Fig.98. *Descrivere un circolo uguale al dato segmento* ABC.

Trovato il centro D compiscasi il settore DABC; e fatto un circolo uguale al settore, ed un altro al circolo uguale al triangolo DAC, facciasi un circolo uguale alla differenza di questi circoli, ovvero al segmento dato.

LXXIX.

Fig.99. 100. dalla 20. V. *Dividere il dato circolo* ABC, *nell'istessa ragione, in cui sia diviso il circolo dato* DEF *ovvero tagliare nel dato circolo un arco, settore, o segmento simile al dato arco, settore, o segmento di un altro circolo.*

Si tirino dal centro G i raggi GH, GI, che formino l'angolo HGI uguale all'angolo KLM; e sarà nel circolo ABC l'arco, settore, o segmen-

mento tagliato simile all'arco, settore o segmento del circolo DEF; ovvero il dato circolo ABC sarà diviso nell'istessa ragione, in cui è diviso il circolo DEF.

## LXXX.

*Dato un cubo, sfera, cilindro, prisma, cono, piramide, formare un altro cubo, sfera cilindro ec. simile, che abbia al cubo, sfera, cilindro dato qualsivoglia data ragione di X a Z.* Fig. 97. 55. XI. e dalla 19. X.

Pongasi come X a Z così AB lato del cubo, asse della sfera, cilindro, cono, prisma, piramide, alla retta Y; e fra le rette AB, Y si trovino due medie proporzionali HI, K, e sarà il cubo del lato HI, ovvero la sfera dell'asse AB alla sfera dell'asse HI, ovvero il cilindro, prisma, cono, piramide dell'asse AB al cilindro, prisma, cono, piramide simile dell'asse HI come la retta AB alla retta Y, cioè per ipotesi nella ragione data di X a Z.

# DELLA GEOMETRIA PRATICA

# LIBRO IV.

## *Il quale contiene la misura delle superficie, e dei Solidi,*

BEnchè le varie operazioni, che nei passati libri si dimostrarono, riputar si debbano per se medesime dilettevoli, e di utilità singolare, tutte però si riducono, o indirizzate sono alla misura delle varie spezie di quantità continua, la formazione, o descrizione delle quali si è dimostrata nel precedente libro. Infatti non solo le antiche Istorie, e il consentimento di tutti i Scrittori; ma il nome istesso di *Geometria* dà ben chiaramente a conoscere, che questa scienza fu ritrovata per la misura della Terra, benchè felicemente poi fosse estessa alla dimensione ancora di qualsivoglia altro genere di quantità; sicchè la misura delle superficie, o figure dicasi *Planimetria*; e la misura de' solidi o Corpi *Stereometria*. Dell' una e dell' altra spezie e misura si parlerà nel presente libro con quell' ordine, ovvero serie più naturale, che la materia istessa richiede; poichè dalla misura delle superficie si passerà a quella dei solidi; e dalle operazioni più facili o semplici, a quelle che sieno più difficili e più composte.

PRO-

# PROPOSIZIONI.

## I.

*Misurare qualsivoglia parallelogrammo* A B C D. Fig. 1. e 2.

Si misuri la base A D, e la perpendicolare B A, ovvero B E; indi si moltiplichino insieme la perpendicolare istessa e la base, ed il loro prodotto sarà la misura, o grandezza del parallelogrammo dato. *dalla 6. e 7. del VI.*

## II.

*Misurare qualsivoglia triangolo* A B C. Fig. 3. 4. 5.

Si misuri la base A C, e la perpendicolare A B ovvero B E; indi si moltiplichino insieme la perpendicolare istessa e la base, poichè la metà del loro prodotto sarà uguale alla grandezza, o superficie del triangolo dato. *dalla 22. VI.*

Ovvero si moltiplichi la perpendicolare nella metà della base, ed il prodotto farà la misura del triangolo dato.

## III.

*Misurare un trapezio* A B C D, *del quale due lati* A B, C D *sieno paralleli*. Fig. 6.

Per il punto C si tiri la retta C E parallela al lato D A; poi si misuri prima il parallelogrammo A E C D, indi il triangolo E B C, ed unite insieme le loro misure, si avrà la misura, o grandezza di tutto il trapezio dato A B C D. *dalla 22. e 27. VI.*

Ovvero divisa in mezzo la retta A D in F si alzi la perpendicolare E G, e si moltiplichi la base A D per l'altezza, o perpendicolare F G, ed il prodotto sarà la misura, o grandezza di tutto il trapezio.

Ovvero si tiri la perpendicolare C E, si moltiplichi tanto il lato maggiore A B, quanto il mi-

nore DC per la perpendicolare CE, poichè la metà del prodotto sarà uguale al dato trapezio ABCD.

IV.

Fig. 7. *Misurare qualsivoglia trapezio, o rettilineo dato* ABCDE.

Dividasi la data figura in tanti triangoli, e si misuri ciascuno di quelli, indi s'uniscano insieme le loro misure, e ne risulterà la misura, o grandezza di tutta la figura data.

Ovvero si riduca la data figura rettilinea ad un triangolo solo, che le sia uguale, e misurando questo triangolo si averà la misura di tutta la figura rettilinea data.

V.

Fig. 8. 9. *Misurare un poligono, o figura regolare data* ABCDE.

*dalla* 22. *VIII.* Ritrovato il centro dell'istesso poligono si tiri la FG perpendicolare sopra d'un lato, e si misuri il triangolo AFE, e la misura, che ne risulta, si pigli e si moltiplichi tante volte, quanti sono i lati del poligono istesso, e si averà la misura del poligono intero.

Ovvero si ponga la retta HI uguale alla perpendicolare FG, e la retta HK uguale all'intero perimetro del poligono ABCDE; e sarà il poligono uguale al triangolo HIK, onde misurato il triangolo si averà la misura dell'istesso poligono.

VI.

Fig. 9. *Misurare il dato circolo* ABC.

*dalla* 10. 25. *VIII.* Si misuri la circonferenza ABC, ed il raggio FG, e moltiplicando insieme la circonferenza ed il raggio, si pigli la metà del prodotto, che sarà la misura del circolo istesso.

Ovvero pongasi la retta HI uguale al raggio FG, e la retta HK uguale alla circonferenza, e sa-

sarà il circolo uguale al triangolo HIK, onde misurato il triangolo si avrà la misura del circolo istesso.

Ovvero più brevemente si misuri solamente il raggio FG, o diametro BG, e perchè in qualsivoglia circolo il diametro alla circonferenza sta, secondo Archimede, come il 7 al 22, ovvero il 71 al 223, ovvero come il 113, al 355, ovvero il 100 al 314, si faccia come il 7 al 22, ovvero come il 71 al 223, ovvero come il 113 al 355, così il diametro BG misurato ad un quarto numero, che sarà la misura della circonferenza, onde moltiplicando il raggio FG con la circonferenza trovata, e pigliandosi la metà del prodotto, questa sarà la misura del circolo.

Ovvero il circolo sta al quadrato circonscritto, cioè al quadrato del suo diametro come l'11 al 14, ovvero come il 785 al 1000; onde misurato il quadrato circoscritto, e fatto come 1000 al 785, così il quadrato ad un'altra quantità, sarà questa la quantità o misura del dato circolo.

VII.

*Misurare qualsivoglia settore* DEF *del circolo* ABC. Fig. 11. dalla 26. VIII.

Si misuri il raggio FD, e l'arco DE, indi si moltiplichi il raggio e l'arco insieme, e la metà del lor prodotto sarà uguale al settore DEF.

VIII.

*Misurare qualsivoglia arco del circolo* DE. Fig. 11.

Si misuri l'angolo al centro DFE, e come 360 al numero de' gradi compresi nell'angolo misurato DFE, così sarà l'intera circonferenza ABC all'arco dato DE.

IX.

*Misurare qualsivoglia segmento del circolo* ABC. Fig. 12.

Tirati dal centro i reggi FA, FC, si misuri il settore FABC, indi si misuri il triangolo FAB,

e dal-

e dalla misura del settore si tolga la misura del triangolo, e rimarrà la misura del segmento dato ABC.

X.

Fig.13. *Misurare una porzione di circolo* ABCD *compresa da due corde, o linee rette* AD, BC.

Si misuri il segmento maggiore ABECD, ed il segmento minore BEC, e dalla misura del segmento maggiore si tolga la misura del segmento minore, e resterà la misura della porzione ABCD.

XI.

Fig.14. e 15. *Misurare una zona, armilla, o fascia circolare* ABCDEFG.

Si misurino i due circoli, e si tolga dalla misura, o quantità del maggiore la quantità del minore, e resterà la misura della differenza de' circoli, cioè della fascia, con cui il circolo maggiore supera il minore.

XII.

Fig.16. *Misurare qualsivoglia luna, o spazio compreso da circonferenze* ABCDA.

Trovato il centro dell'arco ADC, si misuri il segmento ADC, ed il segmento ABC; e dal segmento maggiore si tolga il segmento minore, e resterà la misura della luna ABCDA.

Nell' istessa maniera si misurerà lo spazio, o porzione curvilinea ADCGA, aggiugnendo alla misura del segmento AGCF la misura del segmento ABCF.

XIII.

Fig.17. *Misurare lo spazio spirale* ABCDA *d' una sola spira.*

Si misuri il circolo circoscritto alla spirale, e se ne pigli la terza parte, che sarà uguale alla spirale medesima.

*Misu-*

## XIV.

*Misurare qualsivoglia spirale di due, e tre spire.* Fig. 18.

Per i punti B, E, ne' quali le spirali segano il raggio AE, si descrivano i circoli punteggiati, e sarà la prima spirale al primo circolo, come il 7 al 21, la seconda spira, cioè lo spazio contenuto dalla spira EFGB, e dal secondo circolo, sarà all'istesso circolo come il 7 al 12. La terza spira al terzo circolo come 19 al 27; la quarta spira al quarto circolo come 37 al 48; la quinta spira al quinto circolo come 61 al 73. Onde misurati i circoli s'avrà subito per la regola del tre la misura di qualsivoglia spazio spirale.

## XV.

*Misurare l'elissi, o ovale* ABCD. Fig. 19. 20.

Il circolo è all'ovale inscritta come il diametro, o asse maggiore AC all'asse minore BD, onde trovata la misura del circolo, e fatto come AC a BD così la misura del circolo ad un'altra, questa sarà la misura dell'elissi, o ovale. *dalla* 10. *XII.*

Ovvero fra le rette, o semiassi AE, EB si trovi la media proporzionale FG, e sarà il circolo descritto col raggio FG uguale all'elissi; onde misurando il circolo FG si avrà la misura dell'elissi.

Ovvero per approssimazione l'elissi sta al rettangolo fatto dagli assi, e circonscritto all'elissi, come 785 a 1000; onde misurato il rettangolo, e fatto come 1000 a 785 così il rettangolo circonscritto ad un'altra quantità, sarà questa la quantità, o misura dell'elissi.

## XVI.

*Misurare qualsivoglia porzione di elisse* KCL *o* BKLD. Fig. 19. *dalla* 13. *e* 14. *XII.*

Intendasi un circolo circonscritto all'elisse, e sarà il segmento circolare MCN alla porzione elittica

tica corrispondente KCL come l' intero circolo all'ellisse, ovvero come l'asse AC all' asse BD; e però misurati gli assi ed il segmento circolare, si avrà la misura della data porzione di ellisse KCL, e perciò ancora della porzione rimanente BKLD.

## XVII.

Fig.19. *Misurare qualsivoglia segmento d' ellisse* BOK.

Misurata la porzione BKLD corrispondente al segmento dato, dalla metà di lei BOKIE sottraggasi il trapezio BKIE, e si avrà la misura del rimanente segmento elittico BOK.

Quindi potrà facilmente misurarsi ancora il settore, o porzione elittica DBOK, ovvero KCLD, ovvero il settore BDP, e la porzione elittica BCP.

## XVIII.

Fig.19. *Misurare qualsivoglia porzione di ellisse* BK DP *contenuta fra due corde* HD, CP.

Dalla porzione maggiore BCP sottraggasi la porzione minore KCD, e si avrà la misura della porzione BKDP.

## XIX.

Fig.21. *Misurare qualsivoglia parabola, o porzione dalla parabolica* ABC.

6.*XII.* Si misuri il rettangolo di AC in GB, e se ne piglino due terzi, i quali saranno uguali alla data parabola ABC; siccome i due terzi del rettangolo di DE in FB saranno uguali alla parabola, o porzione parabolica DBE.

*dalla* 8. *XII.* Ovvero per misurare la porzione parabolica DBE si piglino le due rette X, Z continuamente proporzionali dopo le rette AC, DE; e sarà la parabola ABC alla parabola DBE come AC a Z; e però misurate le rette AC, Z, e la parabola ABC, si avrà la misura della porzione DBE.

*Mi-*

XX.

*Misurare qualsivoglia parabola obliqua* ABC. Fig. 22. *dalla* 6. XII.

Trovato l'asse BD, dividasi in mezzo la base AC nel punto E, per il quale tirisi la retta EF parallela all'asse, e congiunto AF, CF si misuri il triangolo AFC, il quale sarà $\frac{3}{4}$ della parabola ABC.

Ovvero posta BH uguale ad FE, sarà la porzione obliqua AFC uguale alla porzione retta IBK, misurata la quale, si avrà la misura della porzione data. *dalla* 9. XII.

XXI.

Quindi si potrà facilmente *misurare qualsivoglia spazio parabolico* ADEC *intercetto fra le ordinate* AC, DE; *siccome ancora qualsivoglia segmento* EIC, *e qualsivoglia spazio parabolico* AEC. Fig. 21.

XXII.

*Misurare l'iperbola data* ABC.

Pongasi la retta FG uguale ad EB metà del lato trasverso della data iperbola; ed alzata la perpendicolare GH si ponga la retta FH uguale alla retta DE; e divisa in mezzo la retta GH nel punto I, si descriva intorno all'asse GI la parabola FI; posta la retta EK uguale alla curva parabolica FI si compisca il rettangolo ALMC, che sarà uguale all'iperbola data. Fig. 23. e 24. *dalla* 16. XII.

XXIII.

*Misurare una porzione d'iperbola* AOPC *interceta fra le ordinate.* Fig. 23.

Dall'iperbole maggiore ABC misurata sottraggasi l'iperbole minore OBP, e si avrà la misura della porzione data.

Mi-

XXIV.

Fig.23. *Misurare un segmento iperbolico* AO.

Si misuri la porzione AOPC, e dalla sua metà sottragasi il trapezio rettilineo AOKD; e resterà la misura del segmento iperbolico dato AO.

XXV.

Fig.23. *Misurare qualsivoglia iperbola obliqua* AOBP.

Misurisi l'iperbola OBP; il segmento iperbolico AN; ed il triangolo AOP; e si avrà l'intera iperbola AOBP.

Ovvero sottraggasi dall' iperbola ABC il segmento iperbolico PC insieme col triangolo APC, e resterà la misura della data iperbola ABP.

XXVI.

Fig.25. dalla 20.IX. *Misurare la superficie d' un prisma.*

Se il prisma è retto, ed i suoi lati sono perpendicolari sopra la base; si misuri uno de' suoi lati AK; e tutto insieme il perimetro ABCDE, ed il loro prodotto sarà la misura del contorno, o superficie composta de' parallelogrammi; a questa si aggiunga la misura delle due basi opposte ed uguali ABCDE, FGHIK, e si avrà tutta la superficie intera del prisma.

Fig.26. Che se fosse obliquo; si tiri e misuri la perpendicolare EI, indi si moltiplichi per il perimetro ABCD; ed al prodotto, che sarà la misura del contorno si aggiungano le basi opposte ed uguali ABCD, EFGH; e si avrà la misura di tutta la superficie del dato prisma.

XXVII.

Fig.25. *Misurare la superficie di un tronco di prisma* ABCDEFGMLOF.

Si misurano tutti i trapezj, o parallelogrammi che formano il contorno, o fasciano l'istesso tronco, e poi si aggiungano la base ABCDE, ed

il

il rettilineo opposto FGMLOF ; e si avrà l'intera superficie del tronco dato.

## XXVIII.

*Misurare la superficie d' una piramide.* Fig.27. dalla 28. IX.

Se la piramide è retta, e la sua base sia figura, o poligono regolare, si divida in mezzo uno de' lati DC, e gli si tiri la perpendicolare EG; indi si moltiplichi la perpendicolare con tutto il perimetro ABCD, e la metà del prodotto sarà la misura della superficie, o contorno della piramide, aggiungasi la base ABCD, si avrà la misura di tutta la intera superficie della piramide.

Che se la piramide è obliqua, e perciò le perpendicolari tirate sovra dei lati della base dalla punta E sieno disuguali, si misuri separatamente ciascuna fascia, o triangolo della piramide, ed insieme la base, e così si avrà la misura dell'intera piramide. Fig.28.

## XXIX.

*Misurare la superficie d' un tronco di piramide* ABCDEFGH. Fig.29.

Si misuri prima la superficie, o contorno dell' intera piramide ABCDI, e poi la superficie della piramide tagliata EFGHI, e la loro differenza sarà la misura della superficie, o contorno del fusto piramidale ABCDEFGH, alla quale si aggiungano le due basi ABCD, EFGH.

O pure si misuri ciascuno de' trapezzj AHED, AHGB, BGFC, CFED, e le basi ABCD, EFGH, e si avrà l'intera superficie dell'istesso fusto.

## XXX.

*Misurare la superficie d' un Cilindro.* Fig.30. dalla 31. IX.

Si misuri la circonferenza ABCD, e la perpendicolare KI, ed il prodotto sarà uguale alla superficie curva, o contorno, che fascia il cilindro, onde aggiunte le misure dei due circoli, o basi opposte ABCD, EFGH, si avrà l'intera superficie.

XXXI.

## XXXI.

Fig.31. *Misurare la superficie di un cilindro troncato, o segato obliquamente* ABCDEFGH.

Trovisi il punto I centro dell'ellisse, o sezione ovale EHGF, e tirata la perpendicolare IK si misurino, e moltiplichine insieme la circonferenza della base, e la perpendicolare IK, e si avrà la misura della superficie curva, o contorno; aggiungasi la base circolare ABCD, e l'ellissi EFGH e si avrà l'intera superficie.

Ovvero se il cilindro è retto, si ponga l'altezza AL uguale all'altezza minore GC, dividasi la differenza LE in mezzo nel punto M, e si moltiplichi la circonferenza con la retta KM, ed al prodotto aggiunganſi le basi opposte, e si avrà la superficie intera del tronco cilindrico.

## XXXII.

Fig.32. *Misurare la superficie di un pezzo di colonna, o cilindro, che abbia per base qualsivoglia porzione di circolo, di ellisse, parabola, iperbola, o qualsivoglia altra figura.*

Si misuri la perpendicolare EB, e la curva, o arco ABC, e la corda AC, e si moltiplichi l'arco insieme, e la corda con la perpendicolare, si avrà il contorno, al quale aggiunte le due basi uguali ed opposte ABC, DEF si avrà l'intera superficie.

## XXXIII.

Fig.32. *Misurare la superficie dell'ungula circolare, o triangolo cilindrico* ABE *compreso dalle rette* AE, BE, *e dall'arco* AB.

Pongasi la retta BI media proporzionale fra l'altezza BE, ed il raggio BO, ed il quadrato descritto nel lato BI sarà uguale alla superficie dell'ungula ABE; e perciò radoppiando il quadrato si avrà la misura dall'intera superficie dell'ungula AECBA.

## XXXIV.

*Misurare la superficie cilindrica rimanente* FAE. Fig. 32.

Dall'intera superficie cilindrica ABEF sottraggasi la superficie dell'ungula ABE, e resterà la misura della rimanente superficie cilindrica AEF.

## XXXV.

*Misurare la superficie di un cono* ABCDI. Fig. 33.

Se il cono è retto si moltiplichi il suo lato AI con la circonferenza ABCD, e la metà del prodotto sarà uguale alla superficie conica, o contorno del cono; onde aggiunta la misura della base, o circolo ABCD si avrà la superficie dell'intero cono. *dalla 29. IX.*

Ovvero la superficie conica sta al circolo della sua base come il lato AI al raggio AK; e perciò misurato il lato AI, il raggio AK, ed il circolo ABCD, si avrà la superficie conica, a a cui devesi aggiugnere l'istessa base.

## XXXVI.

*Misurare la superficie d'un tronco di cono retto* ABCDEFGH *compreso fra circoli paralleli.* Fig. 33. *dalla 36. IX.*

Si misuri la superficie conica dell'intero cono ABCDI, e la superficie conica del cono levato EFGHI, e la loro differenza sarà uguale alla superficie del tronco conico; onde aggiunte le due basi ABCD, EFGH si avrà l'intera superficie del tronco dato.

Ovvero si misuri il lato AE, e con quello si multiplichi tanto la circonferenza ABCD, quanto la circonferenza EFGH, e la metà del prodotto sarà la superficie curva del tronco conico; onde aggiunte le due basi si avrà l'interra sua superficie.

Ovvero si moltiplichi il rettangolo fatto dal lato del tronco con tutti due i diametri delle ba-

si per 157, ed il prodotto si divida per 100, ed il quoziente sarà la misura della superficie curva del tronco, alla quale aggiunte le due basi si avrà l'intera superficie del tronco conico.

## XXXVII.

Fig.34. *dalla* 43. *IX.* *Misurare la superficie sferica* ABCD.

Si misuri il circolo massimo della sfera, ed il quadruplo dell'istesso circolo sarà uguale alla superficie della sfera.

## XXXVIII.

Fig.35. *dalla* 43. *IX.* *Misurare la superficie d'un segmento sferico* ABC.

Il Circolo fatto dal raggio BA è uguale alla superficie del dato segmento, onde misurato il circolo si averà la misura della superficie dell'istesso segmento.

Oppure come tutto il diametro DB all'altezza del segmento dato BE così sta l'intera superficie sferica alla superficie del segmento ABC, e perciò misurate le perpendicolari, o rette DB, BE, e l'intera superficie sferica, si avrà la misura della superficie del solo segmento ABC.

## XXXIX.

Fig.36. *dalla* 44. *IX.* *Misurare qualsivoglia porzione di superficie sferica compresa da due circoli* AD, BC, *de' quali i centri sono* G, H.

Se i circoli sono paralleli si faccia come il diamentro IE alla retta GH così tutta la superficie sferica ad un'altra, che sarà l'istessa superficie della porzione data.

Oppure generalmente alla superficie del segmento maggiore ABECD si tolga la superficie del segmento minore BEC, e rimarrà la superficie della porzione ABCD.

## XL.

Fig.37. *Misurare la superficie di qualsivoglia settore sferico* FABCF, *ovvero* FADCF.

Si

Si misuri la superficie del segmento sferico ABC, ovvero ADC, e vi si aggiunga la superficie curva del cono AFC, e si avrà l'intera superficie del settore sferico.

## XLI.

*Misurare la superficie sferica del velo com-* Fig. 34
*preso dalle mezze circonferenze* AEB, BFC, CGD, DHA.

Tagliſi dal lato AD la retta AI uguale al raggio AO, e sarà la superficie del velo uguale al rettangolo della retta ID nell'intera circonferenza ABCD.

## XLII.

*Misurare la superficie di una sferoide ellit-* Fig. 37.
*tica longa a forma d'ovo.*

Pongasi la DE uguale alla FC, e gli si tiri la parallela CG, che concorra con l'asse minore prolungato nel punto G, dal quale come centro con l'intervallo GC descrivasi l'arco GHA, e ponendosi la retta I uguale all'arco CHA, ed insieme all'asse minore BD, fra l'istessa I, ed il semiasse DF si trovi la media proporzionale K, e il circolo descritto col raggio K sarà uguale alla superficie della sferoide.

## XLIII.

*Misurare la superficie d'una sferoide com-* Fig. 38.
*pressa a forma di cipolla.*

Ponendosi come prima la DE uguale alla CF, e divisa in mezzo la FE nel punto G descrivasi la parabola BGD, e fra la retta, o asse maggiore AC, e la curva parabolica BGD si trovi la media proporzionale H, ed il circolo descritto dal raggio H sarà uguale alla superficie della sferoide.

## XLIV.

*Misurare la superficie curva d'un conoide* Fig. 39.
*parabolico.*

Pongasi la retta BE uguale alla BD, e congiunta AE si faccia come EA ad AD, così AF ad FD: indi pongasi la retta GH uguale alle due rette EA, FD prese insieme, e la retta I uguale alla terza parte della base AC, e fra le due rette GH, I si trovi la media proporzionale K; ed il circolo fatto col raggio K sarà uguale alla superficie curva del dato conoide parabolico.

## XLV.

Fig. 40. *Misurare la superficie d'un conoide iperbolico, che abbia per diamentro, o lato trasverso la retta* EB, *per lato retto, o parametro la retta* BF, *e il centro* O.

Si ponga nell'asse BD la retta BG uguale alla metà del perametro BF, e come GO ad OB, così si faccia BO ad OH, e fra le due rette BO, OH si trovi la media proporzionale IO, e per il vertice I si descriva un'altra iperbola che abbia i lati reciprocamente proporzionali a' lati della prima iperbola, e sarà come lo spazio iperbolico BKLDB alla metà del quadrato della retta AD, così la superficie del conoide ABC al circolo della sua base; onde misurata la metà del quadrato della retta AD, lo spazio iperbolico BKLDB, ed il circolo della base, si avrà per quarto termine proporzionale la superficie del conoide iperbolico.

## XLVI.

Fig. 26, 26. *Misurare la solidità d'un prisma.*

Si misuri la base, indi si moltiplichi per l'altezza, e si avrà la sua solidità.

## XLVII.

*Misurare un tronco di prisma* ABCDEFO LMGF.

Si sciolga, o divida il tronco in tanti piramidi, o pi-

o piramidi, ed unite insieme le loro misure si avrà la misura del tronco dato.

## XLVIII.

*Misurare la solidità, o mole d'una piramide.* Fig. 27. 28. dalla 10. X.

Si misuri la base, indi si moltiplichi per l'altezza, e la terza parte del prodotto sarà uguale alla mole, o solidità della piramide.

## XLIX.

*Misurare un tronco di piramide* ABCDEHGF. Fig. 29. e 35.

Si misuri la piramide intera, e la parte levata, e la loro differenza sarà la misura del tronco di piramide che resta.

Ovvero se i piani ABCD, EFGH fossero paralleli si trovi la differenza della base ABCD sopra la base EFGH, e questa differenza si moltiplichi per la perpendicolare HK, ed alla terza parte di questo prodotto si aggiunga il prodotto della base minore EFGH nell'istessa perpendicolare HK, e si avrà la mole, o solidità dell'intero fusto piramidale.

Ovvero si trovi la retta AB, il quadrato della quale sia uguale alla base ABCD, e la retta BC, il quadrato della quale sia uguale all'altra base EFGH, e si dispongano in maniera tale, che comprendano l'angolo ABC di gradi 120; e descritto intorno al triangolo ABC il circolo, si moltiplichi il quadrato del raggio DF per HK altezza del fusto dato, ed il prodotto sarà uguale all'istesso fusto di piramide.

## L.

*Misurare la solidità di qualsivoglia cilindro, ovvero tronco di cilindro* ABCDEFGH. Fig. 30. e 31.

Si moltiplichi la base del cilindro con la perpendicolare KI, ed il loro prodotto sarà la misura del cilindro dato.

## L I.

Fig.32. *Misurare qualsivoglia colonna , o cilindrico* ABCD *di qualsivoglia base* ABC.

Si misuri la base e la perpendicolare , e moltiplicando l'una coll'altra , il prodotto sarà la misura del dato cilindrico.

## L I I.

*Misurare qualsivoglia ungula solida* ABCE *eretta sopra del semicircolo* ABC.

Intendasi sopra il triangolo ABC una piramive , che abbia l'istessa altezza, o l'istesso vertice E del'ungula data , e misurata la piramide , la mole, o solidità dell'ungula, sarà il doppio della piramide istessa.

Ovvero si moltiplichi il quadrato del raggio BO per l'altezza perpendicolare BE, e piglino $\frac{2}{3}$ del prodotto per misura dell'ungula.

## L I I I.

*Misurare il cuneo rimanente* AFEDC.

Dall'intero cilindrico sottraggasi l'ungula solida ABCE , e resterà la misura del cuneo rimanente.

## L I V.

Fig.33. *dalla* 11. *X.* *Misurare qualsivoglia cono* ABCDI.

Si moltiplichi la base colla perpendicolare , e la terza parte del loro prodotto sarà la misura del cono dato.

## L V.

Fig.33. *Misurare un tronco di cono* ABCDEFGH.

Si misuri prima l'intero AIC , e da quello sottraggasi il cono tagliato EIG, e si avrà la misura del tronco rimanente.

Ovvero si ponga la retta AB uguale al raggio AK, e la retta BC uguale al raggio EO; e disposte le rette AB , BC sicchè contengano un angolo di 120 gradi si descriva il circolo intorno al triangolo ABC ; e moltiplicando l'istesso cir-

co-

colo con la perpendicolare del tronco, sarà il prodotto uguale al tronco dato.

## LVI.

*Misurare la sfera.*

Si moltiplichi il circolo massimo col suo dia- Fig. 34.
metro, o asse della sfera; poichè $\frac{2}{3}$ di questo lo- *dalla*
ro prodotto sarà la misura della sfera data. 31. X.

## LVII.

*Misurare qualsivoglia settore sferico* FAB CF. Fig. 35.

Si misuri la superficie del dato segmento, cioè *dalla*
il circolo del raggio BA, e poi si moltiplichi 36. X.
per il raggio BF, poichè il terzo di questo prodotto sarà uguale al dato settore.

Nell'istessa maniera moltiplicando il circolo del raggio DA col raggio FD della sfera, e pigliando il terzo del loro prodotto, si avrà la misura del rimanente settore FADCF.

## LVIII.

*Misurare qualsivoglia segmento sferico* ABC.

Dal settore sferico FABCF sottraggasi il cono AFC, e si avrà la misura del rimanente segmento sferico ABC; siccome aggiunto al settore sferico FADCF l'istesso cono AFC, si avrà la misura dell'altro segmento sferico ADC.

## LIX.

*Misurare una porzione di sfera* ABCD *compresa fra circoli.*

Dal segmento maggiore AED sottraggasi il segmeto minore BEC, e resterà la misura della porzione data.

## LX.

*Misurare la solidità d'una sferoide longa* ABCD *intorno all'asse* AC. Fig. 19. *dalla*

La sferoide ovale alla sfera circonscritta sta 30. XII.

come il quadrato dell'asse maggiore AC al quadrato dell'asse minore BD; onde misurati gli assi AC, BD, e la sfera, e fatto come il quadrato di AC al quadrato di BD così la sfera di un' altra grandezza, sarà questa la grandezza, o misura della sferoide.

Ovvero qualsivoglia sferoide è $\frac{2}{3}$ del cilindro circoscritto; e però misurato il cilindro si avrà la misura della sferoide.

## LXI.

Fig.19. *Misurare la solidità della sferoide, com-*
*dalla* *dalla pressa* ABCD *intorno all' asse minore* BD.
30.*XII.* La sferoide compressa a forma di cipolla alla sfera inscritta sta come il quadrato dell'asse maggiore AC al quadrato dell'asse minore BD, onde misurati questi quadrati e la sfera, e trovata la quarta grandezza proporzionale, sarà questa uguale alla data sferoide compressa.

*dalla* Ovvero la sferoide compressa è $\frac{2}{3}$ del cilindro
34.*XII.* a se circoscritto, che abbia per base il circolo del raggio AE, e per asse la retta BD, e però misurato il cilindro si avrà la misura ancora della sferoide.

## LXII.

Fig.19. *Misurare qualsivoglia porzione di sferoide*
*dalla* KCL.
31.*XII.* Il segmento, o porzione della sferoide KCL sta al segmento sferico corrispondente MCN della sfera circoscritta alla sferoide come il quadrato di KI il quadrato di MI, ovvero il quadrato di BE al quadrato di FE, ovvero come la sfera alla sferoide; e però misurati i quadrati, ed il segmento sferico, ovvero la sfera, sferoide, e segmento sferico, si avrà la misura della porzione, o segmento della sferoide.

Che

Che se la porzione di sferoide fosse obliqua, come PAB, trovato il diametro QE, e posta AZ uguale a QU, sarà la porzione obliqua data uguale alla porzione retta TAS; e però misurata questa si avrà la misura ancora dalla porzione data.

## LXIII.

*Misurare qualsivoglia tronco di sferoide* BKLD *ovvero* BKDP.

Sottraggasi dalla porzione maggiore BCD, e BCP la porzione minore KCL, o KCD, e resterà la misura del tronco dato.

## LXIV.

*Misurare il conoide parabolico* ABCDE. Fig.41.

Si moltiplichi la base, o circolo ABCD con l'asse, o perpendicolare EF, e la metà del prodotto sarà uguale al dato conoide parabolico. *dalla* 27.*XII.*

Ovvero rispetto a qualsivoglia conoide anche obliquo, intendasi circoscritto al dato conoide un cilindro che abbia l'istesso asse, e l'istessa base del conoide, e misurato il cilindro sarà il conoide $\frac{1}{3}$ del cilindro istesso.

## LXV.

*Misurare qualsivoglia porzione di conoide parabolico* AEG. Fig.41. *dalla* 39.*XII.*

Dividasi in mezzo la retta AG diametro della base della porzione conoidale, e tirata la retta HI parallela all'asse FE, sarà la porzione AEG al conoide intero AEC come il quadrato di HI al quadrato di FE; e però misurati i quadrati, e l'intero conoide, si avrà la misura della porzione data.

## LXVI.

*Misurare qualsivoglia tronco di conoide parabolico* AKLC, *ovvero* AGC. Fig.41.

Dall'intero conoide AEC ſottraggaſi la porzione KEL, ovvero AEG, e reſterà la miſura del dato tronco conoidale.

## LXVII.

Fig.42. *Miſurare il conoide iperbolico* ABCDE.

*dalla* Troviſi il lato traſverſo dell'iperbola AEC, il
39,e40. quale ſia EF; e pongaſi FH uguale ad FI metà
*XII.* dell'iſteſſo lato traſverſo; e intendaſi deſcritto dentro al dato conoide il cono AEC, il quale ſarà al conoide circoſcritto come GF a GH; e però miſurate le rette GF, GH, ed il cono, ſi avrà la miſura del dato conoide iperbolico.

## LXVIII.

Nell'iſteſſa maniera ſi può *miſurare il conoide obliquo* AKO, *ovvero una porzione*
Fig.42. *di conoide iperbolico*.

Dividendo in mezzo il diametro della baſe nel punto N, e prolungando il diametro dell'iperbola NKL, ſicchè la retta KL doppia di KI ſia il lato traſverſo, ed LM ſia uguale ad IL; poichè il conoide obliquo, ovvero porzione di conoide ſarà al cono AKO inſcritto come la retta MN ad NL.

## LXIX.

Fig.42. *Miſurare qualſivoglia tronco di conoide iperbolico* APQC, *ovvero* AOC.

Dall'intero conoide iperbolico AEC ſottraggaſi la porzione conoidale PEQ ovvero AEO, e reſterà la miſura del tronco conoidale dato.

# DELLA GEOMETRIA PRATICA.

## LIBRO V.

*Il quale contiene varj Problemi ed Operazioni.*

SE le figure ed i corpi, i quali si debbono misurare, fossero sempre regolari ed esatti, quali appunto si considerano nella Geometria, e descritti furono nelle definizioni poste avanti al libro III., potrebbero certamente bastare per la misura loro le varie Proposizioni fin quì spiegate, o dimostrate nei passati libri. Ma poichè deve la Geometria Pratica stendersi alla misura di quelle superficie ancora, e di quei corpi, che per lo più sono irregolari, sarà necessario l'aggiugnere nel V. ed ultimo libro alcune operazioni, o Problemi, che nella pratica ed esercizio di misurare sogliono più frequentemente accadere. Queste poche, ma più principali notizie serviranno non solo per far conoscere più vivamente l'utilità delle passate Proposizioni; ma altresì per dare lume ed esempio, affinchè coll'istesse leggi, o artifizio comprendasi la maniera, con cui si possa poi misurare qualsivoglia data grandezza, con quell'esattezza maggiore, che sarà possibile; non dovendosi certamente in questa parte sperare quel rigore, e quella precisione, che ne' passati libri ritrovasi.

PRO-

# PROPOSIZIONI.

## I.

*Misurare un' angolo accessibile* ABC, *per esempio la cantonata di un muro.*

Si apra talmente il compasso ficchè i lati si adattino alle linee, muraglie, o lati dell'angolo dato ABC; poichè misurato col quadrante l'angolo contenuto da' lati del compasso, si avrà la misura dell'angolo dato.

Ovvero si prolunghino nel piano le rette, o lati AB, CB, ficchè facciano l'angolo DBE uguale all'angolo dato ABC; e misurando col quadrante l'angolo DBE, si avrà la misura ancora dell'angolo dato ABC.

## II.

Fig. 1. *Misurare l' angolo inaccessibile* ABC.

Trovisi il luogo D, dal quale partendo il raggio visuale DB sia posto in diritto, o coincida con la retta BC; e similmente un'altro luogo E, dal quale partendo il raggio visuale EB sia posto per diritto col lato BA: e misurando l'angolo BDE fatto dai raggi DB, DE, siccome anche l'angolo BED fatto dai raggi EB, ED, si sottraggano questi dall'intera somma di due retti, cioè da gr. 180, e quello che resta, farà la misura dell'angolo DBE, ovvero dell'angolo dato ABC.

## III.

Fig. 2. *Tirare per il dato punto* C *una parallela alla data linea retta* AB *accessibile.*

Per il dato punto C stendasi la linea CD, e misurato l'angolo ABC gli si ponga uguale l'an-

angolo DCF, e sarà la linea EF parallela alla data retta AB.

Ovvero posta la linea, o filo CG perpendicolare ad AB, e la retta EF perpendicolare sopra la CG, sarà la retta istessa EF parallela alla retta data AB.

## IV.

*Tirare per il punto dato* C *la parallela ad una linea retta data inaccessibile* AB.

Si misuri l'angolo ACB, e si trovi un' altro luogo D, nel quale i raggi visuali indirizzati all'estremità A, B facciano l'angolo ADB uguale all'angolo ACB; indi misurato l'angolo ADC gli si ponga uguale l'angolo BCE; e sarà la retta CE parallela alla data retta AB.

## V.

*Tirare la perpendicolare ad una linea inaccessibile* AB *dal dato punto* C.

Per il dato punto C si tiri la DE parallela ad AB, e sopra la retta DE si alzi la perpendicolare CF, che sarà perpendicolare ancora sopra la AB.

## VI.

*Prolungare la retta* AB *interrotta da un muro, o altro impedimento* CD. Fig. 9.

Preso qualsivoglia punto E, si alzi sopra la retta AB la perpendicolare EF, la quale prolunghisi più o meno secondo il bisogno; e formandosi intorno al punto F co' raggi visuali, o linee FA, FG gli angoli EFA, EFG fra loro uguali, si pigli la retta FG uguale ad FA, e facendo l'angolo FGH uguale all'angolo FAE, sarà la retta GH posta per diritto alla retta data AB; ovvero l'istessa retta data AB sarà prolungata fino in G.

## VII.

## VII.

Fig. 6. *Misurare una linea, o lunghezza* AB *accessibile da una parte sola* A.

Preso qualsivoglia punto C si misurino gli angoli CAB, ACB, e la base AC; e si avrà la misura ancora del lato, o lunghezza data AB per la 16. del libro II.

## VIII.

*Misurare una linea, o lunghezza* AB *affatto inaccessibile.*

Preso qualsivoglia punto C si misuri l'angolo ACB fatto da ragi visuali, o linee CA, CB; e preso un altro luogo D si misuri l'angolo ADB, siccome ancora l'angolo ADC, BDC, ACD, BCD; e, poichè nel triangolo ADC si conosce il lato CD, e gli angoli sopra la base, si conosceranno per la 16. del II°. ancora i lati AC, AD; siccome per l'istessa ragione si conosceranno i lati BC, BD: e però, conoscendosi nel triangolo ACB i lati AC, CB, e l'angolo contenuto ACB, si conoscerà ancora per la 13.ª del II°. il lato, o base, o lunghezza data AB.

## IX.

Fig. 7. *Misurare un' altezza data* AB *accessibile nel punto* A:

Sia il piano, o linea orizontale AC, e posto l'occhio in C si misuri l'angolo ACB fatto dal raggio visuale CB colla linea orizontale CA; e misurato il lato CA si avrà nel triangolo rettangolo CAB il lato AC e gli angoli A, B, C; e però per la I.ª del II°. si conoscerà anchè l'altro lato, o altezza data AB.

Ovvero posto perpendicolare all'orizonte il bastone DE, e però parallelo ad AB, trovisi il punto C, sicchè il raggio visuale, che passa per C, E, arrivi in D; e misurato CD, DE, CA, si tro-

trovi il quarto termine proporzionale, il quale sarà la misura di AB.

## X.

*Misurare la linea, o altezza data* AB *affatto inaccessibile.*

Tirata, o concepita, come prima, la linea orizzontale CA si misuri l'angolo ACB; e preso qualsivoglia altro punto D si misuri l'angolo contiguo CDB; poichè misurato il lato CD si avrà per la 16. del II°. la misura ancora del lato DB; e però nel triangolo rettangolo DAB, conosciuta la base DB, e tutti gli angoli, si conoscerà ancora per la I. del II. il lato, o altezza AB.

## X I.

*Levare la pianta accessibile* IGHK *ec. ovvero descrivere sopra la data retta* AB *una pianta, o figura simile alla pianta data* IGH, K *ec.* Fig. 8.

Si misuri l'angolo HGI, e gli si ponga uguale l'angolo BAC; e come GH a GI facciasi AB ad AC. Così misurato l'angolo GHK, e postogli uguale l'angolo ABF facciasi come GH ad HK, così AB a BF: e così successivamente a ciascun'angolo della figura data si faccia uguale l'angolo corrispondente nella figura ABF ec. ed intorno agli angoli corrispondenti uguali si pongano i lati proporzionali, e sarà la pianta, o figura descritta simile alla data.

## X I I.

*Levare la pianta* IGHK *inaccessibile.*

Si misurino tutti gli angoli inaccessibili I, G, H, K, e siccome ancora tutti i lati; e fatti gli angoli A, B, C, D, E, F uguali agli angoli corrispondenti G, H, I, K, ed intorno agli angoli uguali i lati proporzionali, sarà la figura, o pianta ABCDEF simile alla pianta data LGHK.

X I I I.

## XIII.

*Misurare qualsivoglia superficie piana di pavimento, muro, campo, tetto, palco, parato, luce di finestre, sezione di canale, o fiume ec.*

Osservisi a qual figura, o superficie riducasi la superficie data, se a rettangolo, quadrato, trapezio, poligono, rettilineo, ellisse, parabola, iperbola ec. e poi si misuri con quell'istesse regole, con le quali si è dimostrato doversi misurare ciascuna di quelle figure.

Ma poichè può talora succedere, che la figura, o superficie data non corrisponda esattamente ad alcuna di quelle figure già numerate, dividasi, se egli è possibile, in varie parti, ciascuna delle quali possa ridursi ad alcuna delle figure già conosciute; poichè raccogliendosi, o unendosi insieme le misure di quelle parti, si avrà la misura di tutta intera la superficie data.

Che se finalmente neppure con questo mezzo potesse la superficie data ridursi a figure di nota e facile misura, ma fosse in qualche parte maggiore, o minore, allora richiedesi attenzione grandissima per valutare quell'eccesso, o difetto; il che si ottiene con la pratica ed esperienza, affinchè il divario si renda quasi insensibile.

## XIV.

*Misurare qualsivoglia superficie curva di muro, pozzo, colonna, volta.*

Osservisi se la data superficie curva sia cilindrica, o di tronco di cono, o trapezio cilindrico, o superficie di ungula, o di compimento di ungula, o di cilindro parabolico, ellittico, iperbolico ec. e poi si misuri con quell'artifizio, o regola, che si è dimostrata nelle proposizioni del passato Libro.

## XV.

### *Misurare qualsivoglia superficie di volta.*

Sogliono per lo più le volte delle camere, sale, chiese, logge ec. essere formate, o composte di superficie cilindriche circolari; e secondo la varia combinazione, o maniera, con cui si uniscono, o dispongono le parti delle superficie cilindriche, si distinguono le volte in cinque classi, la formazione e misura delle quali qui brevemente dimostreremo.

La prima chiamasi *a mezza botte*, ed è la superficie di mezzo cilindro diviso per l'asse; e se per avventura non fosse in tutte le sue parti di ugual larghezza, ovvero i semicircoli delle testate fossero disuguali, ridurebbesi a superficie di mezzo tronco di cono segato altresì per l'asse. In questi casi dunque è facilissimo l'avere la misura di quelle superficie, o volte, da quello che si è dimostrato nella Prop. 30. 31. 36. del libro IV; siccome ancora generalmente si potrà avere la misura di qualsivoglia volta considerata come superficie di un qualche cilindrico qualunque egli sia, o di qualsivoglia base, o testata, dalla Prop. 32. dell'istesso libro IV.

La seconda volta dicesi *Tribuna*, ed è la superficie dell'emisfero, o mezza palla. Questa sarà doppia del circolo, che le serve di base, e che sarebbe il circolo massimo della sfera. Che se talvolta fosse superficie non di sfera, ma di conoide parabolico, elittico, iperbolico ec. allora dovrebbesi misurare come si è prescritto nella Prop. 42. 43. 44. 45. del lib. IV.

La terza dicesi a *cielo di carozza*, o *volta a schifo alla Romana*, avendo per base un quadrato, per altezza il raggio del circolo inscritto al quadrato istesso, ed avendosi insieme le superficie cilindriche nel punto sublime. La superficie di questa volta è doppia del quadrato della sua base,

se, ovvero quadrupla del quadrato fatto dalla perpendicolare, o altezza. Che se fosse di altezza, o rigoglio minore, sicchè fosse come circoscritta ad un segmento sferico, o intorno ad una mezza sferoide, allora sarebbe la superficie della volta alla superficie inscritta del segmento sferico, o della sferoide come il quadrato al circolo inscritto; e però misurata la superficie rotonda, e fatto come 11, a 14. così l'istessa superficie rotonda ad un quarto numero, sarà questa la misura della superficie della volta.

La quarta dicesi *vela antica*, e formasi contagliare la superficie dell'intera tribuna o emisfero con quattro circoli alzati perpendicolarmente sopra i lati del quadrato inscritto nel circolo, o base dell'emisfero. Questa superficie, o volta è uguale ad un circolo, e misurasi come alla Prop. 41. del lib. IV.

La quinta è la *volta a crociera*, la quale è composta di quattro spicchj, o parti di cilindro, che si uniscono insieme; e sono quelle porzioni di superficie cilindrica che rimangono, tolte le superficie dell'ungula, e però si devono misurare come si è prescritto nella Prop. 34. del libro IV.

Che se per avventura alcuna di queste volte fosse interrotta con lunette, finestre, o altra sezione, devesi allora dalla misura dell' intera superficie, o volta sottrarre la misura e grandezza di qualsivoglia lunetta, o finestra: il che più facilmente si potrà conoscere coll'esperienza, essendo impossibile il prescrivere una regola costante, e che applicare si possa a tutti i casi, i quali per lo più sogliono essere varj ed irregolari.

## XVI.

*Misurare la mole, o capacità di una cassa, sacco, pozzo.*

L'interna capacità, area, o voto della cassa devesi considerare come un prisma, e però devesi mi-

misurare come si è dimostrato nella Prop. 46. del libro IV.

Nell'istessa maniera il sacco riducasi a cilindro, e però devesi misurare come nella Prop. 50. del lib. IV.

A cilindro altresì riducesi il pozzo, se sia circolare, e di uniforme ed ugual larghezza nelle sue parti. Ma se egli va ristringendo, devesi in tal caso ridurre a tronco di cono, e però misurarsi come si è insegnato nella Prop. 56. del lib. IV. Il che devesi ancora osservare nel misurare la solidità, o mole delle colonne.

## XVII.

*Misurare la mole di un mucchio di grano.*

Riducasi, quando prima non fosse, più prossimamente che sia possibile, il mucchio istesso ad un cono, o conoide parabolico, o più tosto iperbolico, e poi si misuri secondo la varia figura, ch'egli avrà, o la conoide, che rappresenta.

## XVIII.

*Misurare la capacità di un tino, barile, botte ec.*

Il tino riducasi a tronco di cono, e però devesi misurare come l'istesso tronco secondo la Prop. 56. del libro IV.

La botte può concepirsi come composta di due tronchi di Cono, i quali si uniscono insieme con le loro maggiori basi nel mezzo, o cerchio massimo dalle botte; e però misurati que' tronchi di cono, si avrà la misura dell'intera botte.

Ma poichè può succedere, che la botte si accosti colla sua figura più tosto a due tronchi di sferoide, ovvero di conoide parabolico, secondo la varia curvità, o piega dalle tavole, perciò secondo la varietà di questi casi si misurino i tronchi istessi, e si avrà la misura della botte.

L'istesso intendasi de' barili ancora, se abbiano i fon-

à fondi, ovvero teſtate circolari. Che ſe queſte foſſero ovali, ſi conſideri il barile iſteſſo come compoſto di due tronchi o di cono, o di ſferoide, o di conoide, che abbiano per baſe un eliſſe; e miſurati i tronchi, ſi avrà la miſura del barile.

## XIX.

*Miſurare la capacità di qualſivoglia vaſo irregolare.*

Si riempia il vaſo iſteſſo di acqua, o grano, e poi l'iſteſſo grano, o acqua pongaſi in un vaſo di figura regolare; poichè miſurato in tal maniera lo ſpazio occupato in queſto ſecondo vaſo dall'acqua, o grano, ſi avrà la capacità, o ſpazio ancora del primo vaſo irregolare.

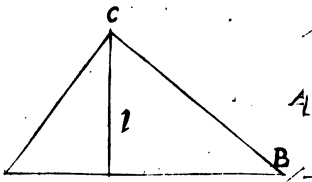
## XX.

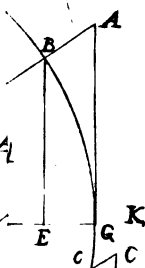
*Miſurare la mole di qualſivoglia corpo irregolare.*

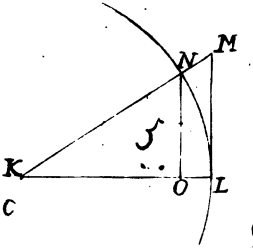
Empiaſi perfettamente un vaſo di acqua, indi bagnati gli orli del vaſo pongaſi nel vaſo iſteſſo ſotto il livello, o ſuperficie dell' acqua il corpo, la mole del quale deveſi miſurare in maniera tale che il vaſo rimanga pieno, e tutta l'acqua, che eſce dal vaſo per cedere il luogo al corpo ſommerſo, poſſa raccoglierſi e miſurarſi, ponendola in un'altro vaſo regolare; poichè miſurata la mole di queſta acqua traboccata, ſi avrà la miſura del dato corpo.

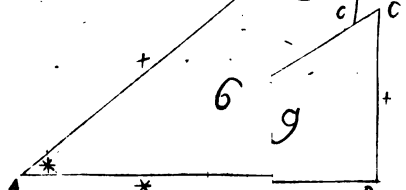
IL FINE.

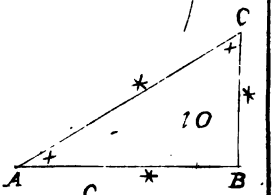
# LIBRO II.

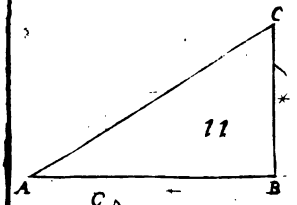


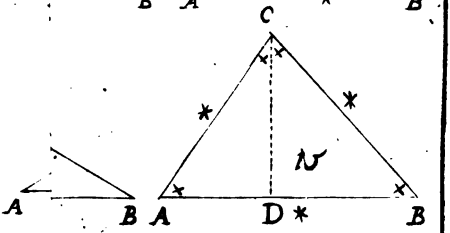



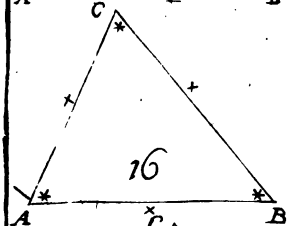



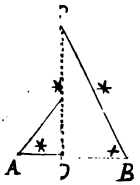



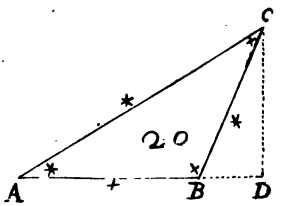



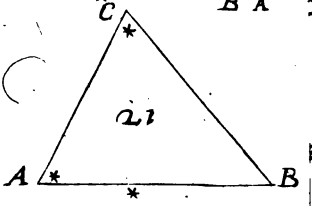



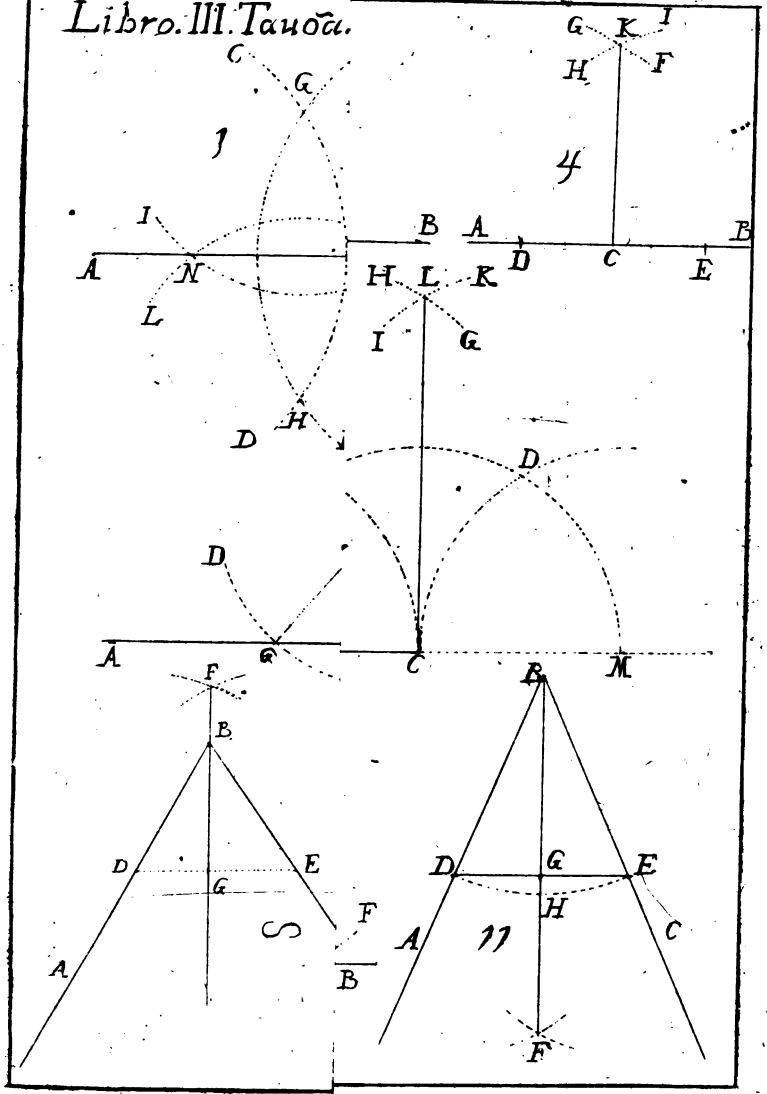



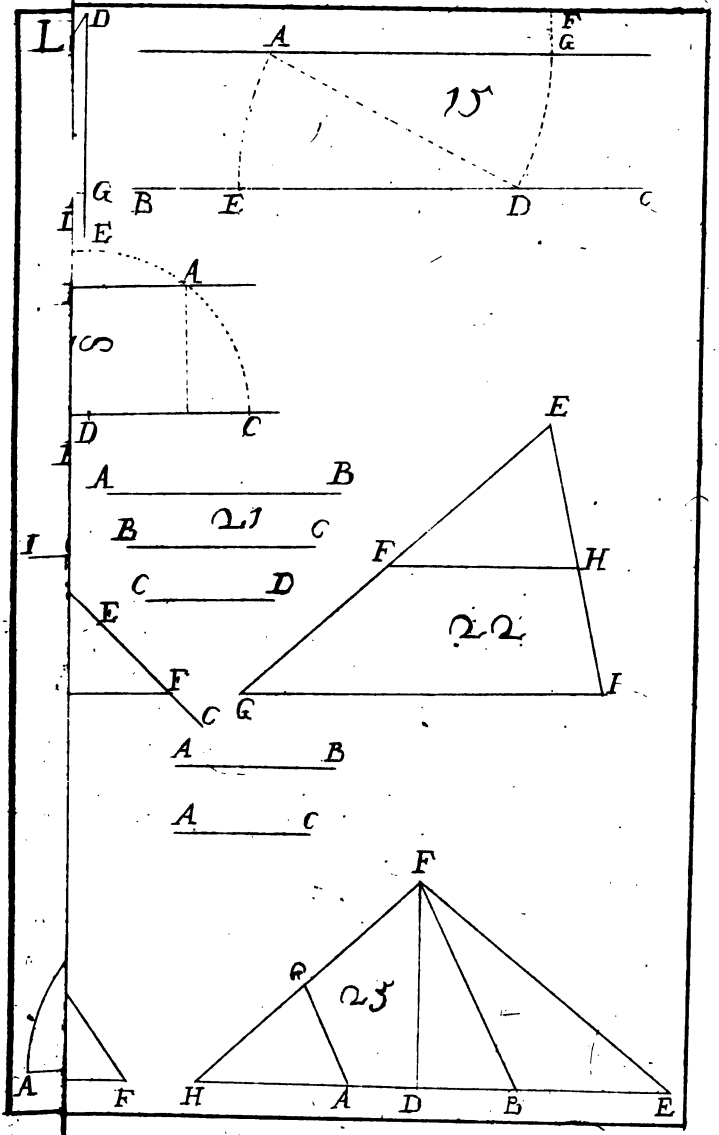



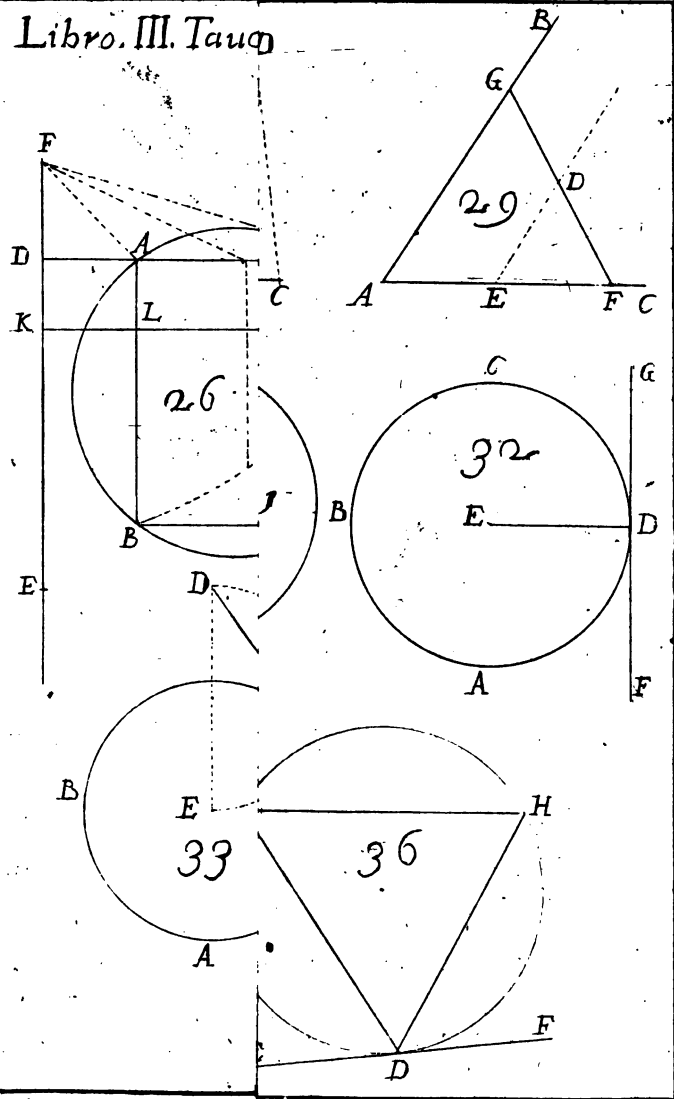

metria



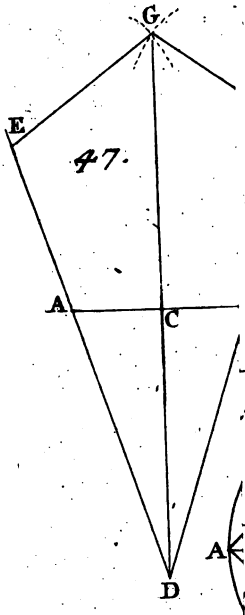

UNIV OF WISH.

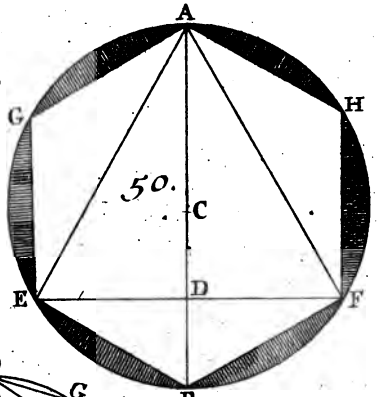

L
D
A
F
G
15
G
B
E
D
C
E
A
D
C
E
A
B
B
C
F
H
C
D
E
F
C
G
I
A
B
A
C
F
G
A
F
H
A
D
B
E

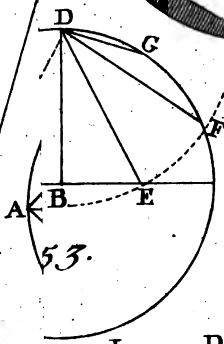
Libro. III. Tauo

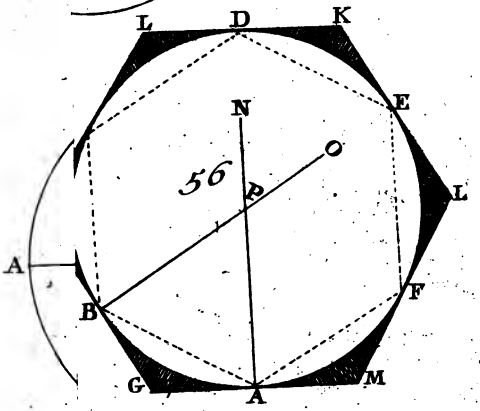



UNIV. OF MICH.

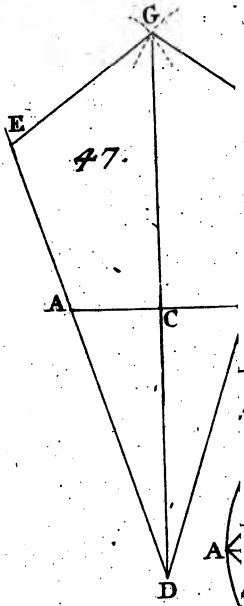


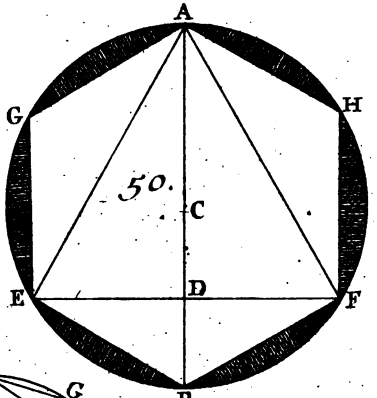



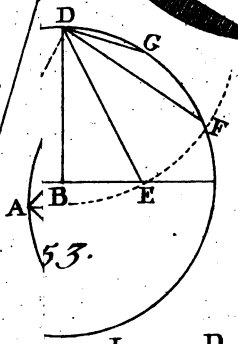



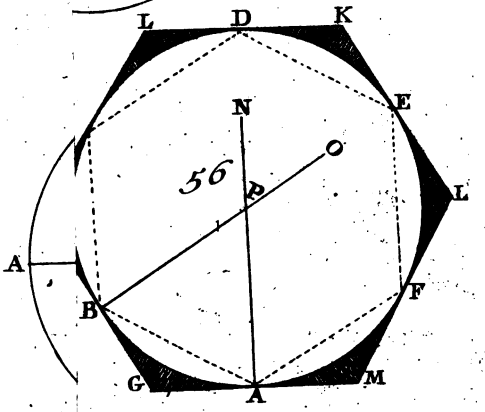




OF MICH.

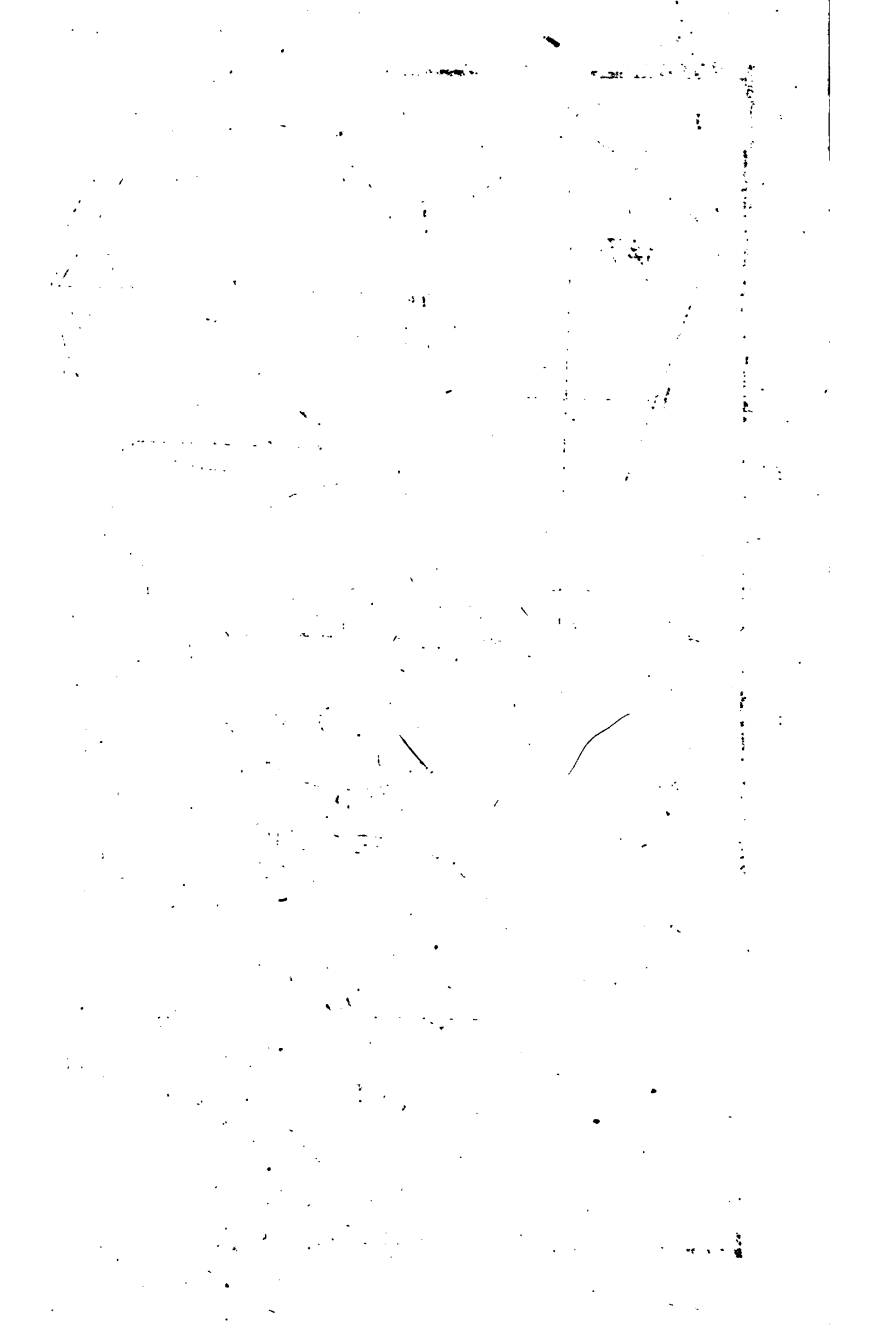


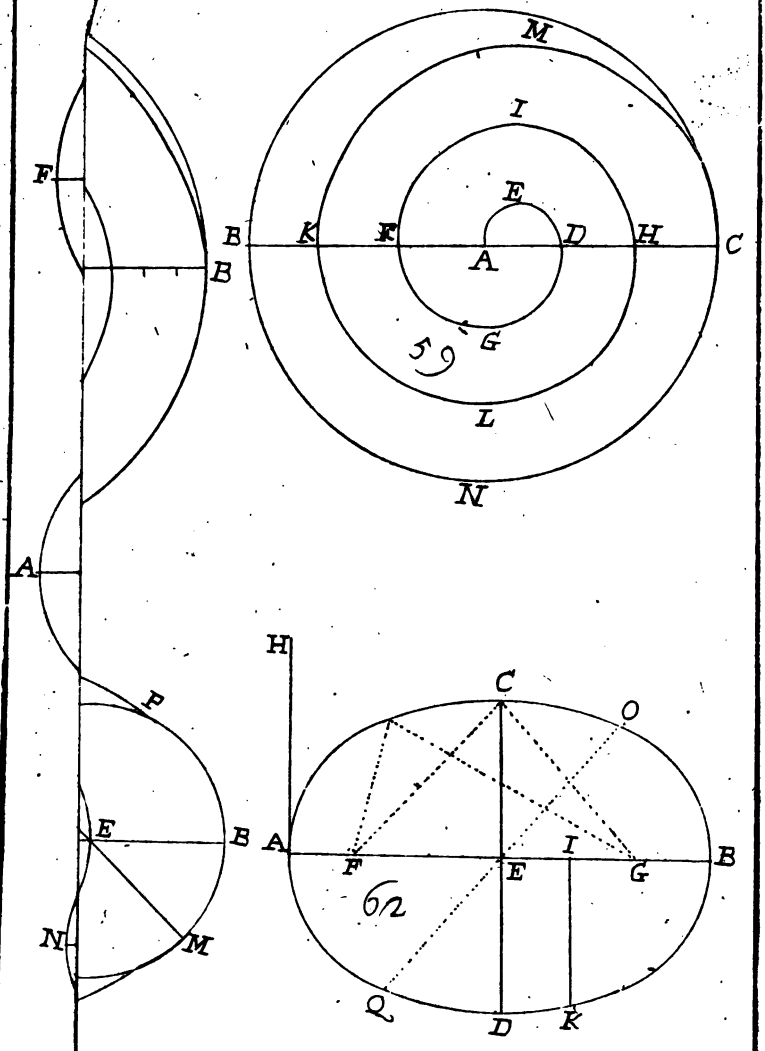



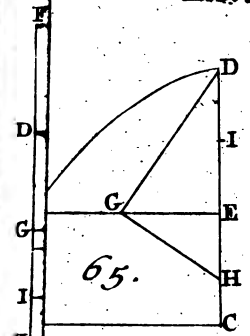




OF MICH.

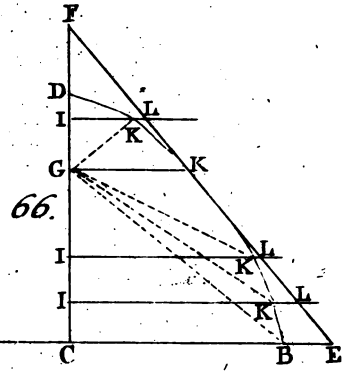



M
I
E
F
B
K
F
D
H
C
A
B
G
59
L
N
A
H
C
O
F
E
B
A
F
E
I
G
B
62
N
M
Q
D
K

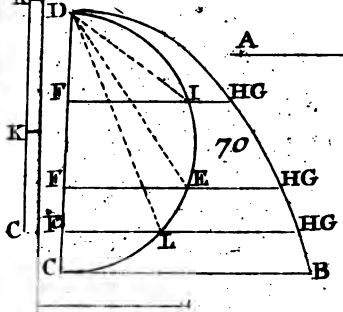



F
D
G
I
K
D
I
G
E
H
C

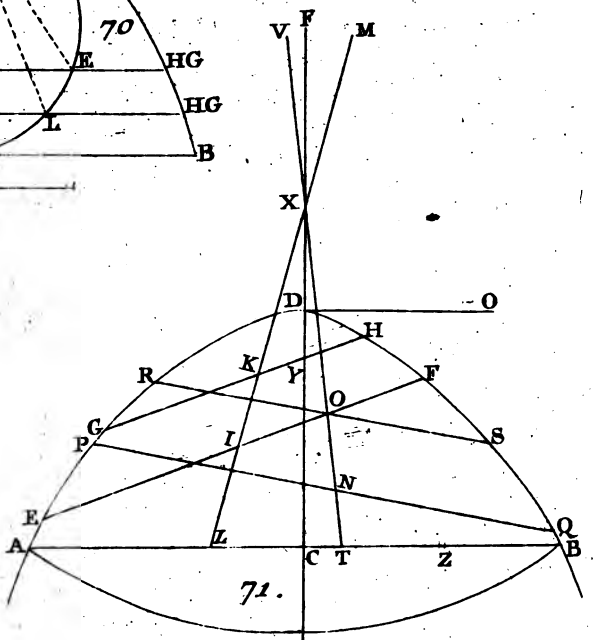
65.


F
D
I
G
I
I
L
K
K
L
K
L
K
A
C
B
E

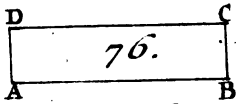
66.

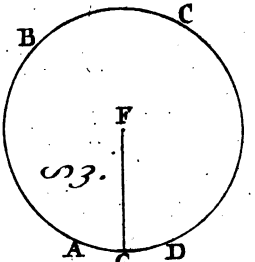

K
C
D
F
I
HG
F
E
HG
F
HG
L
C
B

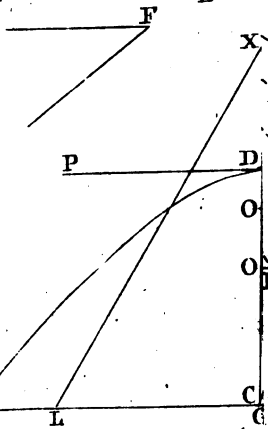
70.

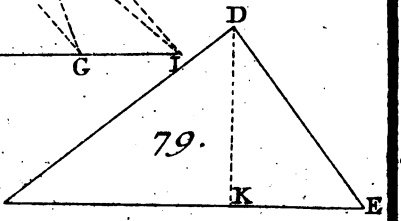

V
F
M
X
D
O
H
R
K
Y
F
O
G
S
P
I
N
E
Q
A
L
C
T
Z
B

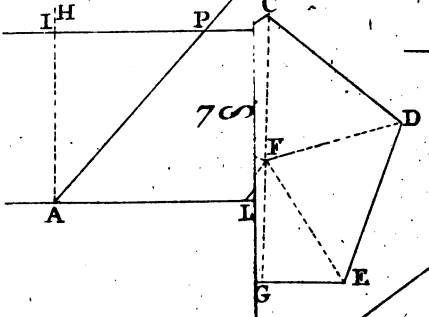
71.


D
C
76.
A
B


B
C
F
53.
A
G
D

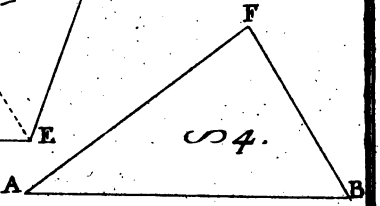

F
X
D
P
D
O
O
E
G
I
A
L
C
G

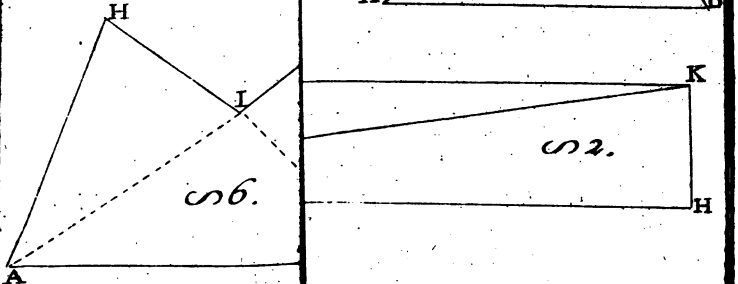

D
79.
C
K
E

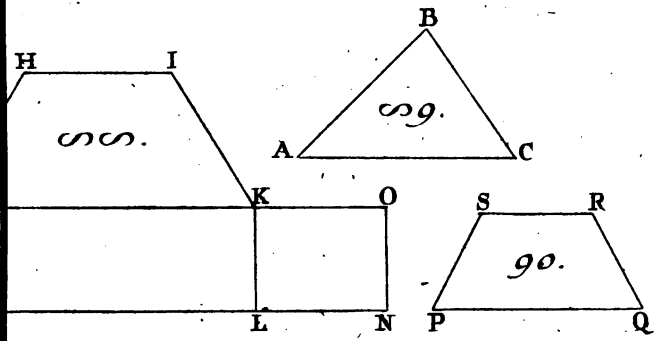

I
H
P
C
78
D
F
A
L
G
E

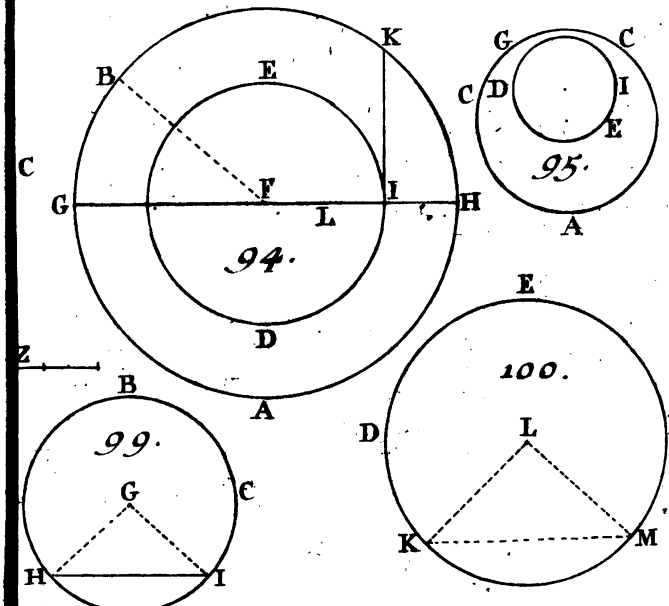
Z

X

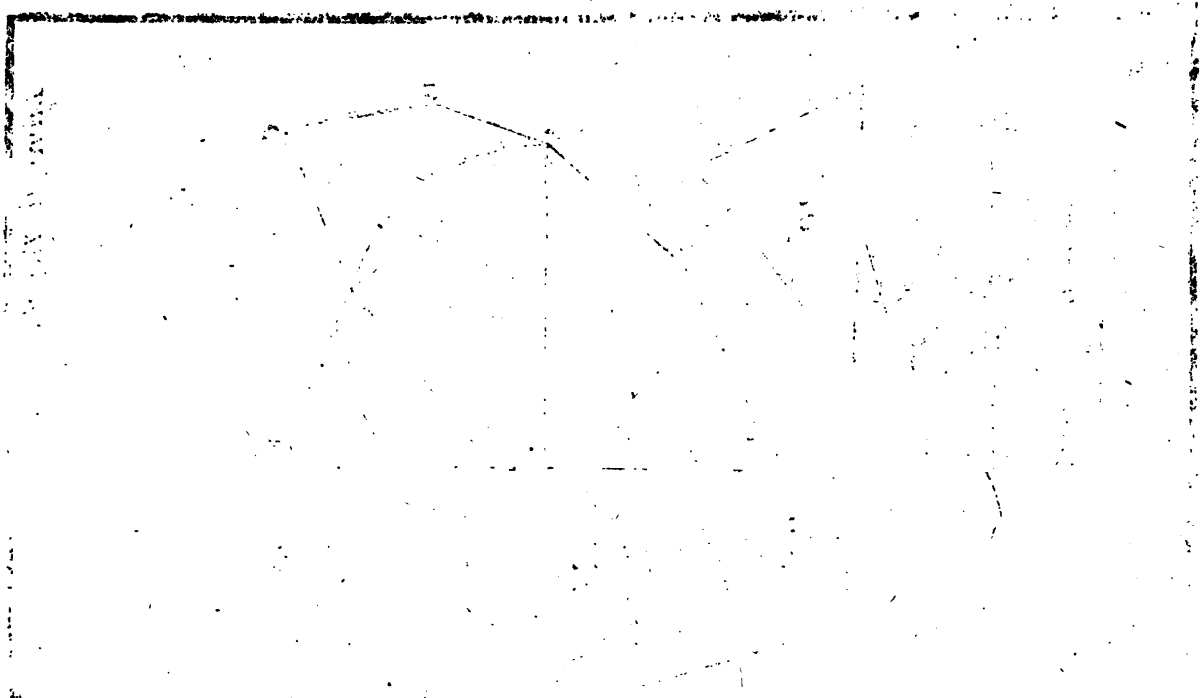

F
54.
A
B


H
I
56.
A
K
52.
H

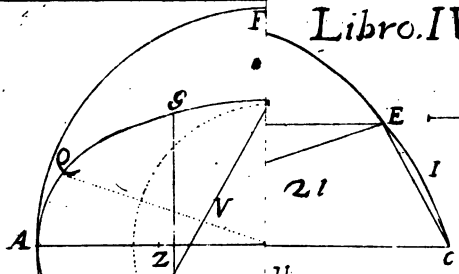


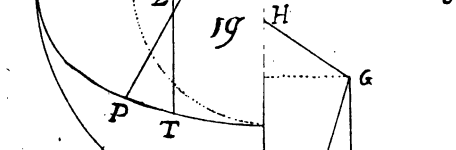



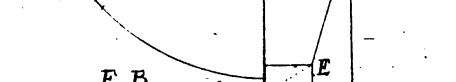

PUBLIC OF MICH

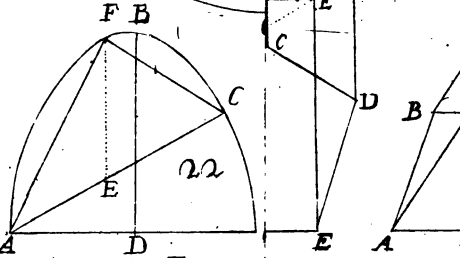


# Libro. IV. Tavola II.



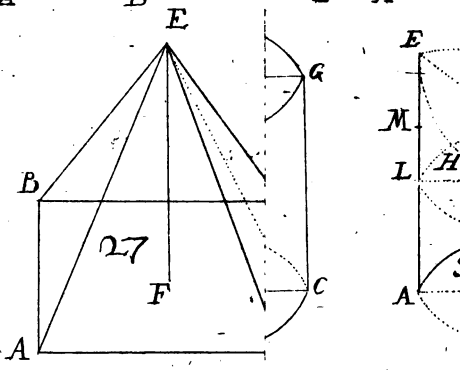









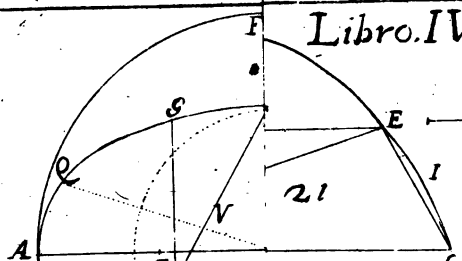


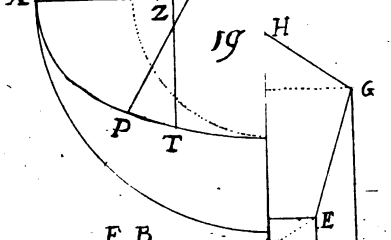


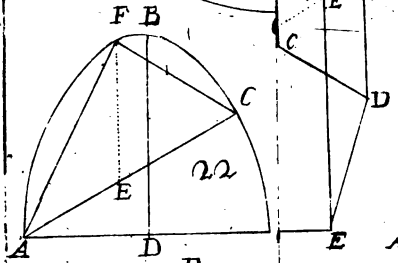
BIBLIOTECA MICHELANGELO

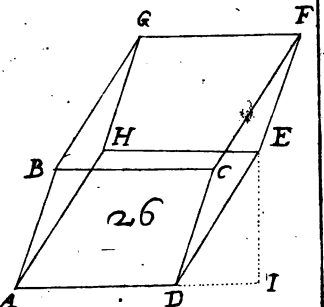


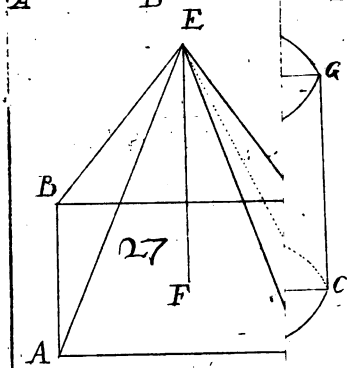
# Libro. IV. Tavola II:

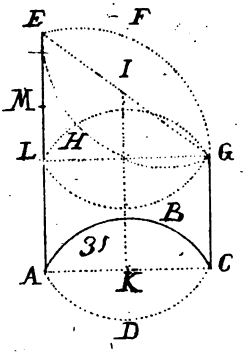


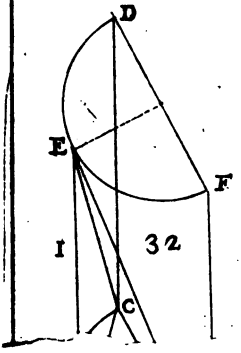



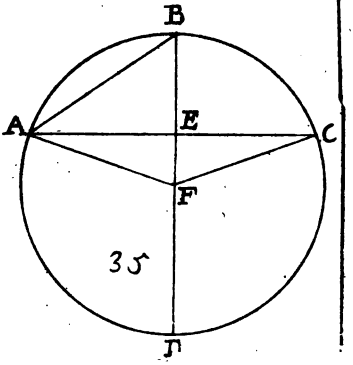



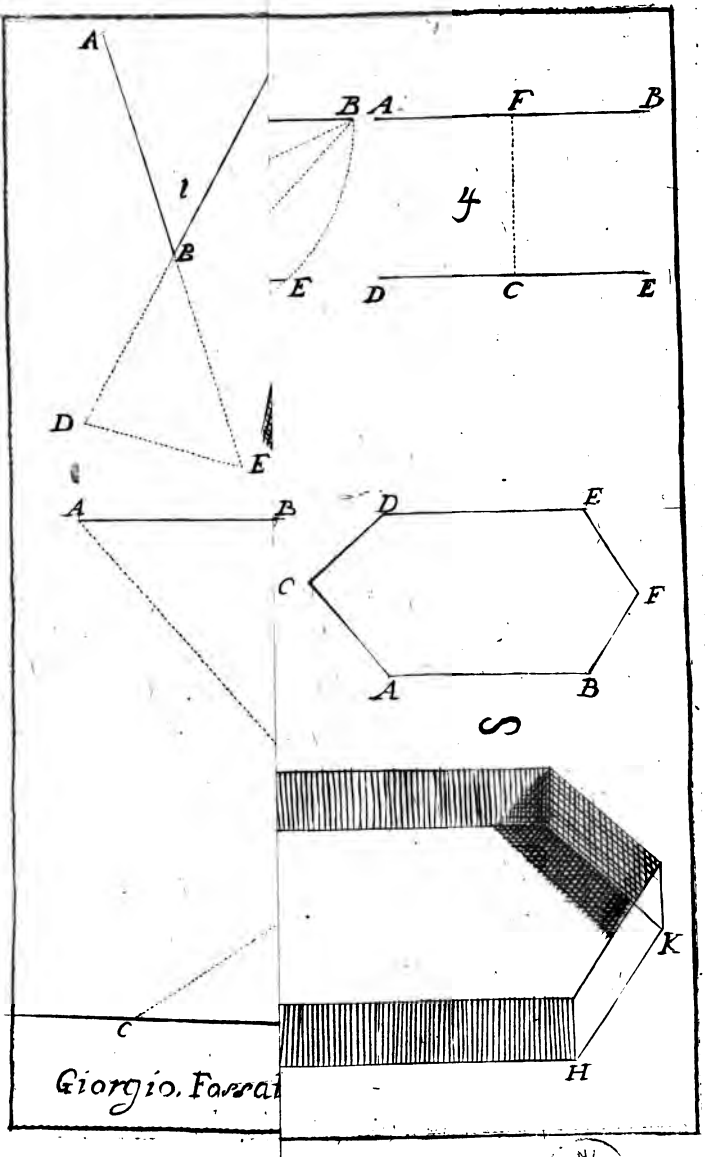




STAMPA DI MILANO

## IV Tauola III.




A
B
l
E
D
E
B A F B
4
D C E
A B
D E
C F
A B
5
K
C
H
Giorgio. Fossa