

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

The Gift of

WILLIAM H. BUTTS, Ph.D.

A.B. 1878 A.M. 1879

Teacher of Mathematics

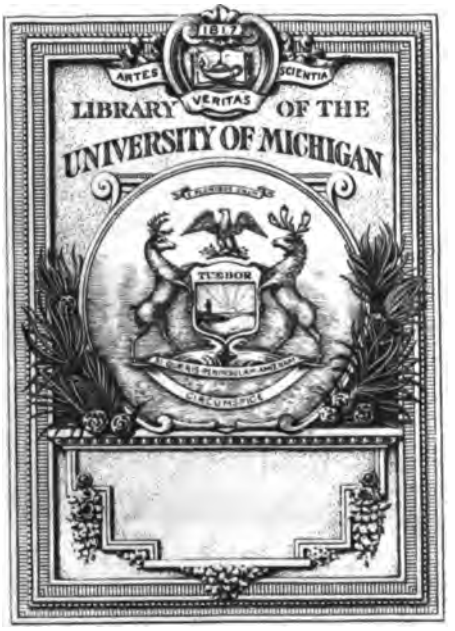
1898 to 1922

Assistant Dean, College of Engineering

1908 to 1922

Professor Emeritus

1922



QA
35
.B7196

Ф. IX, 11-а

NUOVI ELEMENTI
DELLE
MATEMATICHE UNIVERSALI
CONTENENTI
L'ARITMETICA, L'ALGEBRA, E LA GEOMETRIA

Con facile, e particolar metodo esposti ad uso della Studiosa Gioventù

DAL

P. MICHELANGELO BONOTTO
DOMENICANO.



IN VENEZIA,
Appresso L'EREDE DI NICCOLÒ PEZZANA.

MDCCLXXII.
CON LICENZA DE' SUPERIORI, E PRIVILEGIO.

Πρὸς πάσας μαθήσεις, ὡς τὰ πολλὰ ἀποδέχεσθαι, ἴσμέν τε ὅτι τῷ ὅλῳ καὶ παντὶ διοίσει ἠμμένος τε γεωμετρίας καὶ μή.

Sappiamo che quegli, il quale ha gustato la Geometria, è sommamente più atto ad apprendere tutte l' altre Scienze, di colui, che n' è affatto ignaro. Plat. nel Libro VII. della Repub.

QA
35
.B71

Gift
Professor William H. Butts
10-14-1991

A SUA ECCELLENZA

IL SIG. NICCOLO' VENIER

DI M. SEBASTIAN PROCURATOR DI S. MARCO.

12-7-39 Mem.

ELla è ſempre ſtata diſtinta prerogativa de' nobili e autorevol Signori il proteggere ed incoraggire le Belle Arti, e le Scienze; e preſtare ai lor coltivatori aſſiſtenza e favo-

favore. La Storia di tutti i Secoli ne somministra in tal proposito assai numerosi gli esempj; e quindi senza riccorrere alla più rimota Antichità col favellar di que' Sovrani, che furono d'ogni sorta di sapere dichiarati Protettori, basterammi sol di passaggio l'accennare gli onorevoli nomi di un Memmio, d'un Mecenate, e di un Augusto, non meno illustri e rinomati presso la tarda posterità per questo lor singolar pregio, che per le cospicue dignità e sublimi impieghi, di cui vennero fregiati. In tal guisa i gran Signori furono ben a ragione riguardati come altrettanti celesti Luminari e Pianeti, che con gli benefici loro influssi alle sublunari creature forza, movimento, e vita impartiscono; e assai opportunamente ancora ai tiepidi Soli, alle matutine rugiade, ai correnti rivi e ruscelli si assomigliarono, da cui non pur le annose robuste piante traggon nutrimento e ristoro; ma i piccioli arbusti in particolare, e i teneri crescenti germogli: ai quali siami lecito l'assomigliar del pari me stesso, e le mie picciole deboli produzioni.

Siccome però non a tutte le giovani germoglianti piante la stessa favorevol sorte veggiam succedere; così riconoscer debbo ancora per

mia ſingolar ventura, che l'Eccellenza Voſtra ſiaſi degnata di accogliere benignamente le mie non irragionevoli brame, e con ſomma gentilezza e bontà accordato mi abbia il permeſſo di fregiare col ſuo riſpettabil nome la preſente mia Opera, che delle Matematiche Univerſali, *cioè a dire, dell' Aritmetica, dell' Algebra, e della Geometria è un nuovo compendioſo Trattato di quelle Scienze, ch'eſſer non le debbono certamente foreſtiera provincia; e che per l'ampio uſo a cui ſi eſtendono con la lor particolare applicazione in tutta la Civil Società, e nei ben regolati Governi, per ſovrana forza di aggradevole neceſſità eſſer dovranno un giorno delle ſue riſleſſioni e ſtudj il ſoggetto.*

Deſtinata com'è Voſtra Eccellenza, per l'ammirabil coſtituzione di queſto Ariſtocratico Governo, e pel rango eminente della Nobiliſſima Famiglia, ad occupare un tempo, ſeguendo l'incominciata onorevol carriera, le più coſpicue Politiche ed Economiche Magiſtrature, ben potrà conoſcere col ſuo perſpicace intendimento, che non altronde, fuori delle Matematiche Diſcipline, trar ſi poſſono quelle certe infallibili cognizioni, per cui l'indomita violenza de' diſcordi elementi ſi regola ed af-

frena, servir facendosi utilmente agli importanti oggetti della Pubblica sicurezza e felicità, dell' Acque, per esempio, che sono di questa Gran Capitale le maravigliose mura, e di que' Reali Fiumi, che formano delle Venete Provincie l'alberi, il traffico, e la ricchezza, che non da altri principj derivano le sicure regole di ben costruire que' galeggianti Magazzini, che le dovizie dell' Oriente, d'Affrica, e d'Europa a noi trasportano, e di quelle veleggianti Torri, che formano d'una Nazion Marittima la principal estimazione e difesa, che non altronde finalmente si traggono i regolari piani di quelle inespugnabili moli e ripari, che l'impeto affrenano d'un potente nemico, preservandone gli Stati dall'invasione con tutto 'qual grande apparato di Guerriere Macchine, che nelle fatali circostanze di un necessario male a preservazion degli Stati medesimi ritrovar seppe l'umano ingegno. Nè questa si vantaggiosa idea dell' applicate Matematiche in Lei esser deve come in tutte l'altre persone di buon discernimento fornite, e perciò giusti estimatori delle cose, men ancora in più distinta e particolar maniera; giacchè non è abbastanza, che nell' ottima educazione procacciatale nella sua tenera, e verde età dall' avvenente cura de'

Geni-

Genitori non picciola parte vi ebbero queſte utiliſſime Scienze.

Quivi ben vede ogn' uno quanto opportuno cader potrebbe l' incontro di favellare di Lei, e dell' Eccellentiſſima ſua Famiglia, tra le primarie di queſta noſtra Repubblica, sì feconda d' illuſtri e riguardevoli Perſonaggi: ciò ch' eſſer ſuole il principal ſoggetto delle volgari Dedicatorie. E però incominciar potrei dalla ſingolare di Lei affabilità e ſoavità di tratto, dalla ſua generoſa e liberale magnificenza, che niuno certamente potrà negare eſſer del numero delle Virtù Sociali, e tra queſte le più luminoſe, e tali, che ſtar non poſſono naſcoſte, ma che con dolce inviſibil catena ſi attraggono gli animi degli eguali parimenti e degli inferiori. Ma ben mi accorgo che la di Lei modeſtia non ſoffre ch' io mi avanzi in sì delicato argomento. Egli è ben noto ancora che le glorioſe azioni de' ſuoi Progenitori vengono da Lei riguardate come non ſue, e ſeppur come ſue, come perfetti modelli ſoltanto di virtuoſa pratica imitazione. E ben l' Eccellenza Voſtra ne diede manifeſti gli eſempj nell' onorata intrapreſa carriera, e nel primo ſuo così applaudito Reggimento di Chioggia, nella qual Città amminiſtrando incorrotta Giuſtizia, rallegrando il

popo-

popolo coll' abbondanza de' viveri, conservando la quiete pubblica col tenere a freno gli uomini di mal affare, proteggendo l' Arti, e gli Studj, e finalmente ad ogni condizion di persone benefizj e grazie dispensando, vive ancor fresca, e vivera lungo tempo in avvenire negli animi di que' Cittadini la memoria del felice suo Governo. Quest' onorata carriera col volger degli anni sarà da Lei proseguita e terminata dietro le traccie luminose dell' illustre Genitore, delle più cospicue Dignità e de' più sublimi autorevoli impieghi meritamente dalla Patria fregiato.

Riserbandomi adunque gli encomj e le lodi a tempi e circostanze migliori, cioè quando la di Lei modestia dovrà pur cedere alle Pubbliche universali acclamazioni, altro non mi resta al presente, che al valido patrocinio di Vostra Eccellenza caldamente raccomandare con questo picciol dono, che le offerisco, l' umilissima mia persona; mentre con la più perfetta stima e col più profondo rispetto ho l' onore di essere

DI VOSTRA ECCELLENZA

Umilis. Ossequios. Obbligatis. Servitore
il P. Michelangelo Bonotto dell' Ord. de' Pred.

L' Au-

L'Autore a chi legge.

MAeſtoſo principale ingreſſo, e diretto ſentiero alla ſcienza delle Divine, ed umane coſe, cioè a dire alla vera Filoſofia, ſin dai più antichi tempi eſſer ſi credettero le Matematiche cognizioni: quel ſommo luminoſo grado di perfezione, a cui la Fiſica, e la Meccanica recate veggionſi a giorni noſtri, da null' altro ſappiamo eſſer derivato che dalla dovuta applicazione della Quantità sì Continua come Diſcreta alle oſſervazioni de' Naturali Fenomeni: la ſteſſa Società e la Civil vita non potrebbero in certa guiſa ſuſſiſtere, nè conſervarſi in fiore ſenza l' ajuto di queſte cognizioni dovutamente applicate alla diviſione de' terreni, alla direzione dell' acque, all' Arti, alle Manifatture, ed al Commercio.

Oltre gli accennati vantaggi, che dai Matematici ſtudj alla Civil Vita, ed alle Scienze ridondano, non picciolo certamente ſi è quel profitto, che l' uomo per sè in particolare viene a ritrarne. Sono in fatti le Univerſali, o ſia Pure Matematiche, cioè a dire l'Aritmetica e la Geometria, al dire del Divino Platone, quell'ali pronte e gagliarde, per cui l' Umano Intendimento s'innalza alla ſcoperta del vero; laonde col mezzo loro dalla ſfera aſtraendoſi delle ſenſibili qualità, che d'ogni parte lo circondano, ſovente ingannevoli e fallaci, e d'una all'altra verità aſcendendo e trapaſſando, ſi avvezza così inſenſibilmente ai più ſublimi ragionamenti ſenza l'uopo ancora de' Logici precetti, e delle Dialettiche iſtruzioni: e quindi poſcia vengono a formarſi quelle Menti perſpicaci e profonde, che tanto ſi ammirano, e che col nome di *Geometriche*, *e Calcolatrici* ſogliono tra noi chiamarſi.

Non è dunque da maravigliarſi ſe queſt' illuſtre Scienza, e di sì grandi vantaggi per l'uomo feconda, con ſomma ſollecitu-

citudine e cura ſtata ſia sì dagli Antichi, che dai Moderni coltivata. Tra i primi s'ebbe a diſtinguere in particolar maniera il Megareſe Euclide, l'Opera del quale in Quindici Libri diviſa, in cui tutte le principali proprietà della Quantità Continua e Diſcreta vengono ſottilmente eſpoſte e compreſe, può dirſi a ragione un compiuto Trattato di Matematiche Pure, ed Univerſali. Dopo il riſtabilimento delle Scienze nella noſtra Europa il credito e la riputazione di queſto grand' Uomo fece in guiſa, che i più rinomati Autori, i quali ſi applicarono a tali ſtudj, lui ſolo preſero per guida, e nell' emendare e correggere i di lui Scritti, nell' illuſtrare ed iſpiegarne il ſentimento impiegarono le loro migliori attenzioni e fatiche. Guari diverſo non fu di quelli il penſiero, che per renderſi benemeriti della ſtudioſa Gioventù coi compendioſi metodi delle Matematiche Scienze gli Elementi di Euclide loro propoſero per eſemplare; nel qual propoſito tutti a gara cercando la maggior chiarezza e facilità, ciaſcuno dal ſuo canto ſi credette d'eſſer meglio degli altri riuſcito.

Quantunque però aſſai grande ſia il merito del Greco Autore, aſſai commendabili ſiano degli accennati Scrittori le fatiche e gli ſtudi, dopo la metà del paſſato Secolo s'incominciò ad oſſervare come perfezionar potevaſi il metodo di Euclide con un ordine migliore, più piano, e naturale, procedendo facendo le più ſemplici e chiare cognizioni alle più aſtruſe e compoſte; in grazia particolarmente de' Giovani, che nel primo applicarſi agli ſtudi, dalle apparenti, o reali difficoltà eſſer ſogliono bene ſpeſſo ſgomentati, e riſpinti: giacchè ſolo a pochi e rari intelletti è conceſſo il ſingolar dono di aver la penetrazione e la profondità dei Deſcartes, e dei Paſcali. Quindi l'eſperienza ed il buon ſucceſſo diede a divedere quanto preferibile foſſe queſto nuovo Metodo al primo.

Io in queſti miei Elementi di Matematiche Univerſali, che mi ſono propoſto di pubblicare, ho procurato di ſeguire

in

in gran parte l'approvato Metodo de Moderni, singolarmente de celebri *la Chapelle* e *Sympſon*, che sembrano esserſi tra gli altri maggiormente distinti. Con quanta sincerità confesso io pure ciò che devo agli accennati illustri Autori, con altrettanta fiducia non dubitero di affermare d'aver impiegata ogni maggior attenzione e cura per rendere il loro Metodo dovunque fu mai possibile più facile e piano; e ciò col ridurre a semplici chiare Definizioni alcune delle loro Proposizioni, ed altre parecchie a semplici Corollarj o sia conseguenze delle principali; donde sperar mi giova eziandio che a star n' abbiano i Giovani un altro considerabil vantaggio, di avvezzar l' intelletto al continuato Raziocinio e Discorso: senza la qual prerogativa di distinzione altro a dir vero stata non sarebbe la mia fatica, se non quella di portare, come dicesi, *legna al bosco*, e *nottole a Atene*, trovandosi in oggi anche la nostra Italia di buoni Elementari Trattati di questa Scienza abbondevolmente fornita. Veder potranno gl' intendenti, e la studiosa Gioventù in particolare, il cui maggior profitto e vantaggio ho divisato di procurare con la pubblicazione di questa mia Opera, se quello che io mi sono proposto di fare, l' abbia in fatti dovutamente eseguito.

NOI

NOI RIFORMATORI

Dello Studio di Padova.

AVendo veduto per la Fede di Reviſione, ed Approvazione del *P. F. Filippo Roſa Lanzi* Inquiſitor General del Santo Officio di Venezia nel Libro intitolato: *Nuovi Elementi delle Matematiche contenenti l' Aritmetica, l' Algebra, e la Geometria con facile, e particolar metodo eſpoſti ad uſo della ſtudioſa Gioventù dal P. Michelangelo Bonotto ec. MS.* non v' eſſer coſa alcuna contro la Santa Fede Cattolica, e parimenti per Atteſtato del Segretario Noſtro, niente contro Principi, e buoni coſtumi, concediamo Licenza all' *Erede di Niccolò Pezzana*, che poſſi eſſere ſtampato, oſſervando gli ordini in materia di Stampe, e preſentando le ſolite Copie alle Pubbliche Librarie di Venezia, e di Padova.

Dat. li 20. Luglio 1772.

Sebaſtian Zuſtinian Rif.

Alviſe Vallareſſo Rif.

Franceſco Moroſini 2°. Cav. Proc. Rif.

Regiſtrato in Libro a Carte 104. al Num. 867.

Davidde Marcheſini Segr.

Adi 23. Agoſto 1772.

Regiſtrato al Magiſtrato Eccellentiſs. contro la Beſtemia in Libro a Carte 48.

Andrea Grattarol Segr.

NO-

NOZIONI PRELIMINARI.

PRIMA.

Definizione è un discorso, che spiega la natura di qualche cosa; oppur che spiega quella voce, di cui si serviamo per significar la cosa medesima.

Le definizioni si distinguono in *Reali*, che espongono la generazione delle cose, cioè il modo, con cui quelle cose possono esser fatte; e in *Nominali*, in cui si enumerano le parti, o i segni sufficienti a distinguere dall'altre cose quelle di cui si tratta.

SECONDA.

Proposizione è un discorso, in cui presentasi alla mente nostra qualche cosa da considerare.

Qualsivoglia Proposizione ha due parti, cioè *l'Ipotesi*, e la *Tesi*.

L'Ipotesi espone le condizioni, sotto le quali qualche cosa è affermata, o negata.

La Tesi poi contiene ciò, che viene o affermato, o negato.

TERZA.

Teorema dicesi quella proposizione, in cui si propone qualche cosa da dimostrare.

Le parti principali del Teorema sono la *Proposizione*, in cui si esprime qual cosa sotto certe condizioni possa convenire a un' altra, e qual no; e la *Dimostrazione*, in cui si espongono le ragioni, per cui l'intelletto capisce, e conclude, che ciò convenga alla cosa medesima.

QUARTA.

Problema chiamasi quella Proposizione, in cui si ordina qualche cosa da farsi.

I Problemi hanno tre parti;

La Proposizione, in cui si accenna qual cosa sia da farsi;

La Risoluzione, in cui ordinatamente si espongono gli atti, ciascun da se, co' quali si fa ciò ch' era da farsi; e

La Dimostrazione, in cui fatte quelle cose, che nella Risoluzione si ordinano, chiaramente si mostra essersi ottenuto il bramato effetto.

QUINTA.

Lemma appellasi quella Proposizione, che serve a dimostrarne un' altra più principale, e di maggior conseguenza; e si pone separatamente da quella, acciò la serie delle Proposizioni non resti confusa.

SESTA.

Assioma dicesi quella Proposizione, la di cui verità è talmente certa, ed evidente, che subito risplende a qualsivoglia mente senz' alcuna dimostrazione.

SETTIMA.

Postulato è un Problema così facile, ed evidente, che non ha bisogno di risoluzione, nè di dimostrazione alcuna; ovvero

Tutto ciò, che si deduce immediatamente da una definizione, e afferma, o nega che qualche cosa possa esser fatta, chiamasi *Postulato*.

OTTAVA.

Corollario chiamasi quella Proposizione, che agevolmente si deduce da un'altra già dimostrata; ovvero è l' applicazione d' una Proposizione generale ad un caso particolare.

NONA.

Scolio dicesi ciò, che si soggiunge alle Definizioni, o alle Proposizioni, o ai Corollarj, quando contengono qualche cosa degna di osservazione particolare. Cioè ne' Scolj si rischiarano le cose oscure, si risponde ai dubbj, s'indica l'uso delle dottrine, vengono accennati la storia e i fonti delle invenzioni, e s'introducono l'altre cose, che sono degne di saperfi.

DECIMA.

Quantità, o *Grandezza* dicesi tutto ciò, che ha parti, o che si concepisce aver parti; ovvero tutto ciò, che può essere accresciuto, o diminuito. D'un tal genere sono il corpo, la superficie, la linea, il numero, il tempo, il moto, la velocità, la misura, il peso, ecc.

UNDECIMA.

Quantità Discreta, o *Disgiunta*, chiamasi quella, che è composta di parti diserete, e separate: come il numero.

DUODECIMA.

Continua, o *Quantità continua*, è quella, le di cui parti sono continue, connesse, e l'una all' altra unite: come il corpo, la superficie, ecc.

TER-

TERZADECIMA.

Geometria è quella Disciplina, che contempla tutti i generi, e proprietà della quantità continua; ovvero è la Scienza delle cose estese, in quanto che sono terminate.

QUARTADECIMA.

Aritmetica è una Disciplina, in cui si dimostrano le proprietà, gli uffizj, e gli accidenti della quantità discreta, cioè de' numeri.

L' Arte poi di computare i numeri dicesi *Aritmetica Volgare*, o *Pratica*.

QUINTADECIMA.

Aritmetica specioſa, o *Logiſtica ſpecioſa* è quella Disciplina, che insegna il computo delle specie, cioè delle quantità espresse colle lettere dell' Alfabeto, la quale ancora chiamasi *Computazione Algebraica*.

SESTADECIMA.

Aritmetica Universale dicesi quella Dottrina, che abbraccia l' una e l'altra Scienza di computare: vale a dire la Numerica, e la Specioſa, o sia Algebraica.

DEGLI ELEMENTI DELL' ARITMETICA UNIVERSALE

LIBRO PRIMO.

DEL CALCOLO DEGL' INTERI.

Definizione Prima.

1. *Unità* è quella denominazione, per cui qualsivoglia cosa dicesi una.

Definizione Seconda.

2. *Numero* è l'aggregato, o la moltitudine di due, ovvero più unità.

Corollario.

3. Dunque l'unità non è numero, ma è il principio d'ogni numero; e il primo numero è Due, che contiene due unità, il secondo è Tre, ecc.

Definizione Terza.

4. I nomi, de' quali si serviamo nel numerare sono *Uno*, *Due*, *Tre*, *Quattro*, *Cinque*, *Sei*, *Sette*, *Otto*, *Nove*, *Dieci*; cioè di dieci unità è composta una *Decina*; due decine diconsi *Venti*; tre *Trenta*; quattro *Quaranta*; cinque decine chiamansi *Cinquanta*; sei *Sessanta*; sette *Settanta*; otto *Ottanta*; nove *Novanta*; dieci decine *Cento*, ovvero compongono un *Centinajo*; dieci centinaja *Mille*, ovvero formano un *Migliajo*; di mille migliaja, o di dieci centinajà di mille si compone un *Milione*; di dieci centinaja di mille milioni formasi un *Bilione*; di dieci centinaja di mille bilioni si forma un *Trilione*; di dieci centinaja di mille trilioni è formato un *Quadrilione*; e così in seguito de' quadrilioni sono composti i *Quintilioni*; de' quintilioni i *Sestilioni*, ecc.

Quando poi nel numerare si arriva al numero decennario, ripetasi il principio di numerare, ma si esprima insieme il numero decennario. Così dieci ed uno s' indicano per *Undici*; dieci e due per *Dodici*; parimenti venti più sei per *Ventisei*; ottanta più quattro per Ottantaquattro, ecc.

Definizione Quarta.

5. I primi nove numeri, compresavi l'unità, si chiamano *Numeri Digiti*, oppure *Unità*.

Il nu-

Il numero dieci poi, e i di lui moltiplicati; cioè venti, trenta, quaranta, ecc. si appellano *Numeri Articoli*.

Oltre a ciò i numeri inferiori al numero dieci diconsi *Semplici*; e i numeri superiori al numero nove si chiamano *Composti*.

Definizione Quinta.

I *Caratteri*, o le *Figure*, di cui si serviamo nell' Aritmetica per esprimere qualsivoglia numero sono 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, i quali significano uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove, a' quali aggiungesi la *Cifra* 0, che anche dicesi *Zero*, e da se stessa nulla significa, ma aggiunta a destra degli altri caratteri (quando diciamo a *destra*, ovvero a *sinistra*, sempre devesi intendere *di chi scrive*) li rende dieci volte maggiori; oppure serve a riempiere i luoghi vacui. 6.

Acciò poi si esprima qualsivoglia numero co' predetti caratteri, oltre al semplice e proprio valore, ne hanno di più un altro per ragion del luogo: cosicchè qual si sia carattere solitario, o posto in primo sito, cioè nel luogo più a destra, denota le semplici unità; e (procedendo sempre dalla destra verso la sinistra di chi scrive) il carattere posto nel secondo sito, o nel secondo luogo, significa tante decine, quante unità egli ha; nel terzo luogo tante centinaja, quante unità altresì egli ha; nel quarto luogo tante unità di mille; nel quinto decine di mille; e nel sesto centinaja di mille. Il carattere poi collocato nel settimo luogo significa tanti dieci centinaja di mille, cioè tanti milioni, quante unità egli ha; nell' ottavo luogo esprime le decine di milioni; nel nono le centinaja di milioni; nel decimo luogo le migliaja di milioni; nell' undecimo le decine di migliaja di milioni; nel duodecimo tante centinaja di migliaja di milioni, quante unità contiene.

Dipoi, procedendo col medesimo ordine, negli altri sei luoghi conseguenti si hanno l'unità, le decine, le centinaja, le migliaja, le decine di migliaja, e le centinaja di migliaja de' bilioni. Inoltre si danno sei luoghi ai trilioni, sei conseguentemente ai quadrilioni, sei ai quintilioni, ecc.

In que' luoghi poi, in cui non vi sono caratteri, sempre scrivesi la lettera, o cifra 0. Ecco un esempio:

Il primo carattere del numero A, ch'è 7, significa sette semplici unità; il secondo 2 indica due decine, cioè 20, venti; il terzo 4 vale quattro centinaja, cioè 400, quattrocento; il quarto 6 esprime 6000, o sia sei mille; il quinto 8 significa otto decine di migliaja, ovvero 80000, ottanta mille; il sesto 9 vale nove centinaja di migliaja, cioè 900000, novecento mille; il settimo 1 indica 1000000, un milione; l' ottavo 3 significa tre decine di milioni, vale a dire 30000000, trenta milioni; e il nono 1 vale un centinajo di milioni, cioè 100000000, cento milioni;

A
131, 986, 427.

ni; per conseguenza il numero A esprime cento e trentun milioni, novecento ottantasei mille, quattrocento ventisette.

Similmente il primo carattere 3 del numero B significa tre semplici unità; il secondo, che è la cifra o, indica che il dato numero B non ha decina alcuna; e il terzo 7 significa sette centinaja cioè 700., settecento; laonde i caratteri del numero B esprimono il numero settecento e tre.

B
703.

Scolio.

7. I sopradetti caratteri, o figure Aritmetiche, diconsi anche caratteri Arabici, perchè comunemente dicesi che gli Arabi li abbiano ritrovati; ma la gloria di tal invenzione dagli Eruditi viene attribuita agl' Indiani. I Saraceni poi dall' Arabia li trasportarono nella Spagna; e il celeberrimo Gerberto Monaco di Fleury, Maestro di Ottone Imperatore e di Roberto Re di Francia, che fu dappoi Pontefice col nome di Silvestro Secondo, nel Secolo Decimo gl' introdusse in Francia, e tra l' altre Nazioni d' Europa.

Definizione Sesta.

8. *Numero intero razionale, o volgare* è quello, che contiene intere unità, ovvero che si riferisce all' unità, come il tutto alla parte.

Definizione Settima.

9. *Numero rotto razionale, o volgare*, che anche dicesi *Frazione*, o *Minuzia*, è quello, che contiene una, o più parti dell' unità; ovvero è quello, che si riferisce all' unità come una parte al tutto.

Definizione Ottava.

10. Si serviamo poi di due numeri per esprimere qualunque frazione, l' uno de' quali, interpostavi una linecta, si sottoscrive all' altro: come per indicare la terza parte di qualsivoglia cosa si scrive $\frac{1}{3}$, e si pronunzia *una terza parte, o Triente*; così pur per esprimere *quattro quinte parti* si pone $\frac{4}{5}$, ecc. Il numero posto sotto la picciola linea indica in quante parti l' unità, o la cosa data sia divisa, e chiamasi *Denominator della frazione*: il numero poi scritto sopra la picciola linea numera le parti, che hanno a prendersi dal dato intero diviso, ed appellasi *Numerator della frazione*. Così nella frazione $\frac{4}{5}$, il denominatore 5. significa che la data cosa è divisa in cinque parti uguali; e il numeratore 4 indica doversi prendere quattro delle medesime parti.

Defi-

Definizione Nona.

Il numero, ch'è composto d'un intero e d'un rotto, dicesi numero *Misto*. Così $7\frac{2}{3}$, che significa sette interi con due terze parti d'un intero, è un numero misto. 11.

Definizione Decima.

Numeri uguali diconsi quelli, che contengono un medesimo numero d'unità, o di parti dell'unità. Così i due numeri tre e quattro presi insieme sono uguali al numero sette. 12.

Ineguali poi sono que' *numeri*, che non contengono il medesimo numero d'unità, o di parti dell'unità: come sono i numeri sei e otto, al primo de' quali, perchè uguagli il secondo, mancano due unità; per conseguenza uno de' numeri ineguali è uguale a una parte dell'altro, e dicesi *Numero minore*: quello poi, una parte del quale è uguale a tutto l'altro, chiamasi *Numero maggiore*.

Definizione Undecima.

Addizione è il raccoglimento di due, o più numeri in una sola somma; ovvero dati due, o più numeri, è l'invenzione d'un altro numero, che sia uguale ai numeri dati presi insieme. I numeri dati diconsi *Sommandi*, e il numero de' medesimi ricercato appellasi *Somma*, o *Aggregato*. Così il numero 9 è la somma de' numeri 5 e 4, perchè contiene tante unità, quante ve ne sono ne' dati numeri 5 e 4 presi insieme. 13.

$$\begin{array}{r} 5 \\ 4 \\ \hline 9 \end{array}$$

Definizione Duodecima.

Sottrazione è l'invenzione dell'eccesso, di cui il numero maggiore supera il minore; ovvero è l'invenzione della mancanza, per cui il numero minore decade dal maggiore. Il numero che si sottrae, chiamasi *Numero sottraendo*; quello, da cui si fa la sottrazione, *Numero diminuendo*; e il numero, che si trova nella sottrazione, appellasi *Differenza*, o *Residuo*. Come dal numero 9 sottraendo il numero 5, la differenza, o il residuo sarà 4. 14.

$$\begin{array}{r} 9 \\ 5 \\ \hline 4 \end{array}$$

Corollario.

Quindi apparisce che la differenza unita al numero da sottrarsi, o al minore, fa la somma uguale al numero da diminuirsi, o al maggiore: come nell'esempio antecedente, la somma del residuo 4 col sottraendo 5 restituisce il numero diminuendo 9. 15.

Defi-

Definizione Terzadecima.

16. *Moltiplicazione* è l'invenzione d'un numero, il quale tante volte contenga un dato numero, quante unità, o parti dell'unità si contengono in un altro ancor dato numero.

I numeri dati diconsi *Fattori*, *o Moltiplicatori*; quel numero, che è prodotto dalla moltiplicazione di essi, chiamasi *Fatto*, *o Prodotto*; quello de' fattori, che prendesi alquante volte, si dice *Numero Moltiplicando*; l'altro poi, che indica quante volte quegli si prenda, appellasi *Numero Moltiplicatore*, *o Moltiplicante*. Come moltiplicando 4 per 3, il prodotto sarà 12; perchè il numero 12 tante volte contiene il numero multiplicando 4, quante sono le unità nel moltiplicatore 3.

$$\begin{array}{r} 4 \\ 3 \\ \hline 12 \end{array}$$

Corollario.

17. Poichè il medesimo prodotto ritrovasi se il moltiplicando si aggiunga tante volte, quante l'unità è contenuta nel moltiplicatore; perciò la Moltiplicazione è una compendiosa addizione dello stesso numero. Così 4, più 4, più 4, fanno la somma 12, uguale al prodotto dal 4 moltiplicato per 3.

Definizione Quartadecima.

18. *Divisione* è quell'operazione dell' Aritmetica, in cui ritrovasi quante volte un dato numero contenga un altro pur dato numero: ovvero è l'invenzione d'un numero, che contenga l'unità tante volte, quante l'uno de' dati contiene l'altro dato numero.

Il primo de' dati numeri, che deve esser diviso, si dice *Numero dividendo*; l'altro, per mezzo di cui si fa la divisione, appellasi *Divisore*; e quello, che indica quante volte il divisore si contenga nel dividendo, si chiama *Numero Quoziente*, *o Quoto*. Come nel dividere il numero 15 per 5, il quoziente sarà 3, che indica quante volte il divisore 5 si contenga nel dividendo 15; ovvero, che tante volte contiene l'unità, quante il dividendo 15 contiene il divisore 5.

$$\begin{array}{r|l} 15 & 5 \\ \hline & 3 \end{array}$$

Definizione Quintadecima.

19. *Numero Pari* è quello, che in due parti, o per 2 può esser diviso. Numeri pari sono 2, 4, 6, 8, 10, ecc.

Definizione Sestadecima.

20. *Numero Impari* è quello, che per una sola unità è differente dal numero pari. Numeri impari sono 3, 5, 7, 9, 11, 13, ecc.

Defi-

Definizione Decimasettima.

Nell' Aritmetica Specioſa per diſegnare qualſivoglia quantità, o continua, o diſcreta, ſi ſerviamo delle lettere dell'Alfabeto a, b, c, ecc. imperciocchè qual ſi ſia numero, o ſia intero, o rotto, o miſto, può appellarſi numero a, o numero c, o numero m, ecc. Parimente qualſivoglia lunghezza può chiamarſi lunghezza a, o lunghezza m, ecc. Lo ſteſſo intendaſi di qualunque altra quantità. 21.

Colle prime lettere poi dell' Alfabetto a, b, c, d, ecc. ſi diſegnano le quantità date, o conoſciute; e coll' ultime z, y, x, ecc. s'indicano le quantità incognite, e ricercate.

Definizione Decimaottava.

Quando qualſivoglia quantità ſi denomina a, il di lei duplo ſi eſprimerà per 2a, il triplo per 3a, ecc. Similmente 5m, ſignifica il quintuplo della quantità m, e così dell' altre. Oltre a ciò la metà della medeſima quantità a ſi eſprime così $\frac{1}{2}$a, ovvero $\frac{a}{2}$; la terza parte per $\frac{1}{3}$a, ovvero per $\frac{a}{3}$, ecc. Lo ſteſſo intendaſi dell'altre quantità. 22.

Definizione Decimanona.

Il numero prefiſſo immediatamente alla lettera diceſi *Coeficiente* della medeſima quantità, e denota che quella quantità deve prenderſi tante volte. Così 4m ſignifica quattro m, 3a denota tre a; e i numeri 4, e 3 ſono coeficienti delle quantità a, ed m: e così degli altri. 23.

Le lettere, o quantità, che non hanno alcun numero coeficiente, ſempre s'intende che abbiano prefiſſa l' unità: come a vale lo ſteſſo che 1a, m ſignifica 1m, ecc. 24.

Definizione Venteſima.

Le Quantità altre ſono *Poſitive*, oppure *Affermative*; altre poi diconſi *Negative*, ovvero *Privative*. Così l'argento, che poſſediamo, diceſi quantità poſitiva; ma i debiti appellanſi quantità negativa. 25.

Le quantità affermative chiamanſi ancora *Maggiori del nulla*, e le negative *Minori del nulla*; imperciocchè 0, cioè il nulla aggiunto alle quantità, nè le accreſce, nè le diminuiſce: tutto ciò adunque, che può accreſcere il valore di qualche quantità, deve dirſi maggior del nulla; e ciò che diminuiſce la quantità, minor del nulla.

Ma perchè una quantità poſitiva aggiunta ad un' altra aumenta il di lei valore, e ſcambievolmente una negativa lo diminuiſce; perciò la quantità affermativa ſarà maggior del nulla, e la negativa minore.

Per altro le quantità diconſi poſitive, o negative in riguardo all' altre, ch' eſſe accreſcono, o diminuiſcono; non però conſiderate

in se stesse; perchè ogni quantità considerata in se stessa è positiva, ovvero maggior del nulla.

Definizione Ventesimaprima.

26. *Quantità Omogenee*, o sia dello stesso genere, diconsi quelle, una delle quali presa alquante volte può superar l'altra; ovvero una delle quali sottratta dall'altra, o una, o alquante volte, lascia o nulla, o meno di se. Per conseguenza le quantità omogenee tra di se sono uguali, o ineguali. Così la lunghezza A, e la lunghezza B sono quantità omogenee, perchè la lunghezza minore B presa due volte eccede la lunghezza A.

A ——
B ——

Eterogenee, o di diverso genere sono quelle quantità, una delle quali presa alquante volte, non può superar l'altra: come il numero, e la lunghezza.

Definizione Ventesimaseconda.

27. *Eguali* diconsi quelle cose, una delle quali, salva la quantità, può esser all'altra sostituita; ovvero quantità uguali diconsi quelle, che hanno il medesimo valore, e la stessa estensione. Come se a significhi due lire d'Argento nostrali, ed m esprima quaranta soldi, allora a sarà uguale ad m, perchè due lire d'argento equivagliono a soldi quaranta.

Ineguali poi sono quelle, una delle quali è uguale a una parte dell'altra.

Definizione Ventesimaterza.

28. I segni delle operazioni dell'Aritmetica universale sono $+$, $-$, $\times$, $=$, $>$, $<$.

29. Del segno $+$, cioè *Più*, si serviamo per disegnare le quantità positive, ed è il segno dell'addizione. Come $5+2$, ovvero cinque più due, significa sette, cioè la somma de' numeri 5, e 2. Parimenti $a+b$, ovvero a più b, indica la somma delle quantità a, e b.

30. Il segno $-$, cioè *Meno*, è il segno della sottrazione, e di lui si serviamo per indicare le quantità negative. Così $6-2$, ovvero sei meno due, significa il residuo, che nasce col sottrarre 2 da 6, cioè 4. Similmente $a-c$, ovvero a meno c, significa il residuo, che nasce levando c da a: per esempio se a sia 8, e c sia 5, allora $a-c$ valerà $8-5$, cioè 3.

31. Il segno della moltiplicazione è $\times$, il quale dicesi *Moltiplicato*; cosicchè 3×4, cioè tre moltiplicato quattro volte, indica il prodotto da 3 in 4, vale a dir 12. Parimente a $\times$ b significa il prodotto, che si fa col moltiplicare a per b. Se a vaglia 2, e b significhi 9, allora $a \times b$ valerà 2×9, cioè 18.

32. Il segno $=$, cioè *Uguale*, è il segno dell'uguaglianza, e di lui si ser-

ſerviamo per paragonare le quantità tra di ſe uguali. Così $3+2=5$ indica che la ſomma de' numeri 3, e 2 è uguale al numero 5. Parimente $a=b$, cioè a uguale a b, ſignifica che a, e b ſono uguali; e $c=4$ indica che il valore della quantità c è 4.

Dei due ſegni poi $>$, cioè *Maggiore*, e $<$, cioè *Minore*, ſi ſer- 33.
viamo per diſegnare le quantità ineguali. Così $8>5$, cioè 8 maggior di 5, indica che il numero otto è maggiore del numero cinque. Similmente $a>c$, cioè a maggior di c, ſignifica che il valore della quantità a, è maggior del valore della quantità c. Scambievolmente $5<8$, cioè cinque minor di otto, ſignifica che il numero cinque è minore del numero otto. Per la ſteſſa ragione $c<a$, cioè c minor di a, indica c eſſer minore della quantità a.

La diviſione delle quantità ſi eſprime come il numero rotto (10.), 34.
ponendo il diviſore ſotto al dividendo, interpoſtavi una picciola linea. Così $\frac{12}{4}$, che ſi legge *Dodici diviſo quattro volte*, indica il quoziente 3, che naſce dividendo il numero dodici per il numero quattro: imperciocchè dodici quarte parti formano tre interi. Parimente $\frac{a}{b}$, cioè a diviſo per b, denota il quoziente, che naſce dividendo a per b: come ſe a ſia 15, e b ſia 3, allora $\frac{a}{b}$ varrà $\frac{15}{3}$, cioè 5.

Scolio.

I ſegni $+$, e $-$ ſono contrarj, perchè col ſegno $+$ ſi notano le 35.
quantità poſitive, e col ſegno $-$ le negative.

Quelle quantità ſolitarie, o iniziali, che non hanno prefiſſo alcun ſegno, s' intende che abbiano ſempre il ſegno $+$. Così a vale lo ſteſſo che $+a$, m ſignifica $+m$. A $+b-c$ vale $+a+b-c$, ecc. Ma alle quantità negative ſi pone ſempre avanti il ſegno $-$.

Definizione Venteſimaquarta.

Le quantità, che non ſono conneſſe co' ſegni $+$, e $-$, diconſi 36.
Semplici, o *Monomie*, o *Incompleſſe*; come a, ovvero $-c$, o am, oppure $\frac{a}{c}$, ecc.

Le quantità poi, che ſono conneſſe co' ſegni $+$, e $-$, ſi appellano *Compoſte*, o *Polinomie*, o *Compleſſe*; come $a+c$, ovvero $a-d+m$, ecc.

Quelle quantità, che ſono compoſte da due termini, ſi chiamano *Binomie*; come il binomio $a+c$, ovvero $b-m$, o $4+6$, ecc.

Se ſono formate da tre termini, diconſi *Trinomie*; ſe da quattro, *Quadrinomie*, e così di mano in mano. Per eſempio $a+b+c$, ovvero $a-b+c$ è un trinomio; e $-a+b+c+m$ è un quadrinomio, ecc.

PROBLEMA PRIMO.

37. *Pronunziare qualsivoglia dato numero descritto co' caratteri Aritmetici.*

Risoluzione.

PRimieramente andando dalla destra verso la sinistra il dato numero col mezzo di virgole si divida in periodi, o membri, assegnando tre caratteri a ciascun membro.

In secondo luogo se il dato numero ha più di sei caratteri, sopra il settimo scrivasi 1; e tralasciati a banda sinistra i cinque caratteri susseguenti, sopra il carattere terzodecimo pongasi 2; e così andando innanzi, tralasciati sempre cinque caratteri, si scrivano i numeri 3, 4, 5, ecc. sopra i caratteri posti nel luogo decimonono, ventesimoquinto, trentesimoprimo, ecc.

E il dato numero sarà diviso in senarj, ovvero in membri, ciascun de' quali conterrà sei caratteri, eccettuato il primo membro posto a sinistra, che può esser composto di più pochi, e alle volte d' un solo carattere.

Oltre a ciò qualsivoglia senario, mediante una virgola, si divida in due ternarj, il primo de' quali a parte destra conterrà sempre le unità, le decine, e le centinaja del medesimo senario; l' altro ternario poi posto a banda sinistra conterrà le migliaja; ovvero le unità delle migliaja, le decine delle migliaja, e le centinaja delle migliaja del detto senario.

Di più, come è evidente per la Definizione 5. (6.), il primo senario è delle unità, il secondo contiene i milioni, il terzo i milioni de' milioni, ovvero i bilioni, il quarto i trilioni, il quinto i quadrilioni, ecc.

Finalmente si pronunzia il numero incominciando dalla sinistra, e avanzandosi verso la destra; le virgole aggiuntevi significano le *migliaja*; e proferendosi il carattere, sopra cui fu posta l'unità, si pronunci la voce *milione*; dove fu posto il carattere 2 si pronunci *bilione*, e così in seguito: le quali cose tutte messe in chiaro co' seguenti esempj più facilmente si comprenderanno; essendocchè *l'Arti*, come dice il Celebratissimo Cavalier NeWton, *più agevolmente s'imparano cogli esempj, che co' precetti.*

Sieno dati i numeri A, B, C, D, i quali si dividano in membri, come si è detto, dipoi il numero A si pronunzia così, Otto milla trentacinque.

A
8, 035.

Il numero B vale Quarantatre mila, settecento ventisei.

B
43, 726.

Il numero C leggesi Cinquecento trenta mila, cento e nove.

C
530, 109.

E il numero D si pronunzia quattro bi-

D
4, 327, 540, 289, 605.

lio-

lioni, trecento ventisette mila, cinquecento quaranta milioni, ducento ottantanove mila seicento e cinque.

PROBLEMA SECONDO.

Radunare i numeri interi in una sola somma. 38.

Risoluzione.

PRimieramente i dati numeri si scrivano per ordine, cioè uno sotto l'altro, cosicchè le unità d'uno sieno poste dirittamente sotto le unità dell'altro, le decine sotto le decine, le centinaja sotto le centinaja, e le migliaja alle migliaja a vicenda si corrispondano, ecc.

In secondo luogo sotto ai medesimi numeri si tiri una picciola linea.

In terzo luogo, incominciando sempre a parte destra, si raccolgano in una sola somma le semplici unità, cioè que' caratteri, che sono nella prima colonna posta alla destra di quel che scrive; e se la somma d'esse non eccede il numero nove, tutta si scriva sotto la linea, e sotto la medesima colonna.

Facciasi dipoi l'operazione stessa nella seconda colonna, nella terza, nella quarta, ecc. e sotto la linea si avrà la somma ricercata.

Così la somma de' numeri 112, 231, 304, sarà 647, cioè seicento quarantasette; perchè le unità 4 + 1 + 2 danno sette; e le decine 3 + 1 fanno quattro; e le centinaja 3 + 2 + 1 danno sei centinaja.

112
231
304
647

In quarto luogo poi se la somma di qualsivoglia colonna eccede il numero nove, e contiene una, o più decine, allora di sotto la linea, e sotto la medesima colonna scrivasi soltanto ciò, che resta di più delle decine, o pongasi la cifra 0, se la somma contenga decine intere. Dipoi ai caratteri della colonna seguente si aggiungano tante unità, quante furono le decine trovate nella colonna precedente.

Per esempio.

Sieno da unirsi in una sola somma i numeri 5146, 4375, 7624, 238, i quali si scrivano ordinatamente, come si è detto di sopra; e tirata al di sotto una linea, si riducano in una somma i caratteri della prima colonna, cioè le unità 8, 4, 5, 6, le quali unite insieme danno la somma 23; imperciocchè 8 + 4 fanno 12, e 12 + 5 danno 17, e 17 + 6 fanno 23, la qual somma 23 contiene tre semplici unità, e due decine; e perciò scrivasi il carattere 3 di sotto la linea dirittamente sotto la colonna delle unità, e le due decine si uniscano coll'altre 3, 2, 7, 4, e la somma delle deci-

5146
4375
7624
238
17383

decine farà 2 + 3 + 2 + 7 + 4, cioè 18; dieci decine poi formano un centinajo; dunque della somma ritrovata 18 ſcrivaſi 8 (cioè otto ſemplici decine) ſotto alla linea nel luogo delle decine, e 1, cioè una decina di decine, o un centinajo, ſi uniſca all'altre centinaja 2, 6, 3, 1, e farà la ſomma delle centinaja 1 + 2 + 6 + 3 + 1, cioè 13. Perchè poi dieci centinaja compongono un migliajo, perciò della ritrovata ſomma 13 ſcrivaſi il carattere 3 nella terza colonna, e di ſotto la linea; e 1, cioè un migliajo ſi aggiunga all'altre migliaja 7, 4, 5, farà 1 + 7 + 4 + 5, cioè la ſomma di 17 migliaja. Pongaſi per tanto 7 ſotto la quarta colonna nel luogo delle migliaja, e 1, cioè una decina di migliaja ſcrivaſi alla ſiniſtra del medeſimo 7 nel quinto luogo, che è quello delle decine di migliaja; e la ſomma de' dati numeri farà 17383, cioè diciaſette mila trecento ottantatre.

5148
4375
7624
238
17383

Nella medeſima maniera, e per la ſteſſa ragione la ſomma de' numeri 3427, 5035, 8247 farà 16709, cioè ſedici mila ſettecento e nove.

3427
5035
8247
16709

Parimente la ſomma de' numeri 32050, 6040, 2070, 40, farà 40100, cioè quaranta mila e diecento.

32050
6040
2070
40
40100

Dimoſtrazione.

39. L'Addizione, per la definizione undecima (13), è l'invenzione d'un numero, le di cui parti, ovvero unità, uguaglino le parti tutte preſe inſieme de' dati numeri; ma per l'unione fatta nel primo eſempio, il numero 647 contiene tante unità, decine, e centinaja, quante unità, decine, e centinaja ſono ne' dati numeri 112, 231, 304 preſi inſieme; dunque il numero 647 è la ſomma, o l'aggregato de' medeſimi dati numeri. Il che eraſi propoſto da dimoſtrare.

Colla ſteſſa ragione, e nella ſteſſa maniera dimoſtraſi che l'altre ſomme ſono ſtate beniſſimo fatte.

Scolio.

40. Si eſamina l'Addizione col ripetere l'addizione medeſima, ma al roveſcio; coſicchè ſe prima ſiaſi numerato dal baſſo all'alto, dipoi ſi diſcenda dall'alto al baſſo; e ſe nell'una e nell'altra maniera ritroveraſſi la medeſima ſomma, ſarà probabile che non vi ſia entrato alcun errore.

PRO-

PROBLEMA TERZO.

Sottrarre un numero intero da un altro intero maggiore. 41.

Risoluzione.

PRimieramente il numero minore scrivasi ordinatamente sotto al maggiore, da cui si deve sottrarre, cosicchè le unità sieno sotto le unità, le decine sotto le decine, ecc. e di sotto ai medesimi numeri tirisi una picciola linea.

In secondo luogo incominciando a banda destra si sottraggano le unità del numero sottraendo dalle unità del numero diminuendo, le decine dalle decine, le centinaja dalle centinaja, ecc. e ciò che resta in qual si sia luogo scrivasi sotto la linea. Quando poi il carattere inferiore è uguale al superiore, allora pongasi la cifra 0 di sotto la linea, e nel medesimo luogo.

Come sottraendo il numero 86524 dal numero 137596, il residuo sarà 51072; imperciocchè togliendo le unità 4 da 6, ne restano 2; sottraendo 2 decine da 9, ne rimangono 7; dipoi 5 centinaja da 5, il restante è 0; indi 6 migliaja da 7, il residuo è 1. Finalmente perchè 8 decine di migliaja, non si possono sottrarre da 3 decine di migliaja, si levi 8 da 13, e il restante sarà 5.

137596
86524
51072

In terzo luogo quando il numero maggiore, o diminuendo, ha figure, alle quali il numero sottraendo o non ha figura alcuna corrispondente, o vi corrisponde la cifra 0; allora quelle figure si scrivano anche di sotto la linea ne' proprj luoghi. Come dal numero 3058760 sottraendo il numero 18040, il residuo sarà 3040720.

3058760
18040
3040720

In quarto luogo finalmente se qualche figura del numero inferiore non può esser sottratta dalla corrispondente figura del numero superiore, perchè quella sia maggiore; allora alla figura superiore si concepisca unita una decina, e sottratta la figura inferiore, il residuo si ponga di sotto alla linea; dipoi o la seguente figura del numero superiore posta alla sinistra si sminuisce d'una unità, ovvero (che è lo stesso) la figura susseguente del numero inferiore d'una unità si accresce.

Ecco un Esempio.

Dal numero 436052 sia da sottrarsi il numero 352064; posto il numero sottraendo con ordine di sotto al diminuendo, e tirata una picciola linea, si levi 4 da 2, lo che non può farsi; e perciò allo stesso 2 intendasi aggiunta una decina, si farà 12, da cui sottratto 4, resta 8, il quale scrivasi di sotto la linea. Indi la susseguente figura inferiore 6 accre-

436052
352064
83988

accreſcaſi d'una unità, ſi farà 7, che non può eſſer ſottratto dalla figura ſuperiore 5, e perciò allo ſteſſo 5 ſi aggiunga una decina, ſi avrà 15, da cui tolto il numero 7, il reſiduo ſarà 8, il quale pongaſi ſotto la linea. Dipoi alla ſuſſeguente figura inferiore o aggiungaſi 1, ſi farà 1, e ſi ſottragga 1 dalla figura ſuperiore 0, il che non può farſi; e perciò allo ſteſſo o aggiungaſi una decina, ſi avrà 10, da cui tolgaſi 1, e il reſtante 9 pongaſi ſotto la linea. Allora aggiungaſi 1 alla ſuſſeguente figura inferiore 2, ſi farà 3, e ſottratta la figura 3 dalla figura 6, reſterà 3, il qual reſiduo ſi ſcriva ſotto la linea nel medeſimo luogo. Inoltre ſottraggo 5 da 13 (perchè 5 da 3 non può eſſer ſottratto), e pongo il reſiduo 8 ſotto la linea, e traſporto 1, che aggiunto all'inferior numero 3, ſi avrà 4, il quale ſottratto dal ſuperior 4, nulla reſta; e dovrebbeſi porre la cifra o ſotto la linea, ma ſi reputa inutile ſcriverla nel fine dell'operazione. Per tanto il reſiduo ſarà 83988.

436052
352064
83988

Similmente ſottraendo il numero B dal numero A, il reſiduo è C; imperciocchè ſottratto 5 da 8, il reſiduo è 3 da ſcriverſi ſotto la linea. Sottratto 1 da 10, il reſtante è 9; e di nuovo 1 da 10, il reſiduo è 9; dipoi 3 da 4, il reſiduo è 1; inoltre 6 da 10, il rimanente è 4; indi 10 da 11, il reſiduo è 1; finalmente 1 da 7, il rimanente è 6.

A 7104008
B 962015
C 6141993

Dimoſtrazione.

42. In ogni ſottrazione (15) la differenza aggiunta al numero ſottraendo, fa la ſomma uguale al numero diminuendo: ma nell'antecedente ultimo eſempio la ſomma del reſiduo, o della differenza C, col ſottraendo B reſtituiſce il numero diminuendo A: dunque il numero C è la differenza tra i numeri A, e B.

Il medeſimo ſi dimoſtra degli altri eſempj. Il che ſi era propoſto.

Corollario.

43. Quindi l'eſame della ſottrazione deve farſi col raccogliere in una ſola ſomma il reſiduo ritrovato col numero ſottratto; e ſe la ſomma de' medeſimi ſarà uguale al numero diminuendo, tengaſi per certo di non aver errato.

PROBLEMA QUARTO.

44. *Moltiplicare un numero intero per un altro numero intero.*

Riſoluzione.

S'inprima nella memoria la moltiplicazione (5.) de' numeri ſemplici, che ſi ritrova nella ſeguente Tavoletta

8 in	1 fa	8
1	2	2
2	2	4
3	3	6
4	4	8
2	5	10
2	6	12
2	7	14
2	8	16
2	9	18
3	3	9
3	4	12
3	5	15
3	6	18
3	7	21
3	8	24
3	9	27
4	4	16
4	5	20
4	6	24
4	7	28
4	8	32
4	9	36
5	5	25
5	6	30
5	7	35
5	8	40
5	9	45
6	6	36
6	7	42
6	8	48
6	9	54
7	7	49
7	8	56
7	9	63
8	8	64
8	9	72
9	9	81

Quando poi i numeri moltiplicandi tra di se sono ambedue composti (5.), ovvero uno è composto, e l'altro semplice; allora

Primieramente scrivasi il numero moltiplicatore sotto il numero moltiplicando (16.), cosicchè le unità dell' uno siano sotto le unità dell'altro, le decine sotto le decine, le centinaja corrispondano alle centinaja, ecc. Dipoi sotto i medesimi numeri tirisi una picciola linea.

In secondo luogo quando il moltiplicatore è un numero semplice, allora si moltiplichi con ciascuna figura del moltiplicando, incominciando dalla parte destra, e proseguendo verso la sinistra: e quando qualsivoglia prodotto particolare non eccede il numero nove, pongasi tutto sotto la linea; quando poi sorpassa il numero nove, e contiene una, o più decine, allor sotto la linea scrivasi solamente ciò, che resta di più delle decine, o pongasi la cifra o se il prodotto nulla contenga fuori dell'intere decine; e si riservino tante unità da aggiungersi al prodotto seguente, quante sono le decine, che quel prodotto contiene.

Esempio Primo.

Il numero moltiplicando sia 18521, e il moltiplicatore sia 7, il quale io scrivo sotto le unità del numero moltiplicando; e tirata una picciola linea, moltiplico 7 in 1: ma l'unità presa 7 volte dà sette; perciò scrivo 7 sotto la linea nel primo luogo. Dipoi 7 moltiplicato per 2 fa 14; di questo prodotto scrivo 4 sotto la linea, e nel secondo luogo, e 1, cioè una decina riservo da aggiungersi al prodotto seguente. Indi 7 in 5 produce 35, a cui aggiungo 1 riservato dal prodotto antecedente, e si fa 36; scrivo 6 sotto la linea nel terzo luogo, e ritengo 3, cioè tre decine di centinaja, o tre migliaja da aggiungersi al prodotto seguente. Dipoi 7 in 8 fa 56, a cui n'aggiungo 3 ritenuti dal prodotto precedente, e si fa 59; pongo 9 sotto la linea nel quarto luogo, e riservo 5. Finalmente 7 in 1 dà 7, al quale aggiungo 5 riservato dal prodotto precedente, e si fa 12, il qual numero intero pongo sotto la linea nel quinto, e sesto luogo: e il prodotto di questa moltiplicazione sarà 129647, cioè cento ventinove mila, seicento quarantasette.

```
18521
    7
------
129647
```

In terzo luogo quando anche il moltiplicatore è un numero composto, allora ciascun suo carattere separatamente si moltiplichi con ciascun carattere del numero moltiplicando; ma i prodotti in tal maniera si descrivano sotto la linea, che (ritrovato il prodotto dal primo carattere del moltiplicatore con tutto il numero moltiplicando, come nell'esempio antecedente), il primo prodotto del secondo carattere del moltiplicatore col primo del moltiplicando si scriva nel secondo luogo, cioè dirittamente sotto lo stesso secondo carattere; gli altri prodotti poi dal medesimo cogli altri caratteri del moltiplican-

cando si scrivano a sinistra ordinatamente. In simil guisa il primo prodotto dal terzo carattere del moltiplicatore col primo del numero moltiplicando dirittamente si scriva sotto lo stesso terzo carattere, cioè nel luogo delle centinaja; e così di mano in mano, come si può vedere negli esempj seguenti.

In quarto luogo si tiri una linea sotto i prodotti particolari ritrovati, i quali si uniscano in una sola somma, ed essa somma sarà il prodotto ricercato.

Esempio Secondo.

Il moltiplicando sia 3624, e il moltiplicatore sia 23, i quali scrivansi ordinatamente, come si è detto di sopra; e tirata al di sotto una picciola linea, dico 3 in 4 produce 12; scrivo 2 sotto la linea nel primo luogo, e ritengo 1 da aggiungersi al prodotto seguente; dipoi 3 in 2 dà sei, a cui aggiungo 1 riservato dal prodotto antecedente, e si fa 7; pongo 7 sotto la linea nel secondo luogo. Indi 3 in 6 dà 18, scrivo 8 nel terzo luogo, e riservo 1 da aggiungersi al seguente prodotto. Finalmente 3 in 3 produce 9, al quale aggiungo 1 ritenuto, e si fa la somma 10, la qual tutta pongo sotto la linea in modo, che o sia nel quarto luogo, e 1 nel quinto: e sarà così compito il prodotto dal primo carattere 3 del moltiplicatore coll' intero numero moltiplicando.

```
3624
  23
-----
10872
7248
-----
83352
```

Dipoi si moltiplichi il numero 3624 per il secondo carattere 2 del moltiplicatore 23; e il primo prodotto da 2 in 4, cioè 8, scrivasi sotto la linea dirittamente sotto lo stesso moltiplicatore 2 nel luogo delle decine, cioè sotto al secondo carattere 7 del prodotto già ritrovato; imperciocchè il moltiplicatore 2 non significa due unità, ma due decine, ovvero venti unità, perchè è posto nel secondo luogo; e perciò 4 carattere superiore delle unità è da prendersi non due, ma venti volte, e il numero 4 preso venti volte produce 80, cioè otto decine; perciò in questo caso il prodotto dal 2 in 4, che è 8, deve porsi nel secondo luogo, in cui significarà otto decine, ovvero ottanta unità. In seguito si riporti 2 in 2, e il prodotto 4 si ponga sotto la linea nel terzo luogo. Indi 2 in 6 danno 12; scrivasi 2 sotto la linea nel quarto luogo, cioè alla sinistra del carattere precedente 4, e si riservi 1 da aggiungersi al seguente prodotto dal 2 in 3, che è 6, a cui aggiungasi 1 avanti ritenuto, si farà 7, il quale pongasi nel quinto luogo, cioè alla sinistra dell' antecedente carattere 2. Per fine tirata una picciola linea sotto i ritrovati prodotti, ciascun d' essi raccolgasi in una sola somma (38.), la qual somma sarà 83352; per conseguenza il prodotto dal numero 23 nel numero 3624 sarà 83352.

Esempio Terzo.

Similmente moltiplicando il numero 46080 per 3030, ne risulta il prodotto 231782400. Imperciocchè tutto il numero superiore moltiplicato per 0, dà il prodotto 0, il quale io scrivo sotto la linea in primo luogo. Dipoi moltiplicando per 3 secondo carattere del moltiplicatore, dico 3 in 0 dà 0, la qual cifra io pongo in secondo luogo. Inoltre 3 in 8 produce 24; scrivo 4 nel terzo luogo, e ritengo 2 da aggiungersi al seguente prodotto da 3 in 0, che è 0, a cui unisco i 2 ritenuti, e si fa 2; scrivo adunque 2 in quarto luogo, e moltiplico 3 in 6, e del prodotto 18 pongo 8 in quinto luogo, e ritengo 1 da aggiungersi al prodotto seguente. Dipoi riporto 3 in 4, e al prodotto 12 aggiungo 1 avanti ritenuto, si fa 13; pongo 3 in sesto luogo, e 1 nel settimo. Dopo di ciò moltiplico tutto il numero moltiplicando per il terzo carattere del moltiplicatore, il quale perchè è un zero, scrivo il prodotto 0 sotto la linea nel terzo luogo, cioè sotto il carattere 4 del prodotto precedente. Finalmente moltiplico per la quarta figura 5, e perchè 5 in 0 produce 0, perciò pongo 0 in quarto luogo dirittamente sotto il moltiplicatore 5, cioè alla sinistra del 0 precedente. Dipoi 5 in 8 dà 40; pongo 0 nel quinto luogo, e riservo 4; inoltre 5 in 0 fa 0, al quale aggiungo 4, e scrivo la somma 4 nel sesto luogo. Di più 5 in 6 dà 30; scrivo 0 in settimo luogo, e riservo 3 da aggiungersi al prodotto da 5 in 4, che è 20, a cui aggiungo i 3 ritenuti, la somma sarà 23; pongo 3 in ottavo luogo, e 2 nel nono. Finalmente tirata la linea, ed insieme raccolti i particolari prodotti ritrovati, si avrà il prodotto ricercato 231782400.

```
 46080
  5030
------
1382400
2304000
------
231782400
```

Esempio Quarto.

Parimenti moltiplicando il numero 3542 per il numero 346, si troverà il prodotto 1225532.

```
  3542
   346
------
 21252
 14168
 10626
------
1225532
```

Dimostrazione

45. In ogni moltiplicazione de' numeri il prodotto (16.) deve contener tante volte il numero moltiplicando, quante sono le unità, o parti contenute nel moltiplicatore; ma nel primo esempio antecedente, per l'operazione fatta, il prodotto 129647 tante volte contiene il moltiplicando 18521, quante unità ritrovansi nel numero moltiplicatore 7; imperciocchè se il numero moltiplicando 18521

```
 18521
 18521
 18521
 18521
 18521
 18521
 18521
------
129647
```

si scri

si scriva sette volte ordinatamente (38.), e tirata una linea si faccia l'addizione, la somma darà il medesimo numero 129647; dunque questo numero è il prodotto dal numero 7 nel numero 18521: essendo la moltiplicazione una compendiosa addizione (17.) del medesimo numero.

Lo stesso intendasi di qualsivoglia altra moltiplicazione. Lo che era da provarsi.

Scolio.

Si esamina la moltiplicazione dividendo il prodotto per uno de' fattori, o moltiplicatori; e se per quoziente si ritrovi l'altro fattore, o moltiplicatore, sarà certo che la moltiplicazione sia stata fatta benissimo. Ma prima è da vedere in qual maniera si faccia la divisione: il che si spiegherà nel seguente Problema. 46.

PROBLEMA QUINTO.

Dividere un numero intero per un altro numero intero. 47.

Risoluzione.

PRimieramente è d'uopo avere in memoria la moltiplicazione de' numeri semplici di sopra (44.) insegnata; imperciocchè chi per esempio già apprese che il prodotto da 7 in 9 è 63, facilissimamente capirà che il numero 63. contiene nove volte il numero 7, e sette volte il numero 9.

In secondo luogo quando il divisore è un numero semplice, e il dividendo è composto di due, o più caratteri; allora scrivasi primieramente il numero dividendo, e presso il medesimo, lasciato a destra qualche intervallo, si tiri una picciola linea dall' alto al basso, e appresso la medesima linea verso la destra scrivasi il divisore, e sotto il medesimo tirisi una picciola linea transversalmente da sinistra verso la destra. Dipoi incominciando a banda sinistra ciascuna figura del numero dividendo si divida per il dato divisore, e i quozienti si pongano sotto la linea tirata di sotto al divisore: come si può vedere negli esempj seguenti.

Esempio Primo.

Il numero dividendo sia 64820, e il divisore sia 2. Primieramente scrivasi il numero dividendo, e a destra si tiri dall'alto al basso la lineetta A B; dipoi scrivasi il divisore 2, e sotto di questo tirisi la linea trasversale B C. Indi incominciando a sinistra dico 2 in 6 è contenuto tre volte (perchè 2 × 3 dà 6); scrivo per tanto 3 pri-

A
64820|2
B32410 C

primo carattere del quoziente sotto la linea B C, e sotto il divisore. Parimente 2 in 4 è contenuto due volte; perciò pongo 2 alla destra del carattere già ritrovato 3. Dipoi dividendo 8 per 2 ritrovo il quoziente 4, il quale io scrivo sotto il divisore dopo gli altri due caratteri già ritrovati. Inoltre 2 in 2 è contenuto una volta; laonde pongo 1 per quarto carattere del quoziente. Finalmente 2 in 0 non è contenuto; e perciò scrivo 0 per quinto carattere del quoziente, e così la divisione sarà compita. Per tanto dividendo il numero 64820 per 2, il quoziente sarà 32410.

A
64820|2
B 32410 C

Esempio Secondo.

5 Il numero dividendo sia 1380, e il divisore 4, i quali scrivansi come nell' esempio antecedente. Dipoi perchè il divisore 4 non è contenuto in 1 primo carattere del dividendo, si prendano i due primi caratteri a sinistra, cioè dividasi 13 per 4; ma 4 in 13 è contenuto solamente tre volte; dunque sotto il divisore, e sotto la linea trasversale pongasi il numero 3, il quale si moltiplichi per il divisore 4, e il prodotto 12 scrivasi sotto il membro diviso 13, e tirata di sotto una picciola linea (per il terzo Problema), si sottragga 12 da 13, e alla destra del residuo 1 si discenda col terzo carattere 8 del numero dividendo, sarà 18 il secondo membro da dividersi, in cui il divisore 4 non è contenuto cinque volte (perchè 4 in 5 produce il numero 20 maggiore del numero 18), ma solamente è contenuto quattro volte; e perciò pongasi 4 dopo il carattere 3 nel quoziente; dipoi si moltiplichi 4 per il divisore 4, e il prodotto 16 scrivasi sotto il membro diviso 18, da cui si sottragga, e al residuo 2 si aggiunga a destra il 0 ultimo carattere del dividendo; sarà 20 il terzo membro da dividersi, in cui il divisore 4 è contenuto cinque volte. Scrivasi per tanto 5 per terzo carattere del quoziente ricercato; e moltiplicato 5 per 4, il prodotto 20 si sottragga dal membro diviso 20, non resterà cosa alcuna, e la divisione sarà compita. Per conseguenza il quoziente di questa divisione sarà 345.

1380 |4
12 345
18
16
20
20
0

In terzo luogo se nel progresso dell'operazione si ritrova un membro da dividersi minor del divisore, allora nel quoziente pongasi la cifra 0, e si discenda con un altro carattere del numero dividendo. Che se aggiunto un altro carattere del dividendo, il divisor non per anche sia contenuto in quel membro da dividersi, allora scrivasi un' altra cifra 0 nel quoziente, e si discenda con un altro carattere del dividendo; e questa operazione si replichi tante volte, finchè il membro dividendo contenga il divisore, o nel dividere non sopravanzi alcun carattere: come si può vedere nell'esempio seguente.

Esem-

Esempio Terzo.

Il divisore 8 è contenuto una volta nel primo carattere 8 del numero dividendo 801600; e perciò il primo carattere del quoziente sarà 1, il quale si moltiplichi per il divisore 8, e il prodotto 8 scrivasi sotto il carattere 8 del numero dividendo, dal quale si sottragga, il residuo sarà 0; a cui si discenda alla destra col secondo carattere del dividendo, che è 0, e il membro da dividersi sarà 00, in cui il divisore 8 non è contenuto; perciò pongasi 0 nel quoziente, e al membro 00 si aggiunga a destra 1 terzo carattere del dividendo, e così il membro dividendo sarà 001, cioè 1, il quale non contiene il divisore 8; per conseguenza pongasi nel quoziente un'altra cifra 0, e al membro 001 aggiungasi a destra 6 quarto carattere del dividendo, il membro da dividersi sarà 0016, cioè 16, in cui il divisore 8 è contenuto due volte. Scrivasi frattanto 2 per quarto carattere del quoziente; e il 16 prodotto dal 2 in 8 si sottragga dal membro diviso 16, il residuo sarà 0, al quale aggiungasi a destra 0 quinto carattere del dividendo, si farà 00, in cui il divisore non è contenuto. Adunque pongasi 0 nel quoziente, e si discenda col 0 ultimo carattere del dividendo, e il divisore 8 non contenendosi nel membro dividendo 000, si scriva un'altra cifra 0 per sesta figura del quoziente, e 100200 sarà il quoziente di questa divisione.

```
801600 |8
8      |100200
0016
  16
  000
```

In quarto luogo quando anche il divisore è un numero composto, allora dal dividendo si separino a sinistra tanti caratteri, quanti se ne trovano nel divisore; e se formino un numero minor del divisore, a quelli si aggiunga ancor un altro carattere, e con un punto si separi dagli altri; dipoi facciasi la divisione come negli esempj seguenti.

Esempio Quarto.

Il divisore sia 24, e il dividendo 6816, i quali scrivansi come abbiam detto di sopra. Dipoi con un punto si separi 68 dal dividendo, e cerchisi quante volte il divisor 24 si contenga nel membro dividendo 68; il che agevolissimamente ritrovasi col raziocinio seguente:

```
68.16 |24
48    |284
201
192
  96
  96
   0
```

Il 2 primo carattere del divisore è contenuto tre volte nel 6 primo carattere del membro dividendo; ma il 4 secondo carattere del divisore non è contenuto tre volte nel 8 secondo carattere del membro dividendo; perciò 68 non contiene tre volte il divisor 24; laonde in questo caso 2 in 6 è contenuto soltanto due volte, e restano due, i quali insieme col seguente carattere 8 fanno 28, in cui altresì è contenu-

tenuto due volte il 4, ch'è l'altro carattere del divisore (niente poi importa se sia contenuto più volte) ; e perciò 24 in 68 è contenuto due volte. Scrivasi per tanto 2 per primo carattere del quoziente sotto il divisore e di sotto la linea; e pel ritrovato carattere 2 si moltiplichi il divisore 24, e il prodotto 48 si ponga sotto il membro diviso 68 in questa maniera; cioè moltiplico il 2 in 4, e scrivo il prodotto 8 sotto il carattere 8 del numero 68, dipoi moltiplico 2 in 2, e pongo il prodotto 4 sotto il carattere 6 del medesimo membro 68; e sottratto il prodotto 48 dal membro 68, il residuo sarà 20, alla destra del quale aggiungo 1 terzo carattere del dividendo, e ne risulta il membro da dividersi 201, che divido per 24; cioè dico il 2 in 20 è contenuto nove volte (avvegnacchè nel quoziente non si pone numero alcuno maggiore del numero 9), e restano 2, i quali assieme col seguente carattere 1 fanno 21; ma il 4 in 21 non è contenuto nove volte; per conseguenza in questo caso il 2 in 20 non può esser contenuto nove volte. Per tanto il 2 in 20 sia contenuto otto volte, e resteranno 4 (perchè il 2 in 8 dà 16), i quali col seguente carattere 1 fanno 41, in cui anche il 4, che è l'altro carattere del divisore, è contenuto otto volte (niente importa che sia contenuto più volte): dunque il divisor 24 nel membro dividendo 201 è contenuto otto volte; perciò scrivo 8 per secondo carattere del quoto, e moltiplico 8 col divisor 24, e scrivo il prodotto 192 sotto il 201, e tirata la linea sottraggo 192 da 201, e al residuo 9 posto sotto la linea aggiungo a destra 6 quarto carattere del dividendo, e divido 96 per 24; cioè dico il 2 in 9 è contenuto quattro volte, e resta 1, il quale col seguente carattere 6 fa 16, in cui anche il 4 carattere del divisore è contenuto quattro volte; e perciò pongo 4 per terzo carattere del quoziente, e moltiplicando 4 in 24, e sottraendo il prodotto 96 dal membro or ora diviso 96, nulla resta; dunque il quoziente ricercato è 284.

```
68. 16 | 24
 48      284
 201
 192
  96
  96
   0
```

In quinto luogo quando terminata la divisione vi resta qualche cosa, allor quel residuo scrivasi dopo il quoziente ritrovato a guisa di frazione, cioè sopra una picciola linea, sotto la quale pongasi tutto il divisore; e quindi nascono le ragioni, di cui tratteremo nel Libro Secondo.

Esempio Quinto.

Il numero dividendo sia 187695, e il divisore sia 257, i quali si scrivano come nel primo esempio. Dipoi perchè i tre primi caratteri del dividendo formano il numero 187 minor del divisore 257, perciò si prendano quattro caratteri, e si avrà per primo membro dividendo 1876,

```
1876. 95 | 257
1799       730 85
 779       257
 771
  85
```

in

in cui il divisore 257 è contenuto sette volte; imperciocchè il 2 primo carattere del divisore è contenuto nel 18 nove volte, e nulla restavi, ma il 5 secondo carattere del divisore non è contenuto nove volte nel 7 terzo carattere del membro dividendo; e perciò il divisore 257 non è contenuto nove volte nel numero 1876; laonde diminuisco d'una unità il quoziente 9, e dico il 2 in 18 è contenuto otto volte, e ne rimangono 2, i quali col seguente carattere 7 formano 27; ma di nuovo il 5 carattere del divisore non può esser contenuto otto volte nel 27; dunque neppure tutto il divisore 257 può esser contenuto otto volte nel membro 1876; per conseguenza di nuovo sminuisco il quoziente d'una unità, e dico il 2 in 18 è contenuto sette volte, e ne restano 4, i quali col seguente carattere 7 fanno 47, in cui anche il 5 secondo carattere del divisore è contenuto sette volte, e rimangono 12, che affiene col 6 ultimo carattere del membro dividendo fanno 126, nel qual numero il 7 terzo carattere del divisore anch' esso è contenuto sette volte; scrivo adunque 7 nel quoziente, e per il medesimo carattere 7 moltiplico tutto il divisore 257, e pongo il prodotto 1799 ordinatamente sotto il membro 1876; e tirata di sotto una picciola linea, sottraggo 1799 da 1876, e posto il residuo 77 sotto la linea, vi aggiungo a destra il 9 seguente carattere del dividendo, e ne risulta 779, in cui il divisore 257 è contenuto tre volte, perchè il 2 in 7 è contenuto tre volte, e vi resta 1, che col seguente carattere 7 fa 17, in cui anche il 5 secondo carattere del divisore è contenuto tre volte, e ne rimangono 2, i quali col seguente carattere 9 fanno 29, in cui parimente il 7 terzo carattere del divisore è contenuto tre volte; scrivo adunque 3 per secondo carattere del quoziente, e moltiplico il medesimo col divisore 257, e sottraggo il prodotto 771 dal membro diviso 779, e al residuo 8 unisco alla destra il 5 ultimo carattere del dividendo, e così 85 sarà l'ultimo membro dividendo, in cui il divisore 257 non è contenuto; per la qual cosa pongo 0 per ultimo carattere del quoziente, e il cercato quoziente sarà 730 assieme col residuo 85, il quale scrivasi presso il quoziente sopra una picciola linea, sotto la quale pongasi il divisore 257; e perciò l'intero quoziente sarà (num. 11.) il numero misto $730\frac{85}{257}$, cioè conterrà settecento e trenta interi, e ottantacinque ducentesime cinquantesime settime parti d'un intero.

1876. 95	257
1799	730 85
779	257
771	
85	

In sesto luogo finalmente quando l'intero divisore è maggior dell'intero numero dividendo, allora si ha il quoziente per mezzo della frazione (10.), il numeratore della quale sia il numero dividendo, e il denominator sia il divisore. Così dividendo il numero 3 per il divisore 4, il quoziente sarà $\frac{3}{4}$. Parimente dividendo il numero 14 per il numero 35, il quoziente sarà $\frac{14}{35}$, e così degli altri.

Dimostrazione.

48. Il quoziente di qualsivoglia divisione (28.) deve indicar quante volte il divisore sia contenuto nel dividendo: ma, per esempio di questo Problema il numero 284 indica quante volte il divisore 24 sia contenuto nel dividendo 6816; imperciocchè se il numero 24 si prenda ducento ottantaquattro volte, cioè si moltiplichi per 284, il prodotto restituirà il numero dividendo 6816; dunque il numero 284 è il quoziente della medesima divisione. Lo stesso intendasi degli altri esempj. Il che era proposto.

Corollario.

49. Quindi l'esame della divisione si deve fare moltiplicando il divisore per il quoziente ritrovato; e se non sia commesso errore, si restituisce il numero dividendo. Così moltiplicando il quoziente 284 per il divisore 24; il prodotto sarà 6816, cioè il numero dividendo. Oltre a ciò se dalla divisione vi restò qualche cosa, questa aggiungasi al prodotto dal quoziente nel divisore. Come, per esame del quinto esempio, si moltiplichi 257 per 730, e al prodotto 187610 aggiungasi il residuo 85; la somma 187695 restituirà il numero dividendo, come da se è manifesto.

PROBLEMA SESTO.

50. *Raccogliere in una sola somma le quantità Algebraiche.*

Risoluzione.

L'addizione delle quantità espresse colle lettere dell'Alfabetto si ottiene scrivendo le date quantità una successivamente dopo l'altra co'loro segni +, e —, che hanno, o si concepisce che abbiano dinanzi a se (35.); onde la somma delle semplici quantità a, b, c, — x, sarà a + b + c — x.

a
b
c
—x
a + b + c — x

Parimente la somma delle quantità 4a, cx, $\frac{b}{m}$, 4am, sarà $4a + cx + \frac{b}{m} + 4am$.

Similmente la somma delle quantità composte a + b + x, 3c — m, ax + 2ac — z, sarà

a + b + x + 3c — m + ax + 2ac — z.

PRO-

PROBLEMA SETTIMO.

Ridurre le quantità composte ad espressioni più semplici.

Risoluzione.

PRimieramente quando nella medesima somma si trova la stessa quantità scritta due volte, una volta marcata col segno +, e l'altra col segno —, allora la medesima quantità si cancelli.

Così + a — a, e + s — s, e + 7am — 7am nulla significa; imperciocchè i segni +, e — sono contrari, e ciò che è affermato dal segno +, lo stesso è negato dal segno —.

Onde la somma 4a — 3b + 4c + x — 4c si riduce all'espressione più semplice

4a — 3b + x, perchè i termini

+ 4c, e — 4c si distruggono a vicenda.

Parimente la quantità composta

4a — 3b + cx + 3b + 2c — cx si riduce alla più semplice

4a + 2c; perchè i termini

— 3b + 3b, e + cx. — cx svaniscono.

$$\frac{4a - 3b + cx + 3b + 2c - cx}{4a + 2c}$$

In secondo luogo se nella medesima somma si trovino quantità espresse colle stesse lettere, e marcate col medesimo segno +, o —; allora i coeficienti delle stesse si uniscano in una sola somma, e a questa prepongasi il medesimo segno, e dopo la somma de' coeficienti una volta scrivasi la medesima quantità.

Così per la somma

5a + 4a scrivasi 9a.

Parimente la quantità

2a + b + 3a + 4b + 7a ridotta a termini più semplici si esprime per 12a + 5b.

Similmente la quantità

4a — 3b + a — 4b si riduce all' espressione più semplice 5a — 7b; e così dell'altre.

In terzo luogo se le quantità espresse colle medesime lettere hanno segni diversi, e coeficienti ineguali, allora il coeficiente minore si sottragga dal maggiore, e al residuo si premetta il segno del maggiore.

Laonde la somma + x — x + [illegible]

12ab + 4ab — 5ab — 9b, sottratti i coeficienti 5 da 12, e 4 da 9, e posto il segno + avanti il primo residuo 7, e il segno — dinanzi al residuo 5, la medesima somma si esprimerà più brevemente per 7ab — 5b.

Nella stessa maniera la quantità

4a + 3c — 4b — a + 8b si riduce a

3a + 3c + 4b; e così dell'altre.

PROBLEMA OTTAVO.

72. *Sottrarre le quantità Algebraiche.*

Risoluzione.

Scrivasi primieramente la quantità diminuenda con tutti i suoi segni +, e —, dipoi si aggiunga ad essa la quantità sottraenda con tutti i suoi segni mutati, cioè + in —, e — in +, e si avrà il cercato residuo; come sottraendo e da a, cioè + c da + a, il residuo sarà + a — e, cioè a — c.

Parimenti sottraendo — m da a, il residuo sarà a + m.

Così pure dalla quantità

3 a + 2 b — c sottraendo la quantità m — 3 x + z, la differenza, o il residuo sarà

3 a + 2 b — c — m + 3 x — z.

a
c
a — c
a
— m
a + m
3 a + 2 b — c
m — 3 x + z
3 a + 2 b — c — m + 3 x — z

Dimostrazione.

73. In ogni sottrazione (14.) la differenza, o il residuo è ciò, che manca alla quantità sottraenda, acciò uguagli la quantità diminuenda; e perciò la somma del residuo colla quantità sottratta deve restituire la quantità diminuenda; ma facendo la sottrazione in quel modo, con cui si è detto nel numero antecedente, se si raccolgano insieme il residuo, e la quantità sottratta, sempre si restituisce la quantità diminuenda; dunque la sottrazione delle quantità deve farsi aggiungendo la quantità sottraenda alla quantità diminuenda, variati tutti i segni della sottraenda.

Così nell'antecedente ultima sottrazione se il residuo ritrovato

3 a + 2 b — c — m + 3 x — z si aggiunga alla quantità sottratta

m — 3 x + z,

si farà la somma

3 a + 2 b — c — m + 3 x — z + m — 3 x + z, la quale ridotta a termini più semplici (51.) restituisce la quantità diminuenda

3 a + 2 b — c;

e così dell'altre.

PROBLEMA NONO.

Moltiplicare le quantità Algebraiche. 54.

Risoluzione I.

PRimieramente essendo tutte le quantità o positive, o negative, perciò i prodotti che nascono dalla moltiplicazione delle stesse quantità saranno anch'essi positivi, o negativi; per conseguenza devonsi in primo luogo moltiplicare i segni posti inanzi alle date quantità, per ritrovare il segno da preporsi al prodotto ricercato: il che si conseguirà agevolmente osservando le regole seguenti.

Regola I.

I medesimi segni tra di loro moltiplicati sempre danno + nel prodotto; cioè quando si moltiplica + in +, ovvero — in —, sempre al prodotto si ponga +. 55.

Imperciocchè moltiplicare + in + è porre un positivo; dunque è un affermare.

Moltiplicare — in — è negare la quantità negativa; dunque è lo stesso che porre la medesima, ovvero affermare: imperciocchè due negazioni affermano.

Regola II.

I segni contrarj tra di loro moltiplicati danno il prodotto negativo; cioè quando si moltiplica + in —, ovvero — in +, il prodotto sarà sempre —. 56.

Imperciocchè moltiplicare + in — è porre il negativo; ma porre il negativo, o affermarlo, è lo stesso che negare il positivo; dunque moltiplicando la quantità positiva per la quantità negativa, il prodotto sarà negativo.

Moltiplicare — in + è negare il positivo; dunque è lo stesso che porre il negativo; per conseguenza la quantità negativa moltiplicata per la positiva dà il prodotto negativo.

In secondo luogo fatta la moltiplicazione de' segni, conforme alle regole precedenti, se le quantità letterali hanno dinanzi a se i numeri coeficienti (23.), allora gli stessi numeri coeficienti si moltiplichino tra di loro, come nell'Aritmetica Volgare. 57.

In terzo luogo finalmente si fa la moltiplicazione delle quantità letterali per la semplice union delle lettere, non frapposto segno alcuno, o interposto soltanto il segno della moltiplicazione X. 58.

Laonde moltiplicando a per m, o (24. 35.) + 1 a per + 1 m, il prodotto sarà + 1 am, cioè am; il qual prodotto ancora si esprime in questa maniera a X m.

Pari-

Parimenti moltiplicando a m per c, il prodotto sarà a m × c, o a m c, oppure a c m; imperciocchè niente importa che si scrivano le lettere con ordine diverso.

Similmente a b c m x, ovvero a × b × c × m × x, oppure a b c × m x significa il prodotto da a in b, in c, in m, in x.

Nella stessa guisa moltiplicando — 5 a per 5 b, cioè per + 5 b, il prodotto sarà — 25 a b; imperciocchè — in + dà — (56.), 5 in 5 produce 25, e a in b dà a b (57.).

Così pure — 4 c in — 3 m produce + 12 c m, cioè 12 c m.

Parimenti moltiplicando c m, cioè + 1 c m per — 7 m x, il prodotto sarà — 7 c m m x.

Poniamo che la quantità a significhi il numero 6, e la quantità b indichi il numero 4, e la quantità c il numero 2; cioè poniamo a = 6; b = 4, c = 2; allora il prodotto a b significherà 6 × 4, cioè 24; e il prodotto a b c significherà il numero 6 × 4 × 2, ovvero 24 × 2, cioè 48; la quantità poi 5 a b c significherà il numero 5 × 48, cioè 240.

Risoluzione II.

59. Se devasi moltiplicare una quantità complessa (36.) per una quantità semplice, allora scrivasi la quantità semplice sotto il primo termine della quantità composta, e tirata di sotto una linea, si moltiplichi la quantità semplice con ciascun termine della quantità composta, incominciando a sinistra, e avanzandosi verso la destra, e i prodotti particolari scrivansi sotto la linea co' loro segni + , e — , osservando diligentemente tutte le regole insegnate ne' numeri antecedenti (55. 56. 57. ecc.).

La quantità a + 2 b — c sia da moltiplicare per m; posto m sotto il primo termine a, e tirata di sotto una linea, moltiplico m per a, e scrivo il prodotto a m sotto la linea; dipoi moltiplico m per + 2 b, e aggiungo a destra il prodotto + 2 b m al primo prodotto a m. Finalmente moltiplico m in — c, e scrivo il prodotto — c m in terzo luogo sotto la linea; laonde il prodotto da a + 2 b — c in m, sarà a m + 2 b m — c m.

a + 2 b — c
m
a m + 2 b m — c m

Similmente moltiplicando 3 a — 4 c + m per 3 c, ne risulta il prodotto 9 a c — 12 c c + 3 c m.

3 a — 4 c + m
3 c
9 a c — 12 c c + 3 c m

Risoluzione III.

60. Quando una quantità complessa si ha da moltiplicare per un'altra quantità composta, allora le date quantità scrivansi l'una sotto l'altra; e tirata una linea, ciascun termine della quantità inferiore si moltiplichi per ciascun termine dell'altra quantità, e ciascun prodotto particolare pongasi sotto la linea uno successivamente dopo l'altro co' loro segni + , e — , e si avrà il prodotto ricercato.

Sia

Sia da moltiplicarſi la quantità $a + b$ per $c + x$; poſta la quantità $c + x$ ſotto la quantità $a + b$, e tirata di ſotto una linea, in primo luogo moltiplico $a + b$ per c, e (59.) pongo il prodotto $a c + b c$ ſotto la linea. Dipoi moltiplico la medeſima quantità $a + b$ per x, e aggiungo il prodotto $+ a x + b x$ al prodotto già ritrovato $a c + b c$; e il prodotto, che naſce, moltiplicando $a + b$ per $c + x$, ſarà $a c + b c + a x + b x$.

$$\begin{array}{r} a+b \\ c+x \\ \hline ac+bc+ax+bx \end{array}$$

Nella ſteſſa maniera moltiplicando $3a + 2b - cx$ per $4a - c$, ſi ritroverà il prodotto $12aa + 8ab - 4acx - 3ac - 2bc + ccx$.

$$\begin{array}{r} 3a+2b-cx \\ 4a-c \\ \hline 12aa+8ab-4acx \\ -3ac-2bc+ccx \end{array}$$

Parimenti moltiplicando $am - 3c + 4$ per $b - 4a + 2$, ſi avra il prodotto $abm - 3bc + 4b - 4aam + 12ac - 16a + 2am - 6c + 8$.

$$\begin{array}{r} am-3c+4 \\ b-4a+2 \\ \hline abm-3bc+4b \\ -4aam+12ac-16a \\ +2am-6c+8 \end{array}$$

Scolio I.

61. La moltiplicazione delle quantità compoſte alle volte ancora ſi ottiene per mezzo del ſegno della moltiplicazione, tirando una linea ſopra i moltiplicatori compoſti.

Così $\overline{a + c - x} \times \overline{b - m}$ indica il prodotto della quantità $a + c - x$ nella quantità $b - m$.

Parimenti $\overline{4a + b - am} \times c$ ſignifica il prodotto $4ac + bc - acm$, che naſce moltiplicando $4a + b - am$ per c.

In altra maniera ancora s'indica il prodotto delle quantità compoſte, cioè racchiudendo ma una parentesi il moltiplicatore, e il moltiplicando.

Come $(a - c)(m - x)$ indica il prodotto da $a - c$ in $m - x$.

Similmente $(a + b)m$ ſignifica il prodotto da $a + b$ in m.

Sco-

Scolio II.

62. Oltre a ciò essendo cosa molesta il ripetere due, o più volte la stessa lettera nel medesimo prodotto; perciò siccome nell'Addizione (51.) la somma a + a esprimesi più brevemente per 2a, e la somma b + b + b s'indica per 3b, ecc.; così nella moltiplicazione delle quantità il prodotto a a si denota per a^2, cioè ponendo il numero 2 alla destra, e un poco sopra la lettera a.

Parimenti il prodotto a a a s'indica per a^3.

Similmente b^4 significa il prodotto da b in b in b in b; e così degli altri.

63. I numeri poi collocati alla destra, e un poco sopra le lettere, diconsi *Indici*, ovvero *Esponenti* delle medesime quantità; perchè indicano ed espongono i prodotti dalle medesime quantità moltiplicate per se stesse una, o due, o più volte.

64. Quelle quantità, che non hanno esponente alcuno, sempre intendesi che abbiano l'unità. Così a significa a^1, m vale lo stesso che m^1, ecc.

65. Quando le quantità da moltiplicarsi tra di loro sono espresse dalle medesime lettere, allora uniscansi insieme gli esponenti, e si avrà il prodotto delle medesime quantità.

Sia da moltiplicarsi la quantità a^2 per a^3, il prodotto sarà a^5.

Dimostrazione.

Imperciocchè a^2 (62.) significa il prodotto a a a, e a^3 significa a a; ma la quantità a a a moltiplicata per a a dà il prodotto a a a a a, il quale (62.) più brevemente si esprime per a^5; dunque moltiplicando a^2 per a^3, il prodotto sarà a^5; per conseguenza la somma degli esponenti indica il prodotto delle quantità, che sono espresse dalle medesime lettere.

Per tanto moltiplicando b^4 per b^3, il prodotto sarà b^7; e moltiplicando a, ovvero a^1 (64.) per a^7, il prodotto sarà a^8.

Parimenti moltiplicando $a^2\,b^3$ per $a^4\,b^1$, il prodotto sarà $a^7\,b^4$.

Similmente la quantità $4a\,b^5\,x$ moltiplicata per $3\,a^4\,b^2\,m$, dà il prodotto $12\,a^5\,b^{11}\,m\,x$.

Laonde quando le quantità da moltiplicarsi tra di loro già sono prodotti dalla moltiplicazione di più quantità, allora soltanto si uniscano tra di loro gli esponenti delle quantità espresse dalle medesime lettere.

Come moltiplicando $a^4\,c^1$, e $a^2\,b\,x^1$ per $a\,c^4$, il prodotto sarà $a^7\,b\,c^5\,x^1$; e così dell'altre.

66. Quindi è da notarsi diligentemente che passa una grandissima differenza tra la quantità, che abbia qualsivoglia numero per coeficiente, e tra la medesima quantità, che abbia lo stesso numero per esponente.

Così

Così sono molto differenti tra di loro 2a, e a^2, 3a, e a^3, ecc. Imperciocchè poniamo che la quantità a significhi il numero 5, cioè sia a = 5; allora saranno 2a, ovvero a + a = 10, 3a = 15, 4a = 20 (22.); ma a^2, ovvero a × a significherà 5 × 5, cioè 25; e a^3, cioè a^2 × a significherà 25 × 5, cioè 125; e a^4, ovvero a^3 × a significherà 125 × 5, cioè 625.

Parimenti se sarà m = 10, sarà 3m = 30; ma m^3 significherà il numero 1000; e così degli altri.

PROBLEMA DECIMO.

Dividere le quantità Algebraiche. 67.

Risoluzione I.

PRimieramente nella divisione delle quantità, in tutto appunto come nella moltiplicazione (55, 56.), i medesimi segni danno +, e quei che sono diversi danno —; cioè nel dividere + per +, o — per —, sempre al quoziente si premetta il segno +; e dividendo + per —, ovvero — per +, sempre si preponga al quoziente il segno —.

In secondo luogo i coeficienti, quando ve ne sono, si dividano separatamente, conforme alle regole dell'Aritmetica Volgare di sopra insegnate.

In terzo luogo dal dividendo si cancellino quelle lettere, che contengonsi anche nel divisore, e si avrà il quoziente ricercato: come dividendo am per a, il quoziente sarà m; imperciocchè il quoziente m moltiplicato nel divisore a restituisce la quantità dividenda am. 68.

Nella medesima maniera dividendo la quantità aacx per — ac, il quoziente sarà — ax, perchè — ac moltiplicato per — ax restituisce la quantità dividenda aacx.

Similmente dividendo 15abm per 3ab, il quoziente sarà 5m; perchè 5m × 3ab restituisce 15abm.

In quarto luogo quando tutte le lettere del divisore non sono contenute nel dividendo, allora il quoziente si esprime per mezzo della frazione, il numerator della quale sia la quantità dividenda, e il denominator sia il divisore. Come dividendo a per m, il quoziente sarà $\frac{a}{m}$; e dividendo c per — m, il quoziente sarà $\frac{c}{-m}$ ovvero $-\frac{c}{m}$. 69.

Parimenti dividendo 6amn per 3bx, il quoziente sarà $\frac{6amn}{3bx}$ oppure $\frac{2amn}{bx}$, ovvero $2\frac{amn}{bx}$; perchè il coeficiente 6 può esser diviso per il coeficiente 3.

Similmente dividendo acx per mx, il quoziente sarà $\frac{acx}{mx}$.

In quinto luogo se le medesime lettere si ritrovino tanto nel divisore, quanto nel dividendo, e abbiano i numeri esponenti (63.), 70.

allora l'esponente del divisore si sottragga dall' esponente del dividendo, e il residuo sarà l'esponente del quoto.

Così dividendo m^7 per m^4, il quoziente sarà m^3.

Dimostrazione.

Imperciocchè se distesamente si scrivano (62.), m^7 equivale alla quantità m m m m m m m, e m^4 uguaglia m m m m; e dividendo m m m m m m m per m m m m, il quoziente (68.) sarà m m m, cioè m^3; dunque anche $\frac{m^7}{m^4}$ uguaglia m^3; laonde è manifesto che gli esponenti del divisore si devono sottrarre dagli esponenti della quantità dividenda, acciò abbiasi il quoziente ricercato.

Similmente dividendo $-a^7$ per $-a^4$, il quoziente sarà $+a^3$, cioè a^3.

Parimenti dividendo $8a^3b^4c$ per $4a^3b^2c$, il quoziente sarà $2b^2$, perchè $2b^2 \times 4a^3b^2c$ restituisce $8a^3b^4c$.

71. Oltre a ciò qualsivoglia quantità divisa per se stessa dà per quoziente l'unità, cioè 1; imperciocchè qualsivoglia quantità contiene una volta se stessa; perciò dividendo a per a, il quoziente sarà 1, perchè il quoziente 1 moltiplicato per il divisore a restituisce la quantità dividenda 1 a, cioè a.

Così pure dividendo 5b per 5b, ovvero 4ax per 4ax, oppure $7a^3b$ per $7a^3b$ ecc. il quoziente sempre sarà 1, come da se chiaramente apparisce.

Corollario.

72. Quindi ne segue che la quantità, che ha per esponente la cifra o, è uguale all'unità. Così a^0 significa 1; imperciocchè acciò per esempio si divida la quantità a^3 per la quantità pure a^3 conforme alla regola insegnata al numero 70, si ha da sottrarre l'esponente 3 del divisore a^3 dall'esponente 3 del dividendo a^3, e il residuo o si deve porre per esponente del quoto; e perciò dividendo a^3 per a^3, il quoziente è a^0; ma qualsivoglia quantità divisa per se stessa dà per quoziente l'unità (71.); laonde dividendo a^3 per a^3, il quoziente è 1; dunque a^0 significa 1.

Per la stessa ragione la quantità m^0 significa 1; e così dell'altre.

Parimenti $a^0 x^0$ significa 1; perchè $a^0 x^0$ vale lo stesso che $a^0 \times x^0$; o sia 1×1, cioè 1.

Per la qual cosa dividendo a^1m per a^1m, cioè a^1m^1 per a^1m^1, il quoziente sarà am^0, o sia $a^1 \times m^0$, cioè $a^1 \times 1$, che significa a^1, ovvero a.

Riso-

Risoluzione II.

Se si ha da dividere una quantità complessa per una quantità sem- 73.
plice, allora primieramente scrivansi le date quantità, come abbiamo detto nel primo esempio del Problema Quinto; dipoi si divida ciascun termine della quantità composta per il dato divisore, come si può vedere negli esempj seguenti.

Sia da dividersi la quantità
$ab + ac - ax$, e il divisore sia a; posto il divisore a alla destra della quantità dividenda, e tirata di sotto una linea,

Primieramente dividasi il termine ab per a, e il quoziente b scrivasi sotto il divisore, e sarà il primo termine del quoziente. Dipoi dividasi il secondo termine $+ ac$ per a, e il quoziente $+c$ scrivasi per secondo termine del quoziente. Finalmente dividasi $- ax$ per a, e il quoziente $- x$ sarà il terzo termine del quoziente ricercato: e perciò il quoziente che risulta nel dividere la quantità $ab + ac - ax$ per a sarà
$b + c - x$:
imperciocchè moltiplicando il quoziente $b + c - x$ per il divisore a, si restituisce la quantità divisa
$ab + ac - ax$.

Nella stessa maniera dividendo
$8ab - 12am + 4a$ per $4a$, si ritrova il quoziente $2b - 3m + 1$.

Parimenti dividendo
$6ac - 9abc + 12acx - 3ac$ per la quantità $3ac$, il quoziente sarà.
$2 - 3b + 4x - 1$.

Così pure dividasi $3ab - bc - 3b + bm$ per $- b$,
si ritroverà il quoziente
$- 3a + c + 3 - m$.

Se la quantità dividenda ha termini, che non possano esser divisi 74.
per il dato divisore; allora la divisione de' medesimi termini si faccia a guisa della frazione; come dividendo $ac - cm + ab - x$ per c,
il quoziente sarà $a - m + \frac{ab}{c} - \frac{x}{c}$,
ovvero sarà $a - m + \frac{ab-x}{c}$

Similmente dividendo
$a + bc - x$ per m,
il quoziente si esprimerà per la frazione $\frac{a + bc - x}{m}$

Risoluzione III.

Quando poi è da dividersi una quantità complessa per un' altra 75.
quantità composta, allora a destra della quantità dividenda, frapposta vi una linea, scrivasi il divisore, e sotto il medesimo divi-

fore tirisi un' altra linea, e l' operazione si faccia nella stessa maniera, come nella divisione de' numeri. Gli esempj renderanno chiara la cosa.

Sia da dividersi la quantità

$ab + am - ax$,

e il divisore sia

$b + m - x$.

Primieramente dividasi il termine ab per il termine primo del divisore, e il quoziente a pongasi di sotto la linea sotto il divisore. Dipoi si moltiplichi il ritrovato quoziente a per tutto il divisore $b + m - x$, e il prodotto $ab + am - ax$ si sottragga dalla quantità dividenda scrivendo $-ab - am + ax$ di sotto, o dopo la quantità dividenda $ab + am - ax$. Dipoi si cancellino i termini uguali marcati co' segni contrarj, il residuo sarà o. E perciò a è il quoziente di questa divisione; imperciocchè moltiplicando il divisore $b + m - x$ per il quoziente a, si restituisce la quantità divisa $ab + am - ax$.

$$\begin{array}{l|l} ab + am - ax & b + m - x \\ ab + am - ax & a \\ \hline -ab - am + ax & \end{array}$$

Si ha lo stesso quoziente se si divida il termine am per m secondo termine del divisore, o se si divida il termine $-ax$ per $-x$.

76. Quando i termini del divisore ugualmente sono contenuti ne' termini corrispondenti della quantità dividenda, si può liberamente fare la divisione per qualsivoglia termine del divisore, il quale però preso una volta, sempre si adopra, nè si può mai mutare, come è manifesto pel seguente esempio.

Sia da dividersi la quantità

$aa - bb + 2bc - cc$ per

$a + b - c$; scrivansi come poco sopra si è detto, dipoi si faccia la divisione per qualsivoglia termine del divisore, a cagion d' esempio per a, e si divida il termine aa per a; il quoziente (68.) sarà a, il quale pongasi di sotto la linea tirata sotto il divisore, e si moltiplichi a per tutto il divisore $a + b - c$, e il prodotto $aa + ab - ac$ si sottragga dalla quantità dividenda, cioè (mutati i segni) scrivasi $-aa - ab + ac$ o dopo, o di sotto la quantità dividenda $aa - bb + 2bc - cc$, si avrà il residuo

$aa - bb + 2bc - cc - aa - ab + ac$; e cancellati i termini $+aa$, e $-aa$, resterà la quantità dividenda $-bb + 2bc - cc - ab + ac$, della qual quantità dividasi il termine $-ab$ per l' assunto termine del divisore a, e il quoziente (67. 68.) sarà $-b$, il quale scrivasi dopo a primo termine del quoziente già ritrovato; e si moltiplichi $-b$ per il divisore $a + b - c$, e il prodotto $-ab - bb + bc$ si sottragga dalla quantità dividenda, scrivendo sotto la medesima $+ab + bb - bc$, e il residuo sarà

$-bb + 2bc - cc - ab + ac + ab + bb - bc$, il quale si

le si riduca a termini più semplici (51.), e resterà la quantità dividenda bc — cc + ac, il di cui termine + ac si divida per l'assunto termine del divisore a, il quoziente sarà + c, il quale pongasi per terzo termine del quoziente; e il medesimo c si moltiplichi per il divisore a + b — c, e il prodotto
ac + bc — cc si sottragga dalla quantità dividenda bc — cc + ac, il residuo sarà
bc — cc + ac — ac — bc + cc
uguale al nulla; perchè bc, e — bc, — cc, e + cc, + ac, e — ac scambievolmente si distruggono; laonde il quoziente sarà a — b + c;
avvegnacchè se si moltiplichi a — b + c per il divisore a + b — c, il prodotto
aa — ab + ac + ab — bb + bc — ac + bc — cc ridotto a termini più semplici (51.), restituirà la quantità dividenda aa — bb + 2bc — cc.

77. Quando poi il divisore contiene termini, che ugualmente non sono contenuti ne' termini corrispondenti della quantità dividenda, allora la divisione sempre si faccia per quel termine del divisore, ch'è contenuto più, o almeno un'intera volta ne'termini della quantità dividenda.

Come se la quantità $a^3 - b^3$ sia da dividersi per $a^2 + ab + b^2$, allora la divisione può farsi per a^2, ovvero per b^2, i quali ugualmente sono contenuti ne' termini corrispondenti a^3, e $— b^3$; ma non mai si faccia per ab, perchè mai si troverebbe il quoziente di quella divisione a — b.

78. Che se, fatta la divisione, vi resta qualche cosa nella quantità dividenda, che non possa dividersi per il preso termine del divisore, allora quel residuo si scriva dopo il quoziente ritrovato co' proprj segni +, e —, sottoponendogli tutto il divisore, frapposta vi una picciola linea.

Sia da dividersi la quantità
aa + bb, e il divisore sia
a — b; dividasi aa per a, e il quoziente a si moltiplichi per il divisore a — b, e il prodotto aa — ab si sottragga dalla quantità dividenda, il residuo sarà
aa + bb — aa + ab, cioè
bb + ab (51.); e di questo residuo si divida il termine + ab per l'assunto divisore a, il quoziente sarà b, il quale si moltiplichi per il divisore a — b, e il prodotto ab — bb si sottragga dalla quantità dividenda bb + ab, il residuo sarà
bb + ab — ab + bb, cioè
2bb (51.), che non può esser diviso per l'assunto termine del divisore a; e perciò nel quoziente dopo a + b scrivasi $\frac{+2bb}{a-b}$; e il quoziente ricercato sarà $a + b + \frac{2bb}{a-b}$.

Simil-

79. Similmente quando niun termine della quantità dividenda può dividersi interamente per niun termine del divisore, allora il quoziente altresì esprimesi per mezzo della frazione, il numerator della quale sia la quantità dividenda, e il denominator sia il divisore; come dividendo

ab + aa per m — x, il quoziente farà

$$\frac{ab+aa}{m-x}.$$

80. Finalmente la divisione delle quantità composte alle volte ancora si esprime racchiudendo il dividendo e il divisore tra una parentesi, e frapponendovi due punti:

Come (a + b) : (c — x), indica il quoziente

$$\frac{a+b}{c-x}.$$

Parimenti (ab — x) : m, significa $\frac{ab-x}{m}$.



DE-

DEGLI ELEMENTI DELL' ARITMETICA UNIVERSALE

LIBRO SECONDO.

Del Calcolo de' Rotti, o sia delle Frazioni.

Definizione Prima.

QUella diceſi *Parte aliquota* di qualſivoglia quantità, che 81.
alquante volte ripetuta, o preſa, forma, o uguaglia il ſuo tutto; ovvero è quella, per cui dividendo una data quantità, ſi ha il quoziente intero ſenza alcuna frazione. Così il 3 è parte aliquota del numero 15, perchè il 3 ripetuto, o ſia preſo cinque volte, forma il numero 15: o ſia perchè il 3 è la quinta parte intera dello ſteſſo numero 15.

Similmente 9 è parte aliquota del numero 36; perchè dividendo 36 per 9, il quoziente è il numero intero 4.

Quella parte poi, che preſa alcune volte non uguaglia il ſuo tutto, ma o lo eccede, o è di lui minore, diceſi *Parte aliquanta*.

Così il 4 è parte aliquanta del numero 14; perchè il numero 4 preſo tre volte non arriva al numero 14, e preſo quattro volte, lo ſupera.

Definizione Seconda.

Diceſi un numero *Miſurare* un altro, quando preſo alcune volte 82.
uguaglia l'altro, cioè quando è parte aliquota dell' altro numero; laonde *miſura d' un numero* è quel numero che lo miſura, cioè è qualſivoglia parte aliquota dello ſteſſo numero.

Così il 3 miſura il 12 per il 4, cioè ſe ſia ripetuto quattro volte. Parimente il 3, e il 7 ſono miſure del numero 21.

La Maſſima Miſura d' un numero poi è il maſſimo de' numeri, che lo miſura. Come le miſure del numero 12 ſono 1, 2, 3, 4, 6; e la maſſima miſura dello ſteſſo numero 12 è il 6, come è chiaro.

Definizione Terza.

Quel numero, il quale è parte aliquota di due, o più numeri, di- 83.
ceſi *Miſura comune* de' medeſimi numeri. Così il 3 è miſura comune de' numeri 6, 15, e 21, perchè tutti ad uno ad uno li miſura. Altresì il numero 2 è miſura comune di tutti i numeri pari (19.).

L'unità poi è miſura comune di tutti i numeri razionali interi.

Defi-

Definizione Quarta.

84. Numero *Primo in se*, ovvero *Incomposto*, dicesi quello, che dalla sola unità è misurato. Come i numeri 2, 5, 7, 11, ecc. ciascun de' quali non ha misura alcuna fuori dell' unità; e perciò sono numeri primi, o non composti.

Definizione Quinta.

85. *Numero Composto* dicesi quello, che oltre l' unità viene misurato da qualche altro numero diverso da se. Così il 6 è numero composto, perchè è misurato dal 2, e dal 3.

Definizione Sesta.

86. *Numeri tra di se primi*, ovvero *incomposti tra di se*, diconsi quelli, che oltre l'unità non hanno alcun'altra misura comune. Così 8, e 15, sono numeri tra di se primi, perchè eccettuata l'unità non v'è numero alcuno, che misuri l'uno e l'altro. Per la stessa ragione i numeri, 5, e 6; 12, e 17 sono numeri tra di se primi.

Definizione Settima.

87. *Numeri tra di se composti* diconsi quelli, i quali oltre l'unità hanno un'altra misura comune; come i numeri 6, 12, 15, 21, sono composti tra di se, perchè hanno il 3 per misura comune.

Corollario.

88. Poichè qualsivoglia numero misura se stesso una volta, perciò misura comune de' numeri tra di loro composti può essere uno de' medesimi numeri. Così i numeri 5, e 15 sono tra di se composti, perchè il numero 5 misura se stesso, e il 15 ancora.

Definizione Ottava.

89. *La Massima misura comune* di due, o più numeri, è il numero massimo, che li misura tutti; ovvero è quel numero, per cui dividendo ciascuno de' dati numeri, ne nascono i numeri quozienti, che sono tra di se primi.

Così de' numeri 12, e 18 la massima misura comune è 6, perchè dividendo 12, e 18 per 6 si hanno i quozienti 2, e 3, che sono numeri tra di se primi.

Defi-

Definizione Nona.

Qualfivoglia frazione (9, 10, 34.) dicesi *espressa in termini minimi*, quando il di lei numeratore, e denominatore sono numeri tra di se primi: come la frazione $\frac{3}{4}$. 90.

Parimenti $\frac{7}{16}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{5}{11}$, ecc. sono frazioni espresse in termini minimi.

Definizione Decima.

Frazioni del medesimo nome sono quelle, che hanno il medesimo denominatore; 91.

Come sono le frazioni $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{5}$; parimenti $\frac{a}{m}$, $\frac{c}{m}$, $\frac{x}{m}$, sono frazioni del medesimo nome m.

Frazioni di nome diverso diconsi quelle, che hanno denominatori diversi; come sono $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{4}{5}$; $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{m}$, $\frac{a}{x}$ ecc.

Definizione Undecima.

Tutto ciò che è, o si concepisce che possa essere, dicesi *Cosa*. *Una cosa poi dicesi riferirsi ad un' altra*, quando considerandole ambedue insieme, e tra quelle proprietà, che ad una di esse assolutamente convengono, ne apparisce alcuna, per di cui mezzo si possa conoscere qualche cosa della prima, che senza l'altra non si potea conoscere. 92.

Per esempio prendansi i due numeri 5, e 8; se il numero 8 si consideri in se stesso, si ritroverà $8 = 7 + 1$; $8 = 6 + 2$; $8 = 5 + 3$; $8 = 4 + 4$ ecc. Ma considerando insieme i numeri 5, e 8, perchè è $8 = 5 + 3$, si conosce che il numero 5 è una parte del numero 8; e allora si riferisce 5 ad 8.

Definizione Duodecima.

Tutto ciò poi, che alla data cosa assolutamente non conviene, ma soltanto intendesi che le conviene quando si riferisce ad un' altra, dicesi *Relazione*. 93.

Così del numero 5 risguardato in se stesso non intendesi che sia parte del numero 8, se non quando il numero 5 si riferisce al numero 8. Nè del numero 8 considerato in se stesso si conosce che sia maggiore del numero 5, se non quando 8 si riferisce a 5. E l' esser parte del numero 8, o esser minor dello stesso, è una certa relazione; siccome è una certa relazione esser maggiore del numero 5.

Definizione Terzadecima.

Ragione Geometrica è quella relazione d' una cosa ad un' altra del 94.

medesimo genere, la quale determina la quantità d'una cosa per mezzo della quantità d'un'altra, senza l'aiuto d'una terza cosa omogenea.

Sianvi per esempio due lunghezze, una delle quali si chiami A, e sia di piedi 4, e l'altra lunghezza B sia di piedi 20. Se si riferisca A a B, cioè se prendasi per misura la lunghezza A di quattro piedi, si troverà che la lunghezza A cinque volte è contenuta nella lunghezza B di piedi venti; per conseguenza la lunghezza A sarà alla lunghezza B come l'uno al cinque: cioè la lunghezza A sarà una quinta parte della lunghezza B.

Se poi si riferisca, o si paragoni B ad A, cioè se prendasi per misura la lunghezza B, allora si troverà che la lunghezza B contiene cinque volte la lunghezza A; e perciò la lunghezza B sarà alla lunghezza A come il cinque all'uno; cioè la lunghezza B sarà quintupla della lunghezza A.

Per tanto si la relazione della lunghezza A alla lunghezza B, come la relazione della lunghezza B alla lunghezza A resta determinata senza assumere una terza lunghezza; per conseguenza A a B, e B ad A sono due Ragioni Geometriche.

Corollario.

95. Poichè in ogni frazione (10.) il denominatore indica l'unità ovvero il tutto diviso in parti, e il numeratore numera le parti date o da prendersi nel caso proposto; perciò la relazione del numeratore al denominatore s'intende senza prendere una terza quantità omogenea; per conseguenza la frazione è una Ragione Geometrica.

Definizione Quartadecima.

96. In ogni ragione le quantità, che si paragonano tra di se, diconsi *Termini della ragione*; e il primo termine, cioè quello che all'altro si riferisce, nominasi *Antecedente della ragione*; e il secondo, a cui si riferisce il primo termine, dicesi *Conseguente della ragione*.

Così della ragione a al b, il termine a è antecedente, e b è conseguente della medesima ragione.

Il segno poi, di cui si serviamo per esprimere qualsivoglia ragione, sono due punti, che si collocano tra l'antecedente, e il conseguente, e significano *a*. Così 12:3 si legge dodici *a* tre; parimenti c:m si pronunzia c *a* m.

Definizione Quintadecima.

97. *Nome della ragione*, il quale si dice anche *Valor della ragione*, oppure *Esponente della ragione*, è il quoziente della ragione, il quale risulta dividendo l'antecedente pel conseguente; e perciò della ragione 8: 2, cioè otto *a* due, il nome sarà $\frac{8}{2}$, cioè 4; e della ragione 2: 8, cioè due *a* otto, il valore sarà $\frac{2}{8}$.

Pari-

Parimenti della ragione a m: a il valore sarà $\frac{a\,m}{a}$, cioè m; e della ragione a: c il nome sarà $\frac{a}{c}$, e così dell'altre.

Corollario.

Quindi qualsivoglia ragione è uguale alla frazione, il di cui nu- 98.
meratore sia l'antecedente della ragione (96.), e il denominatore sia il conseguente della ragione medesima.

Ed al rovescio (95.) qualsivoglia frazione uguaglia la ragione, il di cui antecedente sia il numerator della frazione, e il conseguente sia il denominatore della frazione medesima. Imperciocchè data la ragione 8:2, il di lei valore (97.) sarà la frazione $\frac{4}{1}$. Vicendevolmente data la frazione $\frac{12}{3}$, il di cui valore è 4, se ne forma la ragione 8:2 a quella uguale.

Definizione Sestadecima.

Ragioni uguali, o simili diconsi quelle, che hanno valori uguali; 99.
o sia, gli antecedenti delle quali hanno la medesima relazione ai loro conseguenti: cioè sono quelle, che hanno lo stesso nome.

Come le ragioni 6:2, 15:5 sono uguali, perchè (97.) hanno lo stesso nome 3; imperciocchè $\frac{6}{2}$ è $=3$, e $\frac{15}{5}$ è $=3$; oppure perchè 6 è il triplo del numero 2, come 15 è il triplo del numero 5.

Ragioni poi *ineguali* sono quelle, che hanno nomi diversi; ovvero quelle, i di cui antecedenti non hanno la medesima relazione ai loro conseguenti.

Come le due ragioni 8:2, e 20:10 sono ineguali, perchè il nome della prima è $\frac{8}{2}$, cioè 4, e il nome dell'altra è $\frac{20}{10}$, cioè 2: e perciò la ragione 8:2 è maggiore della ragione 20:10.

Corollario I.

Poichè le frazioni (98.) sono ragioni, perciò frazioni uguali so- 109.
no quelle, che formano ragioni uguali; ovvero quelle, i di cui numeratori hanno la stessa relazione ai loro denominatori.

Così le frazioni $\frac{2}{6}$, e $\frac{5}{15}$ sono uguali, perchè il numeratore 2 è la terza parte del suo denominatore 6, siccome il numeratore 5 è la terza parte del suo denominatore 15; o sia perchè l'una e l'altra d'esse esprime una terza parte dell'intero.

Ineguali poi sono le frazioni, quando costituiscono ragioni ineguali.

Così la frazione $\frac{3}{6}$, che significa tre seste parti d'un intero, cioè la metà, è maggior della frazione $\frac{5}{15}$, la quale esprime cinque decimequinte parti, cioè una terza parte dell'intero.

Laonde ragioni uguali formano frazioni uguali; e parimenti frazioni uguali fanno ragioni uguali.

Corollario II.

101. Quindi moltiplicando, o dividendo il numeratore, e il denominatore di qualsivoglia frazione per la medesima quantità, non si muta il valor della frazione. Imperciocchè il numeratore di qualunque frazione ha la stessa relazione al suo denominatore, che ha o il duplo del numeratore al duplo del denominatore, o il triplo del numeratore al triplo del denominatore, ecc. o la metà, o la terza, o la quarta parte del numeratore, alla metà, o alla terza, o quarta parte del denominatore, ecc.

Imperciocchè della frazione per esempio $\frac{4}{12}$ si moltiplichino il numeratore 4, e il denominatore 12 per 2, si formerà l'altra frazione $\frac{8}{24}$ uguale alla frazione $\frac{4}{12}$, perchè 8 è la terza parte del numero 24, siccome 4 è la terza parte del denominatore 12; o perchè tanto otto ventesimequarte parti d'un intero, quanto quattro duodecime parti esprimono la medesima parte dell'intero, cioè un terzo.

Che se il numeratore 4, e il denominatore 12 ambidue si dividano per 2, i quozienti 2, e 6 formeranno la frazione $\frac{2}{6}$ del medesimo valore colla frazione $\frac{4}{12}$; perchè due seste parti d'un intero indicano anch'esse una terza parte del medesimo.

Similmente data la frazione $\frac{ab}{a}$, moltiplicando il numeratore ab, e il denominatore a per la quantità c, si avrà l'altra frazione $\frac{abc}{ac}$ uguale alla data $\frac{ab}{a}$; perchè dividendo tanto abc per ac, quanto ab per a, sempre si ha lo stesso quoziente b.

Scambievolmente data la frazione $\frac{abc}{ac}$, se si dividano il numeratore abc, e il denominatore ac per la medesima quantità a, si avrà l'altra frazione $\frac{bc}{c}$ uguale alla frazione $\frac{abc}{ac}$; imperciocchè $\frac{bc}{c}$ significa b, e il valore della frazione $\frac{abc}{ac}$ è altresì b.

Definizione Decimasettima.

102. *Equazione* è il paragone di due quantità uguali (27.), la qual si fa ponendo il segno $=$ dell'uguaglianza (32.) tra due quantità uguali; oppure è l'espressione della medesima quantità per mezzo di due valori diversi, ma uguali.

Così $a = b$ è un'equazione, in cui si esprime che il valore a è uguale al valore b.

Parimente $4+3 = 12-5$, significa che il valore $4+3$ è uguale al valore $12-5$.

In ogni equazione la quantità posta avanti il segno $=$ dicesi *la prima parte dell' equazione*, e tutto ciò che ritrovasi dopo il segno $=$ chiamasi *la seconda parte dell' equazione*.

Assio-

Affioma I.

Quelle cose, che ad un'altra medesima sono uguali, anche tra di 103.
loro parimenti sono uguali.

Sia $a = m$, e $b = m$, sarà anche $a = b$.

Parimenti se sarà $6 - 2 = 4$, e $7 - 3 = 4$, sarà $6 - 2 = 7 - 3$.

Inoltre ciò, che è maggiore, o minore d'una delle cose uguali, sarà anche maggiore, o minore del rimanente delle cose uguali.

Come se sarà $a = c$, e un'altra quantità b sia maggior della quantità a, sarà altresì b maggiore di c. Se poi b sarà minore della quantità a, sarà parimenti b minore della quantità c.

Affioma II.

Se a cose uguali si aggiungano cose medesime, o uguali, quelle 104.
che risultano sono pure uguali.

Sieno date l'equazioni $a = c$, e $b = m$, radunando la prima colla seconda equazione sarà anche $a + b = c + m$.

Parimenti se sarà $a = c - m$, e all'una, e all'altra parte si aggiunga la medesima quantità m, si avrà $a + m = c - m + m$, cioè $a + m = c$ (51.).

Affioma III.

Se da cose uguali si tolgano cose medesime, o uguali, quelle che 105.
restano sono uguali.

Sia $a = b$, e $c = m$, sottraendo la seconda equazione dalla prima, sarà $a - c = b - m$.

Parimenti se pongasi $b = a + m$, sottraendo m dall'una e dall'altra parte, resterà $b - m = a + m - m$, cioè $b - m = a$.

Corollario.

Quindi se uno, o più termini, mutati i segni — in +, e + in —, 106.
si trasferiscano dall'una all'altra parte dell'equazione, le quantità sempre resteranno uguali; perchè o si aggiungono cose uguali, a cose uguali; o da cose uguali si levano altresì cose uguali.

Sia l'equazione $7 = 12 - 5$, in cui si trasporti $- 5$ dalla seconda parte nella prima, mutato il segno — in +, si avrà l'altra equazione $7 + 5 = 12$; perchè il trasferire $- 5$ col segno mutato, è aggiungere 5 all'una e all'altra parte dell'equazione $7 = 12 - 5$; imperciocchè allora (aff. 2°.) si avrà $7 + 5 = 12 - 5 + 5$; cioè $7 + 5 = 12$ (51.)

Che se nell'equazione $7 + 5 = 12$ si trasporti il termine 7 dalla prima parte nella seconda, mutato il segno + in —, si avrà l'al-

l'altra equazione $5 = 12 - 7$; avvegnacchè se dall' una e dall' altra parte dell'equazione si sottragga 7, (aff. 3°.) resterà $7 + 5 - 7 = 12 - 7$, cioè $5 = 12 - 7$ (51.)

Similmente data l'equazione $12 = 10 + 6 - 2$, trasferendo i termini $+ 6$, e $- 2$, variati i segni, si avrà l'altra equazione $12 + 2 - 6 = 10$, come è manifesto.

Questa traslazione poi d'uno, o di più termini dall' una all'altra parte dell' equazione co' segni variati, e la quale mai toglie l'equazione (aff. 2°, e 3°.) si appella *Antitesi*.

Affioma IV.

107. Se quantità uguali si moltiplichino per una medesima, oppure per uguali quantità, i prodotti saranno tra di loro uguali.

Sia l'equazione $a = c$, moltiplicando le quantità uguali a, e c per m, si avrà $am = cm$.

Parimenti se sarà $a = b$, e $c = m$, moltiplicando le quantità uguali a, e b per le uguali c, e m, i prodotti saranno uguali, cioè sarà $ac = bm$.

Similmente se l'equazione $6 - 2 = 4$ si moltiplichi per 3, si avrà la nuova equazione $18 - 6 = 12$.

Affioma V.

108. Se quantità uguali si dividano per una medesima, ovvero per uguali quantità, i quozienti saranno parimenti uguali tra di loro.

Sia l'equazione $ac = cm$, la quale dividasi per c, resterà $\frac{ac}{c} = \frac{cm}{c}$, cioè $a = m$ (68.).

Parimenti dividendo l'equazione $12 - 4 = 8$ per 2, rimarrà $\frac{12}{2} - \frac{4}{2} = \frac{8}{2}$, cioè $6 - 2 = 4$.

Similmente se saranno l'equazioni $a = b$, e $c = m$, dividendo la prima equazione per la seconda, si avrà la nuova equazione $\frac{a}{c} = \frac{b}{m}$, perchè si dividono le quantità uguali a, e b per le quantità uguali c, e m.

Affioma VI.

109. Se a cose ineguali si aggiungano cose uguali, quelle che risultano sono diseguali.

Come alle quantità diseguali 8, e 4 aggiungendo la medesima quantità 2, saranno $8 + 2$, e $4 + 2$ altresì diseguali; cioè se sarà $8 > 4$, sarà anche $8 + 2 > 4 + 2$, vale a dire $10 > 6$.

Similmente se saranno $a > c$, e $b = m$, sarà $a + b > c + m$.

Af-

Assioma VII.

Se da cose disuguali si tolgano cose uguali, quelle che restano so- 110.
no disuguali. 81

Sia 12 > 8, sarà anche 12 — 2 > 8 — 2, cioè 10 > 6. o
m Parimenti dati a > c, e b = m, sarà pure a + b > c + m,
perchè dalle quantità ineguali a, e c, togliendo le quantità uguali b,
e m, l' altre grandezze a — b, e c — m saranno altresì disuguali.

Assioma VIII.

Quelle cose, che sono il doppio, il triplo, o il quadruplo ecc. 111.
d'una cosa medesima, o di più cose uguali, sono tra di loro uguali.

Sia a il doppio della quantità b, e c il doppio della medesima quantità b, allora sarà a = c.

Assioma IX.

Quelle cose, che sono la metà, o una terza, o una quarta parte 112.
ecc. d'una cosa stessa, o di cose uguali, sono altresì tra di loro uguali.

Sia a una quarta parte della quantità m, e b pure la una quarta 81
parte della medesima quantità m, sarà a = b.

Assioma X.

Il tutto è maggior d' una sua parte. 113.

Assioma XI.

Il tutto è uguale a tutte le sue parti prese insieme. 114.

Scolio.

In questo Assioma parliamo di quelle parti, che attualmente for- 115.
mano il tutto, cioè di quelle parti, che possono ritrovarsi insieme unite nel tutto, non già di tutte le parti possibili, che assolutamente sono parti. Per esempio il numero 12 è composto d'un settenario, e d' un quinario; è adunque 12 = 7 + 5: il medesimo numero 12 è composto altresì d' un denario, e d' un binario; laonde è 12 = 10 + 2. Ma benchè 10, e 7 sieno parti assolute del numero 12, niuno mai bene concluderà essere il 12 uguale alla somma 10 + 7, perchè le parti 10, e 7 non possono ritrovarsi insieme nel tutto; avvegnacchè quando il 10 si pone parte del numero 12, allora oltre il binario (cioè 1 + 1) niun'altra parte può entrare nello stesso 12.

Assioma XII.

126. Le quantità omogenee (26.) sono tra di se o uguali, o diseguali; e perciò quella quantità, che non può esser maggiore, nè minore d'una altra quantità omogenea, sarà uguale alla medesima.

Sieno a ed m due quantità del medesimo genere, e la prima a non sia maggior, nè minore dell'altra quantità m, allor sarà a = m.

Assioma XIII.

127. Se la prima quantità sarà maggior della seconda, e la seconda similmente maggior della terza, allora la medesima prima quantità sarà altresì maggior della terza.

Sia $a > b$, e $b > c$, sarà anche $a > c$.

PROPOSIZIONE PRIMA.

Teorema.

128. *Se qualsivoglia frazione si moltiplichi per il suo denominatore, il prodotto sarà il numeratore della medesima frazione.*

Dimostrazione.

LA frazione (34, 79.) esprime il quoziente, che nasce dividendo il numeratore per il denominatore della medesima frazione; ma il quoziente di qualsivoglia divisione (49. e Probl. 10.) moltiplicato per il divisore, restituisce la quantità dividenda; dunque moltiplicando la frazione, che indica il quoziente, per il suo denominatore, che rappresenta il divisore, il prodotto sarà il numerator della frazione, che significa la quantità dividenda. Per la qual cosa acciò si moltiplichi la frazione per il suo denominatore, basta togliere lo stesso denominatore. Il che era da dimostrarsi.

Così la frazione $\frac{12}{4}$ (che significa 3.) moltiplicata per il denominatore 4, dà il prodotto 12, cioè il numerator della frazione.

Similmente la frazione $\frac{2}{3}$ moltiplicata per 3, dà il prodotto 2.

Parimenti la frazione $\frac{a}{m}$ moltiplicata per m, dà il prodotto a; e la frazione $\frac{c-b}{m} \times m$ produce $c - b$, e così dell'altre.

PRO-

PROPOSIZIONE SECONDA.

Problema.

Ridurre un intero in frazione d'un dato denominatore. 119.

Risoluzione.

Si moltiplichi l'intera quantità per il dato denominatore, e sotto al prodotto scrivasi lo stesso denominatore.

Come se si debba ridurre in frazione l'intero 5, il di cui denominatore sia 12, si moltiplichi l'intero 5 per il dato denominatore 12, e al prodotto 60 sottoscrivasi lo stesso denominatore 12; la ricercata frazione sarà $\frac{60}{12}$ uguale all'intero 5. (Probl. 5.).

Similmente se la quantità a sia da ridursi in frazione del denominatore c, la ricercata frazione sarà $\frac{ac}{c}$ avendo il denominatore c, ed essendo uguale alla quantità a: perchè $\frac{ac}{c}$ (68.) significa a.

Non altrimenti la quantità c si riduce alla frazione, il di cui denominatore sia a — m, moltiplicando c per a — m, e al prodotto ac — cm sottoscrivendo il dato denominatore a — m; e la ricercata frazione sarà $\frac{ac-cm}{a-m}$ uguale alla quantità c. (75.).

Parimenti l'unità si riduce alla frazione, il di cui denominatore sia 8, moltiplicando 1 per 8, e sottoscrivendo il denominatore 8 al prodotto 8; laonde $\frac{8}{8}$ sarà una frazione uguale all'unità, e che avrà il denominatore 8.

Nella stessa maniera la frazione $\frac{a}{a}$ è = 1.

Corollario I.

Quindi la frazione, il di cui numeratore è uguale al denominatore, 120.
significa un intero; perchè si prendono tutte le parti d'un intero, che è diviso in tante parti, quante ne contiene il denominatore.

E però ciascuna delle frazioni $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, ecc. significa 1.

Similmente $\frac{a}{a}$, $\frac{b}{b}$, $\frac{c-m}{c-m}$ significano 1.

Ma la frazione, il numerator della quale è maggior del denominatore, contiene più d'un intero.

Così la frazione $\frac{5}{4}$ contiene un intero, e di più $\frac{1}{4}$.

Parimenti $\frac{17}{5}$ significa due interi, e di più $\frac{7}{5}$ ecc.

Quando poi il numeratore è minor del denominatore, allor la frazione significa meno d'un intero.

Come $\frac{2}{3}$ esprime soltanto due terze parti d'un intero diviso in tre parti.

Corollario II.

121. Oltre a ciò se a qualsivoglia quantità intera si soscriva l' unità per denominatore, si avrà la frazione, o quasi frazione, uguale a un intero.

Così $\frac{4}{1}$ significa 4; $\frac{10}{1}$ significa 10; $\frac{a}{1}$ significa a; $\frac{b-x}{1}$ vale $b-x$ ecc. imperciocchè porre l'unità per denominatore d'un intero significa lo stesso, che ridurre un dato intero in frazione, il di cui denominatore sia 1.

Scolio.

122. Da questo Problema si deduce la pratica di ridurre le monete, i pesi, e le misure ad altre di spezie inferiore. Per esempio i denari sono parti dodicesime d' un soldo; i soldi sono parti ventesime d'una lira d' argento ecc.; per ridurre adunque cinque soldi in denari (cioè in parti dodicesime d'un soldo), si moltiplichi 5 per 12, e si avranno 60 denari, cioè 60 dodicesime parti d'un soldo, le quali equivagliono a 5 soldi, essendo $\frac{60}{12} = 5$

Parimenti 4 lire ridotte in ventesime parti danno $\frac{80}{20}$, cioè 80 soldi; e così dell' altre.

PROPOSIZIONE TERZA.

Problema.

123. *Ridurre le Frazioni agl' interi.*

Risoluzione.

LA Frazione, il di cui numeratore è maggiore, o uguale al denominatore, si riduce agl' interi, dividendo il numeratore per il denominatore.

Come della frazione $\frac{12}{3}$ dividendo il numeratore 12 per il denominatore 3, si ritrovano 4 interi.

Parimenti la frazione $\frac{abm}{m}$ si riduce all'intero ab.

Quando poi, fatta la divisione, vi resta qualche cosa, allora il quoziente sarà un numero misto. Così la frazione $\frac{23}{4}$ dà $5\frac{3}{4}$, cioè cinque interi assieme con tre quarte parti d'un intero. Per esempio 23 quarte parti d'una lira nostrale d' argento fanno cinque lire, e quindici soldi, i quali formano tre quarte parti d'una lira.

PRO-

PROPOSIZIONE QUARTA.

Problema.

Ritrovare la massima misura comune di due numeri. 124.

Risoluzione.

SI divida il numero maggiore per il minore, e terminata la divisione, se nulla restavi, allora il numero minore sarà la misura ricercata.

Come de' numeri 7, e 28, la massima misura comune (88., 89.) è 7; perchè dividendo 28 per 7, nulla vi rimane; e dividendo i medesimi numeri 7, e 28 per 7, i quozienti 1, e 4 sono numeri tra di se primi.

Che se, diviso il maggiore per il minore, vi resta qualche cosa, allora, trascurato il quoziente, si noti il residuo, indi per questo residuo si divida il numero minore. Dipoi, lasciato sempre da parte il quoziente, si divida il primo residuo per il secondo, il secondo per il terzo, e così in seguito, fino a tanto che si ritrovi il divisore, che esattamente divida il precedente residuo senza alcun avanzo: e il divisore ultimo sarà la massima misura comune ricercata.

Sia da ritrovarsi la massima misura comune de' numeri 203, e 667; dividasi 667 per 203, e trascurato il quoziente 3, si divida 203 per il primo residuo 58; dipoi, trascurato ancora il quoziente, per il secondo residuo 29 si divida il 58; fatta la divisione, il residuo sarà 0; e perciò devesi concludere che il numero 29. sia la massima misura comune ricercata: imperciocchè se si dividano i numeri 203, e 667 per 29, i quozienti 7 e 2 saranno numeri tra di se primi. Il che era da provarsi.

667 | 203
609 | 3
203 | 58
174 | 3
58 | 29
58 | 2
0 0

Finalmente se dopo la divisione d'ogni cosa l'ultimo residuo sarà 125.
1 uno, sarà segno che i dati numeri sono tra di se primi, cioè che hanno la sola unità per misura comune.

Come se si cerchi la massima misura comune de' numeri 17, e 58; diviso 58 per 17, e trascurato il quoziente 3, il residuo è 7, per cui si divida 17, il residuo sarà 3, e per questo di nuovo si divida 7, il residuo sarà 1; il che significa che i dati numeri 17, e 58 non hanno misura alcuna comune fuori dell'unità; per conseguenza che sono numeri tra di se primi (86).
Ciò che si volea dimostrare.

58 | 17
51 | 3
17 | 7
14 | 2
7 | 3
6 | 2
1

PROPOSIZIONE QUINTA

Problema.

126. *Ridurre le frazioni a termini minimi.*

Risoluzione.

IN primo luogo (Probl. preced.) si ritrovi la massima misura comune tra il numeratore e il denominatore della data frazione.

Dipoi per la ritrovata misura si dividano il numeratore, e il denominatore della data frazione; e i quozienti formeranno la ricercata frazione espressa in termini minimi, e alla data (101.) uguale.

Come per ridurre a termini minimi la frazione $\frac{32}{48}$, si ritrovi (124.) la massima misura comune de' numeri 32, e 48, ch' è 16, per la qual misura 16 si dividano i numeri 32, e 48, i quozienti 2, e 3 daranno la frazione $\frac{2}{3}$ espressa in termini minimi (90.), perchè i numeri 2, e 3 (89.) sono tra di se primi. Oltre a ciò, perchè il numerator 32, e il denominator 48 furono divisi per il medesimo numero 16, perciò i quozienti 2, e 3 formano la frazione $\frac{2}{3}$ (101.) uguale alla frazione $\frac{32}{48}$.

Nel modo medesimo le frazioni $\frac{6}{20}$, $\frac{37}{14}$, $\frac{12}{32}$, $\frac{201}{667}$ si riducono ai termini minimi $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{7}{21}$; e così dell' altre.

Similmente la frazione $\frac{am}{cm}$ si riduce alla frazione $\frac{a}{c}$ espressa in termini minimi.

PROPOSIZIONE SESTA.

Problema.

127. *Ridurre le frazioni allo stesso nome.*

Risoluzione.

PRimieramente quando le frazioni, che si devono ridurre allo stesso nome, o denominatore sono soltanto due, come $\frac{a}{m}$, e $\frac{c}{x}$, allora il numeratore a, e il denominatore m della frazione $\frac{a}{m}$ ambidue si moltiplichino per il denominatore x della seconda frazione $\frac{c}{x}$. Dipoi il numeratore c, e il denominatore x della frazione $\frac{c}{x}$ ambidue si moltiplichino per m denominatore della prima frazione; e le ricercate frazioni saranno $\frac{ax}{mx}$, e $\frac{cm}{mx}$, del medesimo nome mx, ed uguali alle date frazioni $\frac{a}{m}$, $\frac{c}{x}$.

Di-

Dimostrazione.

Imperciocchè (101.) $\frac{am}{mx}$ è $= \frac{a}{m}$, e $\frac{cm}{mx} = \frac{c}{x}$. Il che era da dimostrarsi.

Così pure le due frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$ si riducono alle frazioni $\frac{14}{21}$, e $\frac{12}{21}$ del medesimo nome, moltiplicando 2 e 3 per 7, e moltiplicando 4 e 7 per 3.

Quando poi saranno in maggior numero le frazioni da ridursi al medesimo nome, come $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{m}$, $\frac{a}{x}$, allora il numeratore e il denominatore di qualsivoglia frazione ambidue si moltiplichino per il prodotto, che risulta da tutti i denominatori dell'altre frazioni; cioè i termini a, e c della frazione $\frac{a}{c}$ si moltiplichino per m x; i termini poi b ed m della frazione $\frac{b}{m}$ si moltiplichino per c x; e i termini a ed x della frazione $\frac{a}{x}$ si moltiplichino per c m, si avranno le nuove frazioni $\frac{amx}{cmx}$, $\frac{bcx}{cmx}$, e $\frac{acm}{cmx}$ del medesimo nome c m x, ed uguali alle date frazioni.

Dimostrazione.

Imperciocchè (101.) $\frac{amx}{cmx}$ è $= \frac{a}{c}$; $\frac{bcx}{cmx} = \frac{b}{m}$; e $\frac{acm}{cmx} = \frac{a}{x}$. Ciò che si volea dimostrare.

Nella stessa guisa date le frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, moltiplicando 2 e 3 per 5×7, cioè per 35; dipoi moltiplicando 4 e 5 per 3×7, cioè per 21; finalmente moltiplicando 6 e 7 per 3×5, cioè per 15, ne nascono le frazioni $\frac{70}{105}$, $\frac{84}{105}$, $\frac{90}{105}$ del medesimo nome 105, e (101.) uguali alle date frazioni.

Corollario.

Poichè delle frazioni dello stesso nome quella è maggiore, che ha il numerator maggiore, come è chiarissimo; perciò date due, o più frazioni di nome diverso, affinchè apparisca quale di loro sia maggiore, si riducano al medesimo nome, e il numerator maggiore indicherà la frazione più grande. 128.

Come date le frazioni $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$, se si riducano al medesimo nome (127.), si avranno le nuove frazioni $\frac{28}{84}$, $\frac{21}{84}$, $\frac{12}{84}$, la maggior delle quali è $\frac{28}{84}$, che equivale alla frazione $\frac{1}{3}$: conseguentemente delle date frazioni $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$ la massima è $\frac{1}{3}$.

PRO-

PROPOSIZIONE SETTIMA

Problema.

129. *Sommare le frazioni.*

Risoluzione.

SE le date frazioni hanno lo stesso denominatore, allora tutti i numeratori si raccolgano in una sola somma (38, 50.); e alla medesima somma si sostriva il dato denominatore comune.

Così delle frazioni $\frac{a}{m}$, $\frac{-b}{m}$, $\frac{c}{m}$, $\frac{x}{m}$ la somma sarà $\frac{a-b+c+x}{m}$.

Parimenti delle frazioni $\frac{4}{11}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{2}{11}$, la somma sarà $\frac{4+3+2}{11}$ cioè $\frac{9}{11}$.

Quando le frazioni non hanno il medesimo nome, allora (127.) si riducano, e il restante facciasi, come s'è detto.

Oltre a ciò la somma delle frazioni alle volte ancora si fa senza alcuna riduzione al medesimo nome, scrivendo le date frazioni co' loro segni $+$, e $-$.

Come delle frazioni $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{m}$, e $\frac{-a}{x}$, la somma sarà $\frac{a}{c}+\frac{b}{m}-\frac{a}{x}$ ovvero sarà $\frac{amx+bcx-acm}{cmx}$, se si riducano al medesimo nome.

Se poi s'abbiano a sommare rotti e interi, allora ridotte le frazioni al medesimo nome, separatamente si uniscano insieme gl'interi, e separatamente le frazioni, la somma delle quali se forma (123.) qualche intero, si aggiunga alla somma degl'interi.

Come de' numeri $8\frac{7}{9}$, $12\frac{4}{7}$, e $9\frac{5}{7}$, cioè (ridotte le frazioni al medesimo nome), de' numeri $8\frac{70}{126}$, $12\frac{24}{126}$, $9\frac{90}{126}$ la somma sarà $29\frac{244}{126}$, cioè $31\frac{118}{126}$, perchè la somma delle frazioni $\frac{244}{126}$ (123.) contiene due interi insieme colla frazione $\frac{118}{126}$.

PROPOSIZIONE OTTAVA

Problema.

130. *Sottrarre le Frazioni.*

Risoluzione.

SE le frazioni sono del medesimo nome, si sottragga il numerator della frazione sottraenda dal numerator della frazion diminuenda, e il denominatore comune si ponga di sotto al residuo.

Co-

Come dalla frazione $\frac{2}{3}\frac{8}{7}$ sottraendo la frazione $\frac{1}{2}\frac{4}{5}$, il residuo sarà $\frac{18-14}{25}$, cioè $\frac{4}{25}$.

Parimenti dalla frazione $\frac{a}{m}$ levando la frazione $\frac{c}{m}$, il residuo sarà $\frac{a-c}{m}$.

Similmente dalla frazione $\frac{a}{m+c}$ sottraendo il rotto $\frac{b-x}{m+c}$, il residuo sarà $\frac{a-b+x}{m+c}$.

Quando poi le date frazioni non hanno il medesimo nome, allora si riducano (127.) alla stessa denominazione, e il rimanente si faccia come si è detto.

131. Se si abbia a sottrarre una frazione da un intero, o all'opposto una quantità intera da una frazione, allora si riduca la quantità intera alla frazione del medesimo nome colla data frazione, di poi si operi come si è detto di sopra.

Come dall' intero 8 sottraendo la frazione $\frac{4}{5}$, riduco (119.) il numero 8 in quinte parti, e saranno $\frac{40}{5}$; dipoi sottraendo $\frac{4}{5}$ da $\frac{40}{5}$, il residuo sarà $\frac{36}{5}$, ovvero (123.) riducendolo ad interi, sarà $7\frac{1}{5}$.

Nella stessa guisa dalla quantità a sottraendo la frazione $\frac{c}{m}$, riduco a in frazione (119.), il cui denominatore sia m, sarà $\frac{am}{m}$, e fatta la sottrazione, il residuo sarà $\frac{am-c}{m}$.

Similmente per sottrarre l'intera quantità b dalla frazione $\frac{b}{c}$, riducasi b in frazione col nome c (119.), sarà $\frac{bc}{c}$; dipoi fatta la sottrazione come nel numero antecedente, il residuo sarà $\frac{bc-b}{c}$.

132. La sottrazione delle frazioni si fa anche alle volte senza riduzione alcuna, mutando solo i segni della quantità sottraenda, come nel Problema Ottavo del Libro I.

Così sottraendo la frazione $\frac{c-m}{x}$ dalla frazione $\frac{a}{m}$, il residuo sarà $\frac{a}{m}\frac{-c+m}{x}$.

PRO-

PROPOSIZIONE NONA

Problema.

139. *Moltiplicare le Frazioni.*

Risoluzione.

LA moltiplicazione delle frazioni si ottiene col moltiplicare tra di se i numeratori, e tra di se pure i denominatori.

Come a moltiplicare la frazione $\frac{5}{7}$ per la frazione $\frac{3}{4}$, si moltiplichi 5 per 3, e 7 per 4, il prodotto ricercato sarà $\frac{15}{28}$.

Nella stessa maniera se qualsivoglia frazione, come $\frac{a}{c}$ sia da moltiplicarsi per la frazione $\frac{b}{m}$, il prodotto sarà $\frac{ab}{cm}$.

Dimostrazione.

Poichè (21.) x può significare qualsivoglia quantità intera, e qualunque frazione; perciò poniamo che x significhi la frazione $\frac{a}{c}$, cioè sia $\frac{a}{c} = x$.

Similmente facciasi $\frac{b}{m} = z$: dipoi la prima equazione si moltiplichi per c, e (assiom. 4, e propos. 1.) si avrà l'altra equazione $a = cx$.

Parimenti l'equazione $\frac{b}{m} = z$ moltiplicata per m (107, 118.) produce l'altra equazione $b = mz$.

Dipoi l'equazione $a = cx$ si moltiplichi per l'equazione $b = mz$, cioè a per b, e cx per mz; e (assiom. 4.) si avrà l'altra equazione $ab = cmxz$.

Finalmente quest'ultima equazione si divida per cm, e (assiom. 5.) sarà $\frac{ab}{cm} = \frac{cmxz}{cm}$, cioè (68.) sarà $\frac{ab}{cm} = xz$. Ma per la fatta ipotesi la quantità x esprime il valor della frazione $\frac{a}{c}$, e z equivale a $\frac{b}{m}$, perciò (58.) il prodotto xz esprime il prodotto dalla frazione $\frac{a}{c}$ nella frazione $\frac{b}{m}$. Si è poi già dimostrato $\frac{ab}{cm} = xz$; dunque anche $\frac{ab}{cm}$ è il prodotto dalla frazione $\frac{a}{c}$ nella frazione $\frac{b}{m}$.

Per la qual cosa la moltiplicazione de' rotti si fa moltiplicando i numeratori tra di loro, e tra loro pure i denominatori. Ciò che era da farsi, e da dimostrare.

134. Se sia da moltiplicarsi una frazione per un'intera quantità, o un' intera quantità per una frazione, allora si moltiplichi il numerator del-

della data frazione per l'intera quantità, e al prodotto si soscriva il denominatore della medesima frazione.

Come moltiplicando $\frac{1}{7}$ per 2, cioè (121.) per $\frac{2}{1}$, il prodotto sarà $\frac{2}{7}$ per la dimostrazion precedente.

Parimenti moltiplicando $\frac{a}{c}$ per m, cioè per $\frac{m}{1}$, il prodotto sarà $\frac{am}{1c}$, cioè $\frac{am}{c}$.

Quando poi si ha da moltiplicare un intero colla frazione per un altro intero, allora l'intero si moltiplichi per l'altro intero, e per la frazione.

Come moltiplicando $5\frac{1}{4}$ per 2, il prodotto sarà $10\frac{2}{4}$; e (123.) riducendo la frazione all' intero, quel prodotto sarà $11\frac{2}{4}$, ovvero $11\frac{1}{2}$ (126.)

Che se abbiasi a moltiplicare un intero con un rotto per una fra- 135.
zione, allora (119.) si riduca l'intero in frazione del medesimo nome con quella, a cui è congiunto, e si sommeranno assieme, dipoi si opererà come sopra.

Così per moltiplicare il numero misto $3\frac{5}{6}$ per $\frac{2}{3}$, riduco l'intero 3 in seste parti (119.), ed avrò la frazione $\frac{18}{6}$, la quale unisco alla frazione $\frac{5}{6}$, e moltiplico la somma $\frac{23}{6}$ per $\frac{2}{3}$, il prodotto sarà $\frac{46}{18}$, il quale (123.) fa un intero colla frazione $\frac{28}{18}$, ovvero $\frac{14}{9}$ (126.)

Se poi si abbia a moltiplicare un intero colla frazione per un altro intero colla frazione, allora (119.) si riduca l'uno e l'altro degl' interi a frazione del medesimo nome colla frazione a se unita; indi il rimanente si faccia come abbiam detto di sopra.

Così per moltiplicare $4\frac{3}{4}$ per $6\frac{2}{5}$, ridotto l'intero 4 in terze parti, le quali si uniscano con $\frac{3}{4}$; e ridotto pure l'intero 6 in quinte parti, che si aggiungano a $\frac{2}{5}$, moltiplico $\frac{19}{4}$ per $\frac{32}{5}$, il prodotto sarà $\frac{608}{20}$, il quale ridotto ad interi, e a minimi termini (123. 126.), dà $30\frac{4}{5}$.

PROPOSIZIONE DECIMA

Problema.

Dividere le Frazioni. 136.

Risoluzione.

Si moltiplichino in forma della lettera X, cioè il numerator della frazione dividenda per il denominator del rotto divisore, il prodotto sarà il numerator del quoziente; e il denominator della frazione dividenda per il numerator del rotto divisore, il prodotto sarà il denominator del quoziente.

Come dividendo la frazione $\frac{a}{b}$ per la frazione $\frac{c}{m}$, il quoziente sarà $\frac{am}{bc}$.

Dimoſtrazione.

Pongaſi la frazion da dividerſi $\frac{a}{b} = x$ (21.), e il diviſore $\frac{c}{m} = z$. Dipoi la prima equazione $\frac{a}{b} = x$ ſi moltiplichi per b, (aſſiom. 4. e prop. 1. di queſto Libro) ſi avrà l'altra equazione $a = bx$, la quale di nuovo ſi moltiplichi per m denominatore della frazione dividente, ſi avrà $am = bmx$.

Similmente la ſeconda equazione $\frac{c}{m} = z$ ſi moltiplichi per m, e (107, 118.) ſi avrà l'altra equazione $c = mz$, la quale moltiplicata per b denominatore della frazion dividenda (aſſiom. 4.) produce la nuova equazione $bc = bmz$.

Finalmente l'equazione $am = bmx$ dividaſi per l'equazione $bc = bmz$, cioè am per bc, e bmx per bmz, (per l'aſſiom. 5°.) ſi avrà l'altra equazione $\frac{am}{bc} = \frac{bmx}{bmz}$, cioè $\frac{am}{bc} = \frac{x}{z}$ (101.). Ma $\frac{x}{z}$ indica il quoziente, che naſce dividendo la quantità x (la quale ſignifica la frazione dividenda $\frac{a}{b}$) per la quantità z, che eſprime la frazione dividente $\frac{c}{m}$. Dunque anche la frazione $\frac{am}{bc}$ eſprime il quoziente, che naſce dividendo la frazione $\frac{a}{b}$ per la frazione $\frac{c}{m}$. Il che eraſi propoſto da dimoſtrare.

Laonde dividendo la frazione $\frac{6}{19}$ per la frazione $\frac{7}{3}$, il quoziente ſarà $\frac{6 \times 7}{19 \times 3}$, cioè $\frac{42}{57}$.

137. Se ſi abbia a dividere una frazione per una quantità intera, o una quantità intera per una frazione, allora all'intero ſi ſoſcriva l'unità (121.), affinchè diventi quaſi frazione, e il reſtante ſi faccia come ſopra.

Così dividendo la frazione $\frac{a}{m}$ per c, cioè per $\frac{c}{1}$, il quoziente ſarà $\frac{1a}{cm}$, cioè $\frac{a}{cm}$.

Parimenti dividendo la frazione $\frac{1}{4}$ per 2, cioè per $\frac{2}{1}$, il quoziente ſarà $\frac{1}{8}$.

Per conſeguenza la frazione divideſi per l'intero, moltiplicando il denominator della frazione per l'intero.

Similmente dividendo l'intero b, cioè $\frac{b}{1}$ (121.) per la frazione $\frac{m}{c}$, il quoziente ſarà $\frac{bc}{1m}$, cioè $\frac{bc}{m}$.

E dividendo l'intero 6 per la frazione $\frac{2}{3}$, il quoziente ſarà $\frac{18}{2}$, cioè 9, riducendolo ad interi (123.).

Per la qual coſa la quantità intera ſi divide per la frazione, moltiplicando l'intero per il denominatore della frazione, e al prodotto ſoſcrivendo il numeratore della frazione medeſima.

Se

Se un intero con una frazione sia da dividersi per una frazione, o 138.
per un intero con frazione; allora si riduca l'intero in frazione del medesimo nome colla frazione a se unita, con cui si raccolga in una sola somma: e il rimanente si faccia come per l'avanti si è detto.

Sia $12\frac{1}{4}$ da dividersi per $\frac{5}{6}$; si riduca il numero 12. in quarte parti (119.), si avrà la frazione $\frac{48}{4}$, la quale unitasi alla frazione $\frac{1}{4}$, si avrà la frazione dividenda $\frac{49}{4}$, e questa dividasi per $\frac{5}{6}$, il quoziente sarà $\frac{294}{20}$.

Nella stessa guisa dividendo $8\frac{1}{7}$, cioè $\frac{57}{7}$ per 9, il quoziente sarà $\frac{57}{63}$.

Similmente dividendo $8\frac{1}{7}$, o sia $\frac{57}{7}$ per $7\frac{1}{2}$, cioè per $\frac{15}{2}$, il quoto sarà $\frac{114}{105}$.

Scolio.

Nella moltiplicazione delle frazioni il prodotto è sempre minore 139.
dell'una e dell'altra frazione, che si moltiplica; perchè moltiplicare una frazione per un'altra è prendere solamente alcuna, o alcune parti della frazione moltiplicanda.

Così moltiplicare $\frac{1}{4}$ per $\frac{2}{3}$ è prendere due terze parti della frazione $\frac{1}{4}$; per conseguenza il prodotto $\frac{2}{12}$, cioè $\frac{1}{6}$, sarà minore della frazione moltiplicanda $\frac{1}{4}$.

Come tre quarte parti d'una lira d'argento nostrale sono 15 soldi, e due terze parti di quindici soldi sono dieci soldi, che formano la metà d'una lira.

All'opposto nella divisione delle frazioni il quoziente è maggiore del numero dividendo, e qualche volta è un numero intero; imperciocchè una frazione può contenere un'altra due, tre, quattro, o più volte.

Così dividendo la frazione $\frac{4}{5}$, per la frazione $\frac{2}{10}$, il quoziente (136.) è $\frac{40}{5}$, cioè (123.) è 8; perchè la frazione $\frac{2}{10}$ moltiplicata per 8 (134.) dà $\frac{16}{10}$, cioè $\frac{4}{5}$ (126.).

Imperciocchè se parliamo della lira d'argento nostrale, allora $\frac{4}{5}$, o sia quattro quinte parti d'una lira fanno 16 soldi; e la frazione $\frac{1}{10}$, cioè una decima parte d'una lira contiene due soldi: due soldi poi sono contenuti otto volte in 16 soldi, come è evidente.

DEGLI ELEMENTI DELL' ARITMETICA UNIVERSALE

LIBRO TERZO.

Delle Potenze delle Quantità, e dell' Estrazione delle Radici.

Definizione Prima.

140. IL Prodotto, che nasce moltiplicando qualsivoglia quantità per l' unità, o per se stessa, una, o due, o più volte, dicesi *Potestà*, *Dignità*, o *Potenza* della medesima quantità.

Definizione Seconda.

141. La prima potenza di qualsivoglia quantità è la stessa quantità *posta* una volta, o sia moltiplicata per l'unità. Come $1 \times a$, cioè a, è la prima potenza della grandezza a; $1 \times bm$, ovvero bm, è la *prima* dignità della quantità bm, ecc. Similmente 1×7, cioè 7, è la prima potenza del numero 7, e così dell' altre.

Definizione Terza.

142. *Il Quadrato*, o *la seconda potenza* di qualsivoglia quantità, è il prodotto, che nasce moltiplicando una volta la data quantità per se stessa.

Perciò il numero 49 è quadrato del numero 7, perchè nasce dalla moltiplicazione del numero 7 in se stesso.

Similmente 81 è quadrato, o seconda potenza del numero 9, perchè 9×9 produce 81.

Nella medesima maniera moltiplicando a per a, il prodotto aa, oppure a^2 è il quadrato della quantità a.

Parimenti $9a^2b^4$ è il quadrato della quantità $3ab^2$, perchè moltiplicando $3ab^2$ per $3ab^2$ (65.), nasce il prodotto $9a^2b^4$.

Definizione Quarta.

143. *Il Cubo*, o *la terza potenza* di qualsivoglia quantità, è il prodotto, che nasce moltiplicando la data quantità per il suo quadrato.

Così moltiplicando a per a^2, il prodotto a^3 sarà il cubo, o *la terza* potenza della grandezza a.

Similmente 64 è il cubo del numero 4, perchè si ha moltiplicando 4 in 4 in 4, ovvero 4 in 16.

Che se la terza potenza, o sia il cubo di qualsivoglia quantità si mol-

moltiplichi per la ſteſſa quantità, il prodotto ſarà *la quarta potenza*, ovvero il *Quadrato — Quadrato* della medeſima quantità.

Così a^4 è la quarta potenza della quantità a, perchè naſce dalla moltiplicazione del cubo a^3 per la data quantità a.

Se a^4 ſi moltiplichi per a, ſi farà a^5, cioè *la quinta potenza* della medeſima quantità a; e così in ſeguito a^6, a^7, a^8, ecc. ſono *la ſeſta, la ſettima, l'ottava potenza* della medeſima quantità a.

Definizione Quinta.

Quella quantità, di cui ſi eſpongono le potenze, (la quale diceſi anche *prima potenza*) ſi appella *Lato*, o *Radice* delle medeſime potenze. 144.

Così a diceſi radice quadrata, o radice ſeconda della quantità a^2; radice terza, o cubica della quantità a^3; radice quarta della quantità a^4; e così in ſeguito.

Similmente il numero 3 è radice quadrata del numero 9; è radice cubica, o terza del numero 27; è radice quarta del numero 81, ecc.

Definizione Seſta.

Eſtrazione della radice è l'invenzione di quella quantità, di cui è data una potenza. 145.

Come eſtrarre la radice quadrata dal numero 49, è ritrovare il numero 7, il di cui quadrato è il dato numero 49.

Similmente eſtrarre la radice terza dalla quantità m^6, è ritrovare la quantità m^2, la di cui terza potenza è m^6.

Definizione Settima.

Il prodotto, che riſulta moltiplicando due quantità ineguali tra di loro, diceſi anche *Rettangolo* contenuto dalle medeſime quantità; e le quantità ſteſſe chiamanſi *Lati* del medeſimo rettangolo. Così il prodotto am diceſi rettangolo contenuto dalle quantità a, ed m; le quantità poi a, ed m appellanſi lati del medeſimo rettangolo. 146.

Definizione Ottava.

Quantità commenſurabili chiamanſi quelle, che hanno qualche parte aliquota (81, 82.), o miſura comune, ovvero una delle quali è parte aliquota dell'altra. 147.

Tutti i numeri volgari, o ſiano interi, o rotti, o miſti, ſono commenſurabili tra di loro, perchè, o hanno per miſura comune l'unità (83), ovvero qualche parte dell'unità; e perciò diconſi *Numeri razionali*.

Come l'intero 2, e il rotto $\frac{1}{4}$ hanno per miſura comune il rotto $\frac{1}{4}$; imperciocchè il rotto $\frac{1}{4}$ è contenuto tre volte nella frazione

ne $\frac{1}{4}$, e otto volte è contenuto nell' intero 2, perchè (119.) l'intero 2 riducesi alla frazione $\frac{8}{4}$.

Similmente l'intero 4, e il misto $5\frac{2}{4}$ hanno per misura comune la frazione $\frac{1}{4}$, la quale è contenuta dodici volte nell'intero 4 (119.), e diciassette volte nel numero misto $5\frac{2}{4}$.

Per la qual cosa tutti i numeri razionali sono commensurabili all'unità, perchè o dall'unità sono misurati, o da qualche parte aliquota dell'unità.

Così 1, e $\frac{3}{5}$ hanno per misura la frazione $\frac{1}{5}$, la quale (119.) è contenuta cinque volte nell'unità, e quattro volte nella frazione $\frac{4}{5}$; e così degli altri.

Ma *quantità incommensurabili* chiamansi quelle, che non possono avere misura alcuna comune; ovvero sono quelle, che non hanno veruna unità, a cui siano commensurabili; imperciocchè qualsivoglia misura è una, e può prendersi per unità.

Corollario.

148. Dunque le quantità commensurabili sono tra di loro come l'unità al numero razionale intero, ovvero come un numero razionale intero a un altro numero razionale intero; imperciocchè o una è parte aliquota dell'altra, e allora se la minore prendasi per unità, corrisponderà alla quantità maggiore un numero razionale intero; conseguentemente la minore sarà alla maggiore come l'unità a un numero razionale intero.

Così 3a è a 15a siccome 1 a 5, prendendo 3a per unità: oppure ambe le quantità hanno misura comune, ovvero qualche parte aliquota comune; e allora se la parte aliquota comune prendasi per unità, all'una e all'altra quantità corrisponderà un numero razionale intero; e perciò saranno tra di se come un numero razionale intero a un altro numero razionale intero.

Come 6a a 15a è siccome 2 a 5; imperciocchè prendendo la misura comune 3a per unità, allora alla quantità 6a corrisponderà il numero 2, e alla quantità 15a corrisponderà il numero 5.

Inoltre perchè ogni numero razionale è commensurabile all'unità, e la quantità incommensurabili non hanno unità alcuna, a cui sieno commensurabili; perciò quelle quantità, che non sono tra di loro come l'unità al numero razionale, ovvero come un numero razionale a un altro numero razionale, saranno incommensurabili.

Definizione Nona.

149. Il segno, di cui si serviamo per indicare le radici delle potenze è $\sqrt{}$, il quale appellasi *segno radicale*. E quando dalla quantità posta sotto il segno radicale non si può estrarre la radice ricercata, allora quella quantità, o sia numerica, oppur letterale, chiamasi *quantità irrazionale*, o *surda*, ovvero *potenza imperfetta*.

Nella

Nella sommità del segno radicale si pone il numero, che indichi la radice ricercata; e quel numero dicesi *esponente*, ovvero *indice* di quella potenza, di cui denota la radice.

Dove poi nella sommità del segno non v' è esponente alcuno, si prende per radice quadrata, o della seconda potenza. Come $\sqrt{64}$ significa 8, cioè la radice quadrata del numero 64.

Parimenti $\sqrt{3}$ significa la radice seconda del numero 3, la qual radice non può esser espressa co' numeri, perchè non si può ritrovare numero alcuno, il quale moltiplicato per se stesso possa produrre il numero 3; conseguentemente $\sqrt{3}$ è un numero incommensurabile all'unità.

Ma $\sqrt[3]{64}$ significa 4, cioè la radice terza, o la radice cubica del numero 64.

Similmente $\sqrt[3]{a^3}$ significa a, cioè la radice cubica, o terza della quantità a^3.

Que' numeri, che sono incommensurabili all' unità, si chiamano *Numeri irrazionali*, o *sordi*: e quelli, che appartengono alla seconda potenza, diconsi *Numeri irrazionali* del primo ordine;

Come $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, ecc. Quelli poi, che si riferiscono alla terza potenza, appellansi *Numeri irrazionali* del secondo ordine, e sono

$\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{5}$.

PROBLEMA PRIMO.

Ritrovare il quadrato, il cubo, la quarta potenza, la quinta, e tutte l'altre di qualsivoglia data quantità. 150.

Risoluzione.

PEr ritrovare il quadrato si moltiplichi la data quantità una volta per se medesima, e il prodotto (142.) sarà il quadrato, che si cerca, cioè la seconda potenza della data quantità.

Per tanto il quadrato della quantità m sarà m × m, ovvero m m, cioè m^2. Il quadrato della quantità a m sarà a m × a m, cioè $a^2 m^2$; e il quadrato della quantità — c sarà — c × — c, cioè + c c, ovvero c^2.

Il quadrato della quantità $5 a^3 b^2 m$ sarà $5 a^3 b^2 m \times 5 a^3 b^2 m$, cioè $25 a^6 b^4 m^2$.

Similmente moltiplicando a + b per a + b, il prodotto $a^2 + 2ab + b^2$ sarà il quadrato della medesima quantità a + b.

Nella stessa guisa il quadrato della frazione $\frac{a}{c}$ sarà $\frac{a}{c} \times \frac{a}{c}$, cioè $\frac{a^2}{c^2}$; e così degli altri.

Se

151. Se poi si cerchi il cubo, ovvero la terza potenza d'una data quantità, allora (per il numero antecedente) ritrovato il quadrato della medesima quantità, si moltiplichi la stessa quantità per il suo quadrato, e si avrà il cubo, che si ricerca.

Adunque il cubo della quantità m sarà $m \times m^2$, cioè m^3. Il cubo della quantità ab sarà $ab \times a^2b^2$, cioè a^3b^3. Il cubo della quantità $5a^3b^2c$ sarà $5a^3b^2c \times 25a^6b^4c^2$, cioè $125\,a^9b^6c^3$; e il cubo della quantità $-a$ sarà $-a^3$, perchè $-a$ in $-a$ dà $+a^2$, e $+a^2$ in $-a$ produce $-a^3$.

Similmente se $a^2 + 2ac + c^2$ (quadrato della quantità $a + c$) si moltiplichi per $a + c$, il prodotto $a^3 + 3a^2c + 3ac^2 + c^3$ sarà il cubo della quantità $a + c$.

Parimenti il cubo della frazione $\frac{c}{m}$ sarà $\frac{c}{m} \times \frac{c^2}{m^2}$, cioè $\frac{c^3}{m^3}$.

152. Che se la terza potenza si moltiplichi per la data quantità, si avrà nel prodotto la quarta potenza. E moltiplicando la quarta potenza per la prima, cioè per la data quantità, si avrà la quinta potenza della medesima quantità; e così in seguito.

Per tanto moltiplicando 3 per 3, si fa 9 quadrato del numero 3. 3 in 9 produce 27, il qual numero è il cubo del numero 3. 3 in 27 produce 81 quarta potenza del numero 3. 3 in 81 dà 243, cioè la quinta potenza del numero 3. E moltiplicando 3 in 243, produce 729, il qual numero è la sesta potenza del numero 3: e così andando innanzi si ritrovano l'altre potenze.

Corollario Primo.

153. Laonde per ottenere qualsivoglia potenza di qualunque semplice quantità letteral positiva, basterà moltiplicare gli esponenti della medesima quantità per il numero della potenza ricercata.

Come per ottenere la seconda potenza della quantità $ab^2c^3m^6$, si moltiplichino per il numero 2 gli esponenti 1, 2, 3, 6, e il quadrato che si cerca sarà $a^2b^4c^6m^{12}$; imperciocchè (150.) moltiplicando $ab^2c^3m^6$ per $ab^2c^3m^6$, si ha il medesimo prodotto, o quadrato $a^2b^4c^6m^{12}$.

Similmente la terza potenza della quantità ab^4c^2 si ottiene moltiplicando per il numero 3 ciascun esponente 1, 4, 2; e sarà $a^3b^{12}c^6$ il cubo, ovvero la terza potenza della medesima quantità.

Non altrimenti per avere la quarta potenza si moltiplichino gli esponenti per 4; e per ottenere la quinta potenza si moltiplicino per 5.

Che se la data quantità sarà negativa, allora le potenze della medesima quantità, che sono pari, cioè la seconda potenza, la quarta, la sesta, l'ottava, ecc. saranno positive. Le potenze poi dispari, cioè la terza, la quinta, la settima, ecc. saranno negative, come evidentemente ne segue dalle regole de' segni esposte ne' numeri 55, 56, e dal numero antecedente.

I nu-

I numeri però coeficienti sono sempre da moltiplicarsi tra di loro conforme alle Regole date nel precedente Problema.

Così la terza potenza della quantità $4a^2b^7$ sarà $4 \times 4 \times 4\, a^6 b^{21}$, cioè $64\, a^6 b^{21}$ (252.).

Corollario Secondo.

Dunque non può darsi quadrato alcuno negativo. Imperciocchè o si 254.
moltiplica una quantità positiva per una positiva, o una negativa per un'altra negativa; e nell'uno, e nell'altro caso il prodotto (55.) sarà sempre positivo.

Quindi la radice quadrata d'una quantità negativa dicesi Radice *immaginaria*.

Così $\sqrt{-aa}$, $\sqrt{-m}$, e $\sqrt{-3}$ sono radici immaginarie.

Scolio.

Le quantità composte anche s'innalzano a qualsivoglia potenza, scri- 255.
vendo alla loco destra l'esponente della potenza ricercata, e tirando sopra di loro una linea.

$\overline{a+b}^2$

Così $\overline{a+b}^2$ significa il quadrato della quantità $a+b$, cioè $a^2+2ab+b^2$.

$\overline{a+b}^3$

Parimenti $\overline{a+b}^3$ significa $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, cioè il cubo, ovvero la terza potenza della quantità $a+b$.

PROBLEMA SECONDO.

Estrarre la radice quadrata da un dato numero. 256.

Risoluzione.

QUando il dato numero è quadrato, e non eccede il numero cento, allora la di lui radice quadrata si trova nella seguente Tavoletta, di cui la prima colonna contiene le Radici, l'altra poi i Quadrati delle radici medesime.

Dionde da questa Tavoletta si scorge chiaramente, che la radice quadrata del numero 64, è il numero 8; e che la radice quadrata del numero 25 è il numero 5; e così dell'altre.

RADICI	QUADRATI
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100

157. Quando poi il dato numero è minore di cento, e non è quadrato, allora prendasi la radice del quadrato massimo contenuto nel dato numero.

Così la radice quadrata del numero 32 non può trovarsi, perchè niun numero moltiplicato per se stesso può produrre il numero 32; la radice quadrata però prossima, o minore del numero medesimo 32 è 5, perchè il di lui quadrato 25 è il massimo quadrato contenuto nel dato numero 32.

Similmente la radice prossimamente minore del numero 99 è 9, perchè il di lui quadrato 81 è il massimo quadrato contenuto nel dato numero 99.

158. Se il dato numero è maggiore del numero centenario, allora la di lui radice quadrata si ritrova col metodo seguente.

In primo luogo si divida il dato numero in membri, separando per mezzo di punti a due a due le figure, incominciando dalla destra, e procedendo verso la sinistra.

Se il numero delle figure sia pari a ciascun membro conterrà due figure; quando poi il numero delle figure è dispari, allora il primo membro posto alla sinistra avrà soltanto una figura.

Oltre a ciò quanti saranno i membri, tanti caratteri avrà la radice. Tali cose presupposte, si operi come nel seguente esempio.

Sia dato il numero A, cioè 294849, di cui si abbia a trovare la radice quadrata; diviso il dato numero in membri, come poco sopra si è detto, si cerchi nella Tavola precedente la radice quadrata del primo membro 29 posto alla sinistra; ma perchè il numero 29 non è quadrato, perciò cerchisi la radice immediatamente minore (157.), la quale è 5, e pongasi a destra in B, interpostavi una picciola linea tra il numero A, e B. Di poi si moltiplichi la radice 5 per se stessa, e il quadrato 25 si scriva sotto lo stesso membro 29, da cui sottraggasi, il residuo sarà 4,

294849 A	543 B	
25	108 C	
44		
2916	1088 D	
324		
294849		
0		

al quale a destra si unisca la prima figura 4 del secondo membro 48, e si

e si farà 44. Indi la radice trovata 5 si raddoppj, e ne risulterà il divisore 10, il quale si scriva in C, e dividasi 44 per 10, il quoziente sarà 4, che pongasi per seconda figura della radice in B alla destra della figura 5, e si avrà 54, il quale si moltiplichi per se stesso, cioè si ritrovi il quadrato del numero 54, che sarà 2916, e scrivasi drittamente sotto il numero 44. e con ordine sotto le figure 2948, le quali a sinistra formano i due primi membri del numero A, e sottraggasi il quadrato 2916 dal numero 2948, il residuo sarà 32, alla cui destra scrivasi la prima figura 4 del terzo membro 49, il membro dividendo farà 324: dipoi si raddoppj tutta la radice già ritrovata 54, e il di lei duplo 108, che si collocherà in D, sarà un altro divisore, per cui dividasi il numero 324, il quoziente sarà 3, il quale scrivasi in B dopo il 54, cioè per terza figura della radice. Finalmente si faccia il quadrato di tutta la radice ritrovata 543, il quale sarà 294849; e si sottragga dai tre membri, cioè dall' intero numero A, il residuo sarà 0; per conseguenza il dato numero A è quadrato, e la di lui radice quadrata è il numero ritrovato 543. perchè il numero 543 moltiplicato per se stesso restituisce il numero A.

159. Se nel progresso dell' operazione il quadrato della radice già ritrovata eccede il numero, da cui deve esser sottratto, allora l' ultima figura della radice ritrovata per mezzo della divisione si sminuisca d' una unità, come si può vedere nell' esempio seguente.

Si cerchi la radice quadrata del numero E, o sia 324, il quale dividasi in membri per mezzo de' punti nella maniera già spiegata. Il primo membro a sinistra sarà 3, la di cui radice quadrata prossimamente minore è 1, la quale pongasi in F, e il di lei quadrato 1 X 1, cioè 1, si sottragga dal medesimo membro 3, il residuo sarà 2, cui a destra si aggiunga la prima figura 2 del membro seguente 24, si farà il numero 22, il quale dividasi per il duplo della ritrovata radice 1, cioè per il divisore 2 posto in G; ora il 2 in 22 è contenuto nove volte (imperciocchè non rileva punto, ch' ei vi si contenga di più, non ponendosi figura alcuna nel quoziente, ovvero nella radice maggior del 9); laonde il quoziente 9 sarebbe da scriversi in F per seconda figura della radice; dipoi il quadrato della radice 19, cioè il numero 961, si dovrebbe sottrarre dal numero 324, il che non può farsi; perciò il quoziente 9 si sminuisca d' una unità, cioè pongasi 8 per seconda figura della radice, e moltiplicando la radice ritrovata 18 per se stessa, si ha il di lui quadrato 324, il quale sottratto dal dato numero 324, nulla rimane. Dunque il numero 18 è la radice quadrata del numero 324.

E 3.24	F 18
2	
22	G 2
324	
0	

160. Quando il divisor ritrovato non si contiene nel membro dividendo, allor nella radice si mette la cifra 0, e alla destra del membro, che si ha da dividere, si aggiungono le due seguenti fi-

ti figure del dato numero, e si pone un' altra cifra o nel divisore.

Sia da estraersi la radice quadrata del numero 43264, il quale si nomini A. Si divida in membri, come si è detto al numero 158. Il primo membro a sinistra sarà 4, la di cui radice quadrata 2 pongasi in M, e il quadrato di questa radice 2, cioè 4, si sottragga dal membro 4 del numero A, il residuo sarà 0, cui a destra si aggiunga la prima figura 3 del secondo membro 32, si avrà 03, cioè 3 per numero da dividersi. Si raddoppj la trovata radice 2, e il di lei duplo 4 pongasi in G, e dividasi 3 per 4; ma non essendo contenuto il 4 in 3, pongasi 0 in M dopo la figura 2; parimenti si scriva 0 in G dopo la figura 4, ne risulterà la radice 20 in M, e il di lei duplo 40 in G sarà il divisore. Dipoi alla destra del numero 03 si discenda colla seconda figura 2 del secondo membro 32, e si discenda anche colla prima figura 6 del terzo membro 64, si farà il membro dividendo 326. Per il divisore 40 posto in G dividasi il numero 326, il quoziente sarà 8, il quale pongasi in M per terza figura della radice. Finalmente si faccia il quadrato della radice 208, il quale sarà 43264, e sottraendolo dal numero A, il residuo sarà 0. Per tutto ciò il numero M, cioè 208, è la radice quadrata del dato numero A.

A	M
4.32.64	208
4	G
0326	40
43264	
0	

161. Quando dopo l'ultima sottrazione vi resta qualche cosa, è segno che un tal numero non è in fatti quadrato, e che non ha radice razionale, cioè che con numeri razionali si possa esprimere; e tal radice s'indica ponendo il dato numero sotto il segno radicale (149.). La radice poi nell'operazion ritrovata sarà la radice prossimamente minore del medesimo numero, cioè la radice del quadrato massimo contenuto nel medesimo numero.

Quantunque poi non si possa ritrovare la vera radice quando il dato numero non è quadrato, si può però molto approssimarsi alla vera radice, così che la differenza dalla vera radice sia minima; il che si ottiene nel modo seguente.

162. Al dato numero non quadrato si aggiungano alquanti paja di cifre, cioè o due 0, o quattro 0, o sei 0, ecc; e dal dato numero unito alle cifre predette estraggasi la radice quadrata in quel modo, con cui si è fatto negli esempj precedenti.

Dipoi dalla radice ritrovata si tolgano a destra tante figure, quanti paja di cifre furono aggiunti al dato numero; e l'altre figure della radice poste a sinistra rappresenteranno l'intera radice prossimamente minore del dato numero. Le figure tagliate a destra pongansi sopra una picciola linea per numeratore della frazione, e per denominatore si scriva l'unità con tante cifre, quanti paja ne furono aggiu-

giunti; e il detto intero colla sopracennata frazione indicheranno la radice più prossima del dato numero.

Sia da estrarsi la radice quadrata dal numero 15, la di cui radice prossimamente minore è 3 (156.) col residuo 6; per ritrovare la radice più prossima dello stesso numero 15, gli si aggiungano tanti paja di cifre quanti si vogliono, per esempio due, ne risulterà il numero 150000, da cui estraggasi la radice quadrata, secondo le regole date di sopra, e si troverà, che 387 è la radice prossimamente minore del numero 150000 col residuo 231; e per li due paja di cifre aggiunti si separino dalla stessa radice 387 due figure a destra, cioè 87, e al numero 87 soscrivasi 1 con due cifre; e sarà $3\frac{87}{100}$ la radice più prossima; minor in fatti della radice vera, ma più vicina, e più esatta della radice 3 da principio trovata: imperciocchè questa radice $3\frac{87}{100}$ non si scosta neppure una centesima parte dell' unità dalla vera radice. Se tre, o quattro, o più paja di cifre fossero state aggiunte, allor la radice vieppiù si accostarebbe alla radice vera.

	1 387
15. 00. 00	$13\frac{87}{100}$
9	
60	16
1444	
560	176
149769	
231	

PROBLEMA TERZO.

Estrarre la radice cubica da un dato numero. 163.

Risoluzione.

QUando il dato numero è cubo, e non eccede il numero 1000, allora la di lui radice si ha per mezzo di questa Tavola, in cui, come è evidente, la radice terza o cubica del numero 512 è 8, e la radice terza del numero 64 è 4. A vicenda è manifesto, che il cubo del numero 2 è 8, e che il cubo del numero 7 è 343; ecc.

RADICI	CUBI
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
6	216
7	343
8	512
9	529
10	1000

164. Se un dato numero minore del numero 1000 non è cubo, prendasi la radice prossimamente minore, cioè la radice del massimo de' cubi nel dato numero contenuti.

Così la radice cubica prossimamente minore del 118 è 4, perchè il di lui cubo 64 è il massimo cubo contenuto nel dato numero 118.

165. Quando poi un dato numero eccede il numero 1000, allora si estrae la radice terza col metodo seguente.

Sia da ritrovarsi la radice terza del numero 79507, che chiamisi A; si divida il

dato

dato numero in membri incominciando alla destra, acciocchè ciascun membro contenga tre figure, toltone il primo membro a sinistra, che alle volte avrà solamente una figura, o due, come in questo esempio apparisce.

Inoltre quanti saranno i membri, altrettante saranno le figure nella radice ricercata.

Poi cerchisi nella Tavola precedente la terza radice del primo membro posto a sinistra. Ma nel dato numero il primo membro 79 non è numero cubo; è perciò si prenda la radice del cubo 64 prossimamente minore, che è 4, e pongasi in R; della qual radice 4 si faccia il cubo 64, che si sottragga dal primo membro 79, e il residuo sarà 15; alla destra del quale aggiungasi la prima figura del seguente membro, cioè 5, e si avrà 155 per membro da dividersi.

A	R
79.507	143
64	D
155	48
79507	
0	

Indi della ritrovata radice 4 si faccia il quadrato 16, e per il triplo dello stesso 3×16, cioè per 48, il quale pongasi in D, si divida il membro 155, il quoziente 3 sarà la seconda figura della radice, la quale pongasi in R dopo la prima 4.

Della radice 43 si faccia il cubo 79507 (151.), il quale sottraggasi dall' uno, e dall' altro membro, cioè dall' intero dato numero A; e non sopravanzando cosa alcuna, è segno che il numero 43 è la radice cubica del dato numero A.

166. Quando il cubo della radice già ritrovata eccede il numero, da cui deve sottrarsi, allora si sminuisca d'un' unità l'ultima figura della radice, come si può vedere nell'esempio seguente.

Sia da estrarsi la terza radice dal numero A, il quale è 155720872, questo dividasi in membri, come abbiamo detto di sopra. Il primo membro a sinistra sarà 155, la di cui radice prossimamente minore (164.) è 5, la quale si ponga a destra in R; e il di lei cubo 125 si sottragga dal primo membro 155, il residuo sarà 30, a cui aggiungasi la prima figura 7 del membro seguente, si avrà 307, il quale dividasi per 25×3, cioè per 75 quadrato triplo della radice 5, il quoziente è 4, che dovrebbesi porre in R per seconda figura della radice, e si avrebbe la radice 54, il di cui cubo 157464 si dovrebbe sottrarre dai due primi membri del numero A, cioè dal numero 155720, il che non può farsi; e però il quoziente 4 si sminuisca d' una unità, e pongasi 3 nella radice dopo la figura 5, si avrà 53, la di cui terza potenza, ovvero cubo 148877 si sottragga dal predetto numero 155720, il residuo sarà 6843, al quale a destra aggiungasi il seguente carattere 8 del terzo membro, si avrà il numero 68438, il quale divi-

A	R
155.720.872	538
125	D
307	75
248877	C
68438	8427
155720872	
0	

diviso per il numero C, vale a dire per il triplo quadrato della radice ritrovata 53, il quale è 8427, dà il quoziente 8, che pongasi in R per terza figura della radice: indi si faccia il cubo di tutta la radice 538, che sarà 155720872, e si sottragga dal numero A, il restante sarà 0. Per conseguenza il ritrovato numero R, cioè 538, è la radice cubica del dato numero A.

Se il divisor ritrovato non si contiene nel membro dividendo, allora pongasi 0 nella radice, e il cubo di tutta la radice ritrovata sottraggasi, come abbiam detto di sopra, e al residuo sempre aggiungasi la prima figura del membro seguente; e il numero, che di là ne risulta, dividasi per il triplo quadrato di tutta la radice già ritrovata. 167.

Come nell'annesso esempio, perchè 12, triplo quadrato della radice già ritrovata 2, non è contenuto nel membro dividendo 9, si pone 0 nella radice dopo la figura già ritrovata 2. Indi il cubo della radice 20, cioè 8000 si sottrae dai due primi membri del dato numero, cioè dal numero 8998, e al residuo 998 si aggiunge a destra la prima figura 9 del membro seguente 912, e si ha il numero 9989, il quale dividesi per 1200 triplo quadrato della radice 20 già ritrovata: l'altre cose poi si fanno come negli esempj precedenti.

8.998.912	208
8	
09	12
8000	
9989	1200
8998912	
0	

Che se la radice non può estrarsi dal dato numero nel modo predetto, è segno che il dato numero non è cubo, nè che ha radice cubica, la quale possa esprimersi co' numeri razionali. 168.

La radice poi più vicina, che insensibilmente si scosti dalla vera radice, ritrovasi coll'aggiungere alcuni ternarj di cifre allo stesso dato numero, e dal medesimo numero unito alle cifre predette estraendo la radice cubica, come negli esempj precedenti. Dipoi dalla radice ritrovata si levino a destra tante figure, quanti ternarj di cifre furono aggiunti; l'altre figure che restano a sinistra daranno l'intera radice prossimamente minore; e la stessa radice intera unitamente colla frazione, il di cui numeratore sieno le medesime figure tagliate fuori, e il denominatore sia l'unità con tante cifre, quanti furono i ternarj di cifre in prima aggiunti, sarà la radice più prossima.

Così al numero 12, il qual non è cubo, aggiunti due ternarj di cifre, si ha il numero 12000000, la di cui radice terza prossimamente minore è 228, dalla quale tagliate fuori a destra due figure (per i due ternarj di cifre), alle quali soscrivasi l'unità con due cifre, sarà $2\frac{28}{100}$ la radice più prossima, che non dilungasi neppure una centesima parte dell'unità dalla vera radice.

12.000.000	$2\frac{28}{100}$
8	
40	12
10648	
13520	1452
11852352	
147648	

Se tre, o più ternarj di cifre si aggiungano, si ritroverà sempre la radice più prossima alla vera.

PRO-

PROBLEMA QUARTO.

169. *Estrarre la radice quadrata della quantità Algebraica.*

Risoluzione.

SE le date quantità sono semplici, si estrae la radice quadrata dividendo tutti gli esponenti della medesima quantità per il numero binario.

Come della quantità a^2 la radice è a^1, ovvero a; perchè $a \times a$ restituisce a^2.

Parimenti delle quantità a^4, b^{10}, c^8, le radici quadrate saranno a^2, b^5, c^4.

Similmente la radice quadrata della quantità a^7 è $a^{\frac{7}{2}}$; e della quantità b^5 è $b^{\frac{5}{2}}$; e la radice quadrata della quantità $a^3\, b^5\, c^4$ sarà $a^{\frac{3}{2}}\, b^{\frac{5}{2}}\, c^2$.

170. Se la data quantità ha numero coeficiente, in primo luogo si estrae la radice dal numero coeficiente secondo le regole date nel precedente Problema Secondo; dipoi dalle quantità letterali, come nel numero antecedente.

Così la radice quadrata della quantità $49\, a^2\, b^6$ è $7\, a\, b^3$; perchè $7\, a\, b^3 \times 7\, a\, b^3$ restituisce $49\, a^2\, b^6$.

Parimenti la radice quadrata della quantità $324\, a^2\, b^6$ è $18\, a^1\, b^3$.

171. Il segno poi da preporsi alla radice quadrata può essere negativo, o positivo; imperciocchè, per esempio, il quadrato a^2 (150.) si ottiene tanto dalla moltiplicazione della quantità $+a$ in $+a$, quanto moltiplicando $-a$ in $-a$; e perciò il quadrato a^2 ha due radici, una positiva $+a$, e l' altra negativa $-a$. Lo stesso intendasi degli altri quadrati.

172. Se poi la data quantità sarà composta, come $a^2 + 2ab - 2ac + b^2 - 2bc + c^2$, allora da qualche termine, che sia quadrato, come da a^2 si estragga la radice quadrata, la quale (169.) sarà a, e pongasi a destra, frapposta vi una picciola linea; indi per il duplo della ritrovata radice a, cioè per $2a$, si dividano tutti i termini della data quantità, i quali si possono dividere in interi; cioè dividansi i termini $+2ab$, e $-2ac$ per $2a$, e i quozienti $+b - c$ pongansi nella radice dopo il termine a già ritrovato; e la cercata radice sarà $a + b - c$: imperciocchè si faccia il quadrato della ritrovata radice $a + b - c$, e si sottragga dalla data quantità, non resterà cosa alcuna: per conseguenza $a + b - c$ è la radice quadrata della data quantità.

Quando dopo la sottrazione vi resta qualche cosa, è segno che la data quantità non è quadrata.

Oltre a ciò la radice quadrata di qualsivoglia quantità s' indica col porre la medesima quantità sotto il segno radicale (149.), così $\sqrt{64}$ significa 8, e $\sqrt{a^2}$ significa a.

Pari-

Parimenti $\sqrt{15}$ indica la seconda radice del numero 15. $\sqrt{ab-cm}$ significa la radice quadrata della quantità $ab-cm$. E in questa maniera s'indica la radice quadrata di qualsivoglia quantità, la quale non sia quadrato perfetto.

Corollario.

Laonde per avere il quadrato di qualsifia quantità posta sotto il se- 174.
gno radicale, basta scriver la stessa fuori del segno.

Come il quadrato da $\sqrt{25}$ è 25; imperciocchè $\sqrt{25}$ significa 5, e il quadrato del numero 5 è 25; dunque $\sqrt{25} \times \sqrt{25}$ produce 25.

Similmente $\sqrt{a-m} \times \sqrt{a-m}$ produce $a-m$.

PROBLEMA QUINTO.

Estrarre la radice cubica dalle quantità letterali. 175

Risoluzione.

La radice terza, o cubica si estrae dalle quantità semplici dividendo per il numero 3 tutti gli esponenti delle date quantità; e perciò la radice terza della quantità a^3 sarà a, perchè $a \times a \times a$ restituisce a^3.

Parimenti delle quantità $a^6 b^9$, e c^{12} le radici cubiche sono $a^2 b^3 c^4$.

Similmente della quantità b^2 la radice terza è $b^{\frac{2}{3}}$, perchè $b^{\frac{2}{3}} \times b^{\frac{2}{3}} \times b^{\frac{2}{3}}$ produce $b^{\frac{6}{3}}$, cioè restituisce b^2. (65.)

Quando poi le quantità hanno numeri coeficienti, allora primie- 176.
ramente si estrae la radice terza dai numeri coeficienti giusta le regole date nel Precedente Problema Terzo.

Così della quantità $8a^6b^3$ la radice cubica sarà $2a^2b$. Similmente la radice terza della quantità $125a^{12}b^3c^6$ è $5a^4bc^2$.

Che se la data quantità sarà composta, come $a^3 - 3a^2b + 3ab^2$ 177.
$- b^3$, allora, come ne' precedenti esempj, si estragga la radice cubica da qualche termine, che sia perfettamente cubo, come da a^3; e la di lui radice a si ponga a destra, e sarà il primo termine della radice. Dipoi per il triplo quadrato della trovata radice a dividansi tutti i termini, che si possono dividere senza frazione, cioè in questo esempio per $3a^2$ si divida il termine $-3a^2b$, e il quoziente $-b$ pongasi nella radice dopo il termine a. Indi si faccia il cubo di tutta la radice $a-b$, sarà $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, il quale sottratto dalla data quantità, nulla rimane. Perciò $a-b$ è la radice terza della data quantità.

Se la radice terza non si può estrarre da una data quantità nel 178.
modo suddetto, allora si ponga la data quantità sotto il segno radi-

cale (149.). Così $\sqrt[3]{a^6 - bc}$ significa la radice terza della quantità $a^6 - bc$. Similmente $\sqrt[3]{8a^3}$ significa $2a$, cioè la radice cubica della quantità $8a^3$. Parimenti $\sqrt[3]{512}$ vale lo stesso che 8: il che intendasi di qualsivoglia altra grandezza.

Corollario.

179. Quindi ne segue, che il cubo di qualsivoglia quantità posto sotto il segno radicale $\sqrt[3]{\ }$ si ottiene scrivendo la medesima quantità fuori del segno. Così il cubo della quantità $\sqrt[3]{64}$ è 64; imperciocchè $\sqrt[3]{64}$ significa 4; e il cubo del numero 4 è 64: dunque il cubo della quantità $\sqrt[3]{64}$ sarà 64. Similmente il cubo della quantità $\sqrt[3]{abm}$ è abm, ecc.

Scolio.

180. Se da una data frazione sia da estrarsi la radice quadrata, o cubica, allora estraggasi la radice ricercata tanto dal numeratore, quanto dal denominatore della medesima frazione.

Come la radice quadrata della frazione $\frac{9}{64}$ sarà $\frac{3}{8}$.

La radice cubica della frazione $\frac{8}{27}$ sarà $\frac{2}{3}$.

Similmente la radice quadrata della frazione $\frac{a^6}{c^2}$ sarà $\frac{a^3}{c}$; e della quantità $\frac{c}{m}$ la radice quadrata sarà $\sqrt{\frac{c}{m}}$, oppur sarà $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{m}}$.

Parimenti la radice cubica della quantità $\frac{a^3}{m^6}$ sarà $\frac{a}{m^2}$; e della quantità $\frac{c}{m}$ la radice cubica sarà $\sqrt[3]{\frac{c}{m}}$, ovvero sarà $\frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{m}}$, e così dell' altre.

181. Inoltre la radice quadrata di qualsivoglia frazione si trova moltiplicando il numeratore per il denominatore, e dal prodotto estraendo la radice quadrata, a cui si deve sottoscrivere il denominator della data frazione.

Così per ritrovare la radice quadrata della frazione $\frac{1}{12}$, si moltiplichi 3 per 12, e dal prodotto 36 estraggasi la radice seconda, che è 6, a cui sottoscrivasi il denominator 12, sarà $\frac{6}{12}$, cioè $\frac{1}{2}$ la radice ricercata.

PRO-

PROPOSIZIONE

Teorema.

Radici uguali formano quadrati uguali, cubi uguali, ecc. 182.

E scambievolmente quadrati uguali, cubi uguali, ecc. hanno radici uguali.

Dimostrazione.

PRimieramente sia $a=c$, cioè $a^1=c^1$, moltiplicando gli esponenti uguali 1, e 1 per 2, ovvero per 3, o per 4, (ass. 4.) sarà $a^2=c^2$, $a^3=c^3$, $a^4=c^4$, ecc; per conseguenza uguali potenze di radici uguali sono pure tra di loro uguali.

In secondo luogo sia $a^2=m^2$, dividendo gli esponenti uguali per 2 (assiom. 5.), i quozienti saranno uguali, cioè sarà $a^1=m^1$, vale a dire $a=m$.

Parimenti se sarà $a^3=m^3$, dividendo gli esponenti per 3, resterà $a=m$, come è manifesto. Dunque quadrati uguali, cubi uguali, ecc. cioè potenze uguali, hanno altresì radici uguali. Il che era da dimostrarsi.

DEGLI ELEMENTI DELLA GEOMETRIA

LIBRO PRIMO.

Delle Ragioni, e delle Proporzioni delle Quantità.

Definizione Prima.

LA *Ragion Geometrica* dicesi *Razionale*, quando il di lei antecedente (Aritm. Univers. num. 94, 96.) è al suo conseguente, come l'unità al numero razionale, o come un numero razionale a un altro numero razionale.

Così la ragion 2a:6a, che è come 1:3, perchè l'antecedente 2a è una terza parte del conseguente 6a, è una ragion Geometrica razionale.

Similmente la ragion 5m:3m è razionale, perchè l'antecedente 5m è al conseguente 3m, come il numero razionale 5 al numero razional 3.

La *Ragion Geometrica* poi, che non può esprimersi co' numeri razionali, appellasi *Irrazionale*.

Come la ragion 1 : $\sqrt{2}$ è irrazionale, perchè (Aritm. Univers. 149.) la radice del numero 2 non può esser espressa da un numero razionale.

Definizione Seconda.

La Ragion Geometrica, o sia razionale, o irrazionale, dicesi *Ragion d'uguaglianza*, quando l'antecedente è uguale al conseguente; come la ragion 8:8, o m:m, o $\sqrt{a}:\sqrt{a}$, ovvero $\sqrt{2}:\sqrt{2}$, ecc.

Quando poi l'antecedente non è uguale al conseguente, chiamasi *Ragion d'inuguaglianza*; come 8:2, o 3:12, ovvero a:b, ecc.

Definizione Terza.

Ragion Geometrica di maggior inuguaglianza dicesi quella, il di cui antecedente è maggior del conseguente, come 8:2, ovvero 12:3, ecc.

Quando poi l'antecedente è minor del conseguente, allora chiamasi *Ragione di minore inuguaglianza*, come 2:8, o 4:12, ecc.

Definizione Quarta.

La Ragion razionale di maggior inuguaglianza
Primieramente dicesi *Moltiplice*, quando il di lei esponente
(Aritm.

(Aritm. 97.) , e nome , è un numero intero: come la ragione 6:2, il di cui nome è $\frac{6}{2}$, cioè 3, è una ragion moltiplice.

In secondo luogo chiamasi *Superparticolare*, se il di lei nome, o valore, è l'unità con una frazione (ridotta a termini minimi), la quale abbia l'unità per numeratore. Come la ragione 6:4, il di cui valore è $\frac{6}{4}$, cioè $1\frac{1}{2}$ (Aritm. 123.)

In terzo luogo appellasi Ragione *Superparziente*, quando il di lei valore è l'unità con una frazione, la quale (ridotta a termini minimi) non abbia per numeratore l'unità, ma qualche numero intero. Come la ragione 7:5, il di cui valore è $1\frac{2}{5}$.

In quarto luogo dicesi *Ragione Moltiplice Superparticolare* quella, il cui valore è un numero intero con una frazione, la quale (ridotta a termini minimi) abbia l'unità per numeratore, come la ragione 7:3, il di cui valore è $\frac{7}{3}$, cioè $2\frac{1}{3}$.

In quinto luogo finalmente chiamasi *Ragione Moltiplice Superparziente*, se il di lei valore è un numero intero con una frazione (ridotta a termini minimi), il di cui numeratore sia qualche numero intero; come la frazione 15:4, il di cui esponente è $\frac{15}{4}$, cioè $3\frac{3}{4}$.

Altrettanti parimenti sono i generi delle Ragioni razionali di minor inuguaglianza; cioè *Submultiplice*, *Subsuperparticolare*, *Subsuperparziente*, *Submultiplice — subsuperparticolare*, e *Submultiplice — subsuperparziente*, le quali corrispondono alle ragioni di maggior inuguaglianza.

I sopradetti generi poi di ragioni, o sia di maggiore, oppur di minore inuguaglianza si dividono in specie indefinite; imperciocchè per esempio la ragion moltiplice, o è *dupla*, come 10:5, o *tripla*; come 6:2, o *quadrupla*, o *quintupla*, ecc.

La ragione superparticolare è o *sesquialtera*, il di cui antecedente una volta con una metà contiene il conseguente, come 3:2; o *sesquiterza*, il di cui antecedente una volta con una terza parte contiene il conseguente, come 4:3; o *sesquiquarta*, come 5:4, ecc.

Similmente la ragion submultiplice è o *subdupla*, come 5:10; o *subtripla*, come 2:6, o *subquartupla*, ecc.

Parimenti la ragione subsuperparticolare è o *subsesquialtera*, il di cui antecedente una volta con una metà è contenuto nel conseguente, come 2:3; o *subsesquiterza*, come 3:4, ecc.

Definizione Quinta.

Data qualsivoglia ragione Geometrica, se il di lei conseguente si riferisce al termine antecedente, ne nasce un' altra ragione, che dicesi *Ragione inversa*, o *reciproca* della data ragione.

Come data la ragione
6:2, la di lei ragione inversa sarà
2:6.

Parimenti la ragione

m:a

m:a è reciproca della ragione
a:m; e al contrario la ragione
a:m è reciproca della ragione
m:a.

Corollario.

Dunque la ragione inversa di qualsivoglia ragione di maggior inuguaglianza sarà la ragione di minor inuguaglianza; e scambievolmente la ragione inversa della ragione di minor inuguaglianza sarà la ragione di maggior inuguaglianza.

Così della ragione quadrupla.
20:5, la reciproca, o inversa sarà la ragion subquadrupla
5:20.

Parimenti della ragion subdupla
6:12, la ragion inversa sarà la ragion dupla
12:6.

Definizione Sesta.

Ragion *Composta* dicesi quella, il di cui esponente, o valore, è uguale al prodotto dagli esponenti d'altre ragioni.

Così la ragione
24:3 dicesi composta da due ragioni
20:5, e
12:6, perchè (Aritm. 97.) il di lei esponente $\frac{24}{3}$, cioè 8, è uguale al prodotto dal numero 4 (che è l'esponente della ragione 20:5) nel numero 2 (che è l'esponente della ragione 12:6).

Similmente la ragione
acm:a dicesi composta dalle ragioni
bc:b, e
rm:r, perchè il di lei esponente, o valore $\frac{acm}{a}$, cioè cm (Aritm. 68.) uguaglia il prodotto dalla quantità c (esponente della ragione bc:b) nella quantità m (che è l'esponente della ragione rm:r).

Parimenti la ragione
abcm:ab è composta dalle ragioni
ac:a, e
bm:b, perchè è
$\frac{abcm}{ab} = \frac{ac}{a} \times \frac{bm}{b}$, cioè
$cm = c \times m$, (Aritm. 68.); e così dell' altre.

Corollario Primo.

Dunque niuna ragion Geometrica considerata in se stessa, ovvero assolutamente, dicesi composta, se non si riferisca ad altre, e il di lei esponente uguagli il prodotto dagli esponenti d'altre ragioni.

Corollario Secondo.

Oltre a ciò le ragioni compoſte da ragioni, ciaſcuna delle quali è uguale a ciaſcun'altra, ſaranno parimenti eguali tra di loro; perchè ragioni eguali (Aritm. 99.) hanno eſponenti uguali; e moltiplicando eſponenti eguali per altri eſponenti eguali (Aſſiom. 4.), i prodotti divengono eguali.

Così, perchè la ragione
a c : a è uguale alla ragione
b c : b; e la ragione
r m : r è uguale alla ragione
ſ m : ſ, perciò la ragione
a c r m : a r ſ compoſta dalle due ragioni
a c : a, e
r m : r) ſarà uguale alla ragione
b ſ c m : b ſ (compoſta dalle ragioni
b c : b, e
ſ m : ſ.

Corollario Terzo.

Per la qual coſa quella ragione, il di cui antecedente è prodotto dagli antecedenti d'altre ragioni, e il conſeguente è prodotto dai conſeguenti delle medeſime ragioni, ſarà compoſta dalle ſteſſe ragioni.

Come date le ragioni
a : b,
c : m,
r : x, ſe gli antecedenti a, c, r ſi moltiplichino tra di loro, e i conſeguenti b, m, x altresì ſi moltiplichino tra di loro, ſi avrà la ragione
a c r : b m x compoſta dall'altre date ragioni; perchè il di lei eſponente (Aritm. 97.) è $\frac{acr}{bmx}$; e uguaglia il prodotto, che naſce moltiplicando tra di ſe gli eſponenti $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{m}$, $\frac{r}{x}$ dell'altre ragioni: imperciocchè (Aritm. 133.) è $\frac{a}{b} \times \frac{c}{m} \times \frac{r}{x} = \frac{acr}{bmx}$.

Corollario Quarto.

Se poi date due ragioni ſi moltiplichi l'antecedente della prima pel conſeguente della ſeconda, e il prodotto ſi ponga per antecedente d'una terza ragione; dipoi il prodotto dal conſeguente della prima ragione per l'antecedente della ſeconda ſi ponga per conſeguente della terza ragione, allor la nuova ragione ſi chiamerà compoſta dalla prima direttamente, e reciprocamente dalla ſeconda.

Sieno le ragioni
a : b,

a:b, e
c:m, e si moltiplichino a per m, e b per c, la ragione
am:bc sarà composta dalla ragion diretta
a:b, e dalla ragion reciproca
c:m, la quale (Defin. 5.) è
m:c. Imperciocchè (133.) l' esponente $\frac{am}{bc}$ è uguale al prodotto da $\frac{a}{b}$ (esponente della ragione a:b) per $\frac{m}{c}$, che è l' esponente della ragione
m:c.

Definizione Settima.

La ragion Geometrica, il di cui esponente è il quadrato dell' esponente d'un'altra ragione, dicesi *Ragion Duplicata*, o *Ragion Quadrata* dell'altra data ragione.

Quella ragione poi, il di cui esponente, o valore, è la terza potenza, o sia il cubo dell'esponente d'un'altra ragione, chiamasi *Ragion Triplicata*, o *Cubica* dell'altra ragione.

Quando l'esponente della ragione è la quarta potenza dell'esponente d' un' altra ragione, allora dicesi *Ragion Quadruplicata*, ovvero *Quadrato-quadrata* dell' altra ragione.

Se è la quinta potenza, appellasi *Quintuplicata*; e così andando innanzi.

Per tanto la ragione
amm:a è duplicata, o quadrata della ragione bm:b, perchè l'esponente mm è quadrato dell'esponente m.

Similmente la ragione
18:2 è duplicata della ragione
15:5, perchè il di lei esponente $\frac{18}{15}$, cioè 9, è quadrato dell'esponente $\frac{18}{15}$, cioè 3.

La ragione poi
cm³:c è cubica, o triplicata della ragione
am:a, perchè il di lei esponente m³ è cubo dell'esponente m.

Parimenti la ragione
24:3 è triplicata della ragione
18:9, perchè l'esponente, o il valore $\frac{24}{18}$, cioè 8, è cubo dell'esponente $\frac{18}{9}$, cioè 2, dell'altra ragione.

Corollario Primo.

Quindi la ragione composta da due ragioni eguali sarà duplicata, o quadrata dell'una, e dell'altra.

Sieno le ragioni uguali
am:a, e
cm:c, e di esse (Coroll. 3. defin. 6.) si formi la ragione composta
acmm:ac, questa ragione, il di cui valore è
mm, è duplicata, o quadrata tanto della ragione

am:

$a^m : a$, il di cui esponente è m, quanto della ragione
$c^m : c$, il di cui valore è parimenti m.

Similmente la ragione composta da tre ragioni eguali, sarà triplicata di ciascuna delle date ragioni eguali.

Quando la ragione è composta da quattro, sarà quadruplicata; da cinque, quintuplicata, ecc.

Corollario Secondo.

Oltre a ciò, data qualsivoglia ragione
$a : c$, se si quadrino i di lei termini, si avrà la ragione
$a^2 : c^2$ duplicata della ragione
$a : c$, perchè l' esponente $\frac{a^2}{c^2}$ (Aritm. 150.) è quadrato dell' esponente $\frac{a}{c}$.

Se poi facciansi i cubi de' termini a, e c, si avrà la ragione $a^3 : c^3$ cubica, o sia triplicata della ragione
$a : c$, perchè (Aritm. 151.) l' esponente $\frac{a^3}{c^3}$ è il cubo dell' esponente $\frac{a}{c}$; e così dell' altre.

Corollario Terzo.

Finalmente per le cose dette facilmente si capisce, chè quella ragione, il di cui esponente, o valore, è radice quadrata dell' esponente d' un altra ragione, chiamasi ragione *Subduplicata*, o *Subquadrata* della medesima ragione.

Così la ragione
$b^m : b$ è subduplicata della ragione
$a^{m^2} : a$, perchè il di lei esponente m è radice quadrata dell' esponente m^2 dell' altra ragione.

Similmente la ragione dicesi *Subtriplicata* d' un' altra ragione, se il di lei valore, o esponente, è radice cubica dell' esponente dell' altra ragione.

Se l' esponente poi è radice quarta, chiamasi *Subquadruplicata*; e così in seguito.

Scolio.

Oltre a ciò diligentemente devesi notare, che la ragion dupla (defin. 4.) è diversa dalla ragion duplicata, la tripla dalla triplicata, la subdupla dalla subduplicata, ecc.; perchè una ragione dicesi dupla in se stessa, e assolutamente, qualunque volta l'antecedente contiene due volte il conseguente; ma una ragione non dicesi duplicata, se non si riferisca a un' altra, e se il di lei esponente non sia il quadrato dell' esponente d' un' altra ragione.

Lo stesso intendasi dell' altre ragioni moltiplici, e moltiplicate.

Definizione Ottava.

Proporzione, o, come piace ad altri, *Proporzionalità*, ovvero *Analogia*, è la comparazione, o sia il paragone di ragioni eguali.

Come se le due ragioni eguali (Aritm. 99.)
12:4, e
15:5 si paragonino tra di loro, si farà la proporzione così,
12:4, siccome
15:5; cioè l'antecedente 12 ha la medesima relazione al suo conseguente 4, che ha l'antecedente 15 al suo conseguente 5.

Similmente le due ragioni
am:a, e
cm:c costituiscono la proporzione
am:a, siccome
cm:c; cioè quell'abitudine, che ha
am:a, la medesima relazione parimenti ha cm:c.

Per conseguenza quattro termini diconsi Geometricamente proporzionali, quando il primo nella stessa guisa si riferisce al secondo, come il terzo al quarto.

La proporzione poi di quattro termini si scrive così
12:4 = 15:5, ovvero
12:4::15:5,
e si legge, dodici a quattro, siccome quindici a cinque; oppure, dodici a quattro eguale di quindici a cinque. E così dell'altre.

Il primo, e l'ultimo termine della proporzione diconsi *Termini Estremi*, o *Estremità* della proporzione; il secondo poi, e il terzo si chiamano termini *Medii*, o *di mezzo* della proporzione medesima.

Oltre a ciò il primo termine appellasi *Primo Antecedente* della proporzione; e il terzo termine chiamasi *Secondo Antecedente* della proporzione.

Il secondo termine poi dicesi *Primo Conseguente*; e il quarto termine *Secondo Conseguente* della proporzione.

Laonde il primo, e il terzo termine diconsi *Omologi*, cioè del medesimo nome, perchè ambidue sono antecedenti; parimenti il secondo, e il quarto chiamansi termini *Omologi*, perchè amendue sono conseguenti,

Come data la proporzione
a:b::c:m, saranno a, ed m termini estremi, b, e c termini medii: oltre à ciò saranno a il primo antecedente, c il secondo antecedente, b il primo conseguente, ed m il secondo conseguente: di più a, e c tra di loro saranno termini omologi, come saranno omologi altresì tra di loro b, ed m.

De-

Definizione Nona.

La proporzione Geometrica, in cui il primo conſeguente è uguale al ſecondo antecedente, ovvero in cui il ſecondo termine è uguale al terzo, appellaſi *Proporzione Continua*, la quale può eſſere eſpreſſa con tre termini, e s'indica con queſto ſegno $\div\!\!\div$, che ſi pone avanti la medeſima proporzione.

Così la proporzione

$24 : 12 :: 12 : 6$ è continua, e ſcriveſi in queſto modo

$\div\!\!\div\ 24 : 12 : 6$, e leggeſi proporzione Geometrica continua di ventiquattro, a dodici, a ſei; ovvero, ventiquattro a dodici ha la medeſima ragione, che ha lo ſteſſo dodici a ſei.

Similmente la proporzione

$a : b :: b : c$ è continua, e ſi eſprime così

$\div\!\!\div\ a : b : c$, e ſi proferiſce proporzione continua di a, a b, a c.

Per la qual coſa nella proporzione continua il ſecondo termine, che anche diceſi termine *Medio*, è conſeguente del primo, e antecedente del termine terzo, i quali ſi chiamano termini *Eſtremi* della medeſima proporzione.

La proporzione Geometrica poi, nella quale il termine ſecondo non è uguale al terzo appellaſi *Proporzione Diſcreta*.

Come $8 : 2 :: 12 : 3$, ovvero

$a : b :: c : m$.

Definizione Decima.

Progreſſione Geometrica è una ſerie di quantità creſcenti, o decreſcenti ſecondo la medeſima ragione; ovvero è una proporzione continua, la quale è formata da più di tre termini.

Così la progreſſione

$\div\!\!\div\ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128$ ecc.

è una progreſſione creſcente; e la progreſſione

$\div\!\!\div\ 16 : 8 : 4 : 2 : 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32} : \frac{1}{64}$ ecc.

è una progreſſione decreſcente, ed ambedue poſſono continuarſi in indefinito, come da ſe è manifeſto.

Similmente ſono progreſſioni Geometriche

$\div\!\!\div\ a : ac : ac^2 : ac^3 : ac^4 : ac^5 : ac^6 : ac^7$, ecc.

$\div\!\!\div\ am^3 : am^2 : am : a : \frac{a}{m} : \frac{a}{m^2} : \frac{a}{m^3} : \frac{a}{m^4}$, ecc.

$\div\!\!\div\ \frac{1}{a^4} : \frac{1}{a^3} : \frac{1}{a^2} : \frac{1}{a^1} : \frac{1}{a^0} : \frac{1}{a^1} : 1$: ovvero $a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : a^4$: ecc.

$\div\!\!\div\ a^{-6} : a^{-5} : a^{-4} : a^{-3} : a^{-2} : a^{-1} : a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : a^4$: ecc.

Definizione Undecima.

Denominatore della ragion Geometrica è il quoziente, che naſce dividendo il termine maggiore per il minore.

Come della ragione

a : ac il denominatore è $\frac{ac}{a}$, cioe c; e il denominator della ragione $am^3 : am^2$ è $\frac{am^3}{am^2}$, cioè m; per conſeguenza nella ragione di maggior ineguaglianza il denominator della ragione è il medeſimo che l'eſponente, o ſia il nome della ragione; e nella ragion di minor ineguaglianza il denominatore uguaglia l'eſponente della medeſima ragione inverſa.

Corollario Primo.

Dato adunque il denominatore m d'una ragione, e il primo termine a d'una progreſſione Geometrica creſcente, ſi troverà il ſecondo termine moltiplicando il primo a per il denominatore m, e ſarà am il ſecondo termine; moltiplicando il ſecondo am per il denominatore m, ſi avrà il terzo termine am^2, il quale moltiplicato per il denominatore m produce il quarto termine am^3; e così andando inanzi ſi ritrovano in ſeguito gli altri termini, e ſi avrà la progreſſione

$\div\div$ a : am : am^2 : am^3 : am^4 : am^5, ecc.

Se abbiaſi a ritrovare una progreſſione decreſcente, e il primo termine ſia ac^5, e il denominator della ragione ſia c, allora dividaſi il primo ac^5 per il denominatore c, il quoziente ac^4 ſarà il ſecondo termine; dividendo il ſecondo ac^4 per il denominatore c, il quoziente ac^3 ſarà il terzo termine, il quale diviſo per c dà il quarto termine $\frac{ac^2}{c}$, e così ſucceſſivamente.

Perciò la progreſſione ſarà

$\div\div$ $ac^5 : ac^4 : ac^3 : \frac{ac^2}{c} : \frac{ac^2}{c^2} : \frac{ac^2}{c^3} : \frac{ac^2}{c^4}$, ecc.

Corollario Secondo.

Quindi dato il denominator d'una ragione, e il primo termine d'una progreſſione creſcente, con ſomma agevolezza ritrovaſi qualſivoglia termine della medeſima progreſſione ſe il denominatore ſi alzi alla potenza indicata dal numero del termine ricercato ſminuito d'una unità, e la ſteſſa potenza ſi moltiplichi per il primo termine.

Come ſe cerchiſi il quinto termine della progreſſione

$\div\div$ a : ac : ac^2 : ac^3, ſi alzi il denominatore della ragione c alla quarta potenza, la quale ſarà c^4, e ſi moltiplichi per il primo termine a, ſarà ac^4 il quinto termine ricercato.

Se abbiaſi a ritrovare il decimo termine, ſi alzi il denominatore c alla nona potenza, e moltiplicando c^9 per a, ac^9 ſarà il decimo termine ricercato.

Ma nella progreſſione Geometrica decreſcente ſe il denominatore ſi alzi alla potenza indicata dal numero del termine ricercato ſminuito

d'una

d'una unità, e per la ſteſſa potenza ſi divida il primo termine, il quoziente darà il termine ricercato.

Come nella progreſſione

$\div\ am^3 : am^2 : am : a : \frac{a}{m} : \frac{a}{m^2}$, ecc.

ſe debbaſi ritrovare l' ottavo termine, ſi alzi il denominatore m alla ſettima potenza, ſi avrà m^7; e dividendo il primo termine am^3 per am^7, il quoziente $\frac{am^3}{am^7}$, cioè $\frac{a}{m^4}$ (126.) darà il termine ottavo ricercato; e così degli altri.

PROPOSIZIONE PRIMA

Teorema.

Dati quattro termini proporzionali, il prodotto degli eſtremi ſarà eguale al prodotto de' medj.

Sieno i quattro termini proporzionali
a : b :: c : m, dico, che il prodotto am degli eſtremi a, ed m, è uguale al prodotto bc de' medj b, ec.

Dimoſtrazione.

Poichè per l'ipoteſi è
a : b = c : m, e ragioni eguali (Aritm. 100.) formano frazioni eguali; perciò ſarà $\frac{a}{b} = \frac{c}{m}$; e moltiplicando le quantità eguali $\frac{a}{b}$, e $\frac{c}{m}$ per bm, (che è il prodotto de' termini conſeguenti, o dei denominatori b, ed m), i prodotti (Aritm. 134.) ſaranno $\frac{abm}{b}$, e $\frac{bcm}{m}$ eguali tra di loro (aſſiom. 4.), cioè ſarà $\frac{abm}{b} = \frac{bcm}{m}$, vale a dire am = bc (Aritm. 68.), perchè dividendo abm per b, il quoziente è am; e dividendo bcm per m, ſi ha il quoziente bc.

Dunque dati quattro termini proporzionali, o ſieno numeri, oppur linee, ovvero quantità di qualſivoglia altro genere, ſempre il prodotto dal primo nel quarto ſarà uguale al prodotto dal ſecondo nel terzo. Il che era da dimoſtrarſi.

Queſta Propoſizione contiene la prima parte della Propoſizione 16. del Libro 6, e la prima parte della Propoſizione 19. del Libro 7. di Euclide.

Corollario.

Se poi la data proporzione ſarà continua
$\div$ a : b : c, cioè
a : b :: b : c, allora (per la dimoſtr. preced.) ſarà ac = bb, cioè il prodotto degli eſtremi ſarà uguale al quadrato del termine medio (defin. 9.).

Il

Il che da Euclide per le linee viene dimostrato nella prima parte della Proposizione 17. del Libro 6; e per i numeri nella prima parte della Proposizione 20. del Libro 7.

PROPOSIZIONE SECONDA.

Teorema.

Se quattro termini saranno tra di loro talmente disposti, che il prodotto dal primo nel quarto sia eguale al prodotto dal secondo nel terzo, essi quattro termini saranno proporzionali.

Sieno dati i quattro termini
a, c, m, f, e di tal condizione, che il rettangolo (Aritm. 146.) o prodotto af degli estremi sia eguale al prodotto cm de' medj, i predetti quattro termini saranno proporzionali; cioè posto
$af = cm$, sarà
$a : c = m : f$.

Dimostrazione.

Per l'ipotesi è $af = cm$, e dividendo le quantità eguali af, e cm per la medesima quantità cf (la quale è il prodotto dal secondo termine c nel quarto f), i quozienti $\frac{af}{cf}$, e $\frac{cm}{cf}$ cioè (Aritm. 126.) $\frac{a}{c}$, e $\frac{m}{f}$ saranno eguali tra di loro (Assiom. 5.), vale a dire sarà $\frac{a}{c} = \frac{m}{f}$; ma Aritm. 100.) frazioni eguali formano ragioni eguali; perciò sarà
$a : c = m : f$, o sia
$a : c :: m : f$.

Dunque dati quattro termini di qualsivoglia genere, se il prodotto degli estremi sarà eguale al prodotto de' medj, gli stessi termini saranno proporzionali. Il che aveasi a dimostrare.

Questa Proposizione contiene la seconda parte della Proposizione 16. del Libro 6; e la seconda parte della Proposizione 19. del Libro 7. d'Euclide.

Corollario Primo.

Quindi due prodotti eguali, cioè qualsivoglia equazione (Aritm. 102.) può discioglierſi in quattro termini proporzionali, purchè il primo, e il quarto termine si prendano nella medesima parte dell'equazione (vale a dire sieno i fattori d'un sol prodotto), il secondo poi, e il terzo termine della proporzione si prendano nell'altra parte dell'equazione (cioè sieno i moltiplicatori dell'altro prodotto eguale); il che dicesi *Sciogliere l'equazione*.

Sieno i due prodotti eguali

ab,

ab, e cm, cioè sia
ab = cm, sciogliendoli, si avrà la proporzione
a:c::m:b, ovvero sarà
a:m::c:b, o
b:c::m:a, oppure
b:m::c:a, ovvero sarà
c:a::b:m, o
c:b::a:m, o si avrà
m:a::b:c, o
m:b::a:c; perchè sempre i quattro termini sono talmente disposti, e paragonati tra di loro, che il prodotto degli estremi sia eguale al prodotto de' medj: essendo per la fatta ipotesi
ab = cm.

Similmente data l'equazione numerica
24 × 2 = 12 × 4, sciogliendola si avrà la proporzione
24:12::4:2, ovvero
24:4::12:2, oppure sarà
12:24::2:4, o
12:2::24:4, ovvero sarà
2:12::4:24; o
2:4::12:24, oppure
4:2::24:12, ovvero
4:24::2:12.

Corollario Secondo.

Che se sarà
am = c, cioè
am = 1c (Aritm. 24.), nel scioglierla sarà
a:1::c:m, ovvero
1:m::a:c; vale a dire, in ogni moltiplicazione delle quantità l'unità è all'uno de' moltiplicatori m, siccome l'altro moltiplicatore a è al prodotto c; perchè in questa ipotesi la quantità c significa il prodotto da a in m.

Corollario Terzo.

Così pure data l'equazione
am = cc, sciogliendola, sarà la proporzione
a:c::c:m, cioè (defin. 9.) sarà
= a:c:m.

Adunque se i tre termini
a, c, m, saranno di tal condizione, che il rettangolo (Aritm. 146.), o il prodotto dal primo nel terzo sia eguale al quadrato del secondo termine, o sia del medio, allora i dati termini saranno proporzionali continue.

In

In questo Corollario si contengono la seconda parte della Proposizione 17. del Libro 6., e la seconda parte della Proposizione 20. del Libro 7. di Euclide.

Corollario Quarto.

Se l'equazione
$am = cc$ si moltiplichi per a (assiom. 4.) sarà
$aam = acc$; e sciogliendola si avrà
$a : m :: aa : cc$; se poi si moltiplichi per m, si avrà
$amm = ccm$, e sciogliendola sarà
$a : m :: cc : mm$.

Per la qual cosa dati tre termini continuamente proporzionali $\div a : c : m$, sarà il primo al terzo, siccome il quadrato del primo termine al quadrato del secondo, ovvero come il quadrato del secondo al quadrato del terzo termine; cioè in ragion duplicata del primo al secondo, o del secondo al terzo.

Corollario Quinto.

Se sarà
$a = b$, e le quantità eguali
a, e b si moltiplichino per una medesima c (assiom. 4.), sarà
$ac = bc$; e sciogliendola si avrà
$a : c :: b : c$, oppure
$c : a :: c : b$.

Per conseguenza le quantità eguali hanno una medesima ragione ad una medesima quantità; e vicendevolmente una medesima quantità ha una medesima ragione a quantità uguali.

Questa è la Proposizione 7. del Libro 5. di Euclide.

PROPOSIZIONE TERZA.

Teorema.

Dati quattro termini proporzionali,

Primieramente saranno anche proporzionali il secondo termine al primo, siccome il quarto al terzo; il qual genere di argomentare dicesi Rivoltare, o invertir la ragione.

In secondo luogo saranno altresì proporzionali il primo al terzo, siccome il secondo al quarto: lo che dicesi Alternare, o Permutar la ragione.

Sieno i quattro termini proporzionali
$a : b :: c : m$, Primieramente invertendoli si avrà

$b : a$

b:a::m:c; In ſecondo luogo alternandoli ſarà
a:c::b:m.

Dimoſtrazione.

Giacchè per l'ipoteſi è
a:b::c:m, perciò (Propoſ. 1.) ſarà
am=bc, e (coroll. 1. della Prop. 2.) ſciogliendoli ſi avrà b:a ::m:c; oppure ſarà a:c::b:m. Dunque dati quattro termini proporzionali, o invertendoli, ovvero alternandoli, ſempre reſteranno proporzionali. Il che era da dimoſtrarſi.

La prima parte di queſta Propoſizione è il Corollario della Propoſizione 4. del Libro 5., e la ſeconda parte è la Propoſizione 16. del medeſimo 5. Libro d'Euclide.

Corollario Primo.

Quindi dati quattro termini proporzionali
a:c::m:r, ſe il primo a ſarà eguale al terzo m, anche il ſecondo c ſarà eguale al quarto r; ſe poi il primo a ſarà maggiore del terzo m, ſarà parimenti il ſecondo c maggiore del quarto r; e ſe a ſarà minore di m, anche c ſarà minore di r, perchè alternando la data proporzione, ſi ha
a:m::c:r per la ſeconda parte di queſta Propoſizione.

In queſto Corollario ſi contiene la Propoſizione 14. del Libro 5. di Euclide.

Corollario Secondo.

Per tanto ſe ſarà
a:m::c:m, ovvero
m:a::m:c, perchè è
m=m, ſarà anche a=c.

Dunque le quantità, che hanno la ſteſſa ragione a una medeſima quantità, ſono eguali tra di loro. Similmente ſono eguali quelle quantità, alle quali una ſteſſa grandezza ha la medeſima ragione.

Queſta è la Propoſizione 9. del Libro 5. d'Euclide.

PROPOSIZIONE QUARTA.

Teorema.

Se vi ſaranno quattro termini proporzionali, la ſomma del primo col ſecondo avrà la medeſima ragione al ſecondo, che ha la ſomma del terzo col quarto all'iſteſſo quarto. E queſt'argomentazione dicesi Compoſizione della ragione.

Così la proporzione
a:b::c:m, componendo, ſi avrà
a+b:b::c+m:m.

Dimoſtrazione.

Imperciocchè (per l'ipoteſi) è
a:b::c:m, e perciò (Propoſ. 1.) ſarà
am=bc; ed aggiungendo all'una, e all'altra parte dell'equazione bm (prodotto de' termini conſeguenti), ſi avrà (aſſiom. 2.) l'altra equazione,
am+bm=bc+bm, cioè
a+b × m = c+m × b (Aritmet. 61.); e per il Coroll. 1. della Prop. 2.) ſciogliendo ſi avrà la proporzione
a+b : b : : c+m : m. Il che era da dimoſtrarſi.

Queſta è la Propoſizione 18. del Libro 5. di Euclide.

Corollario Primo.

Se poi all'equazione
am = bc ſi aggiunga ac (prodotto de' termini antecedenti della data proporzione
a: b : : c : m), allora (aſſiom. 2.) ſi avrà
ac+am=ac+bc, vale a dire (Aritm. 61.)
c+m × a = a+b × c; e ſciogliendo ſarà
a+b:a::c+m:c; cioè la ſomma de' termini della prima ragione
a: b al ſuo antecedente a, ſiccome la ſomma de' termini della ſeconda ragione
c : m al ſuo antecedente c.

Corollario Secondo.

Oltre a ciò (per la ſeconda parte della Propoſ. 3.) alternando la data proporzione
a : b : : c : m, ſarà
a : c : : b : m; e componendo (per la Dimoſtr. preced.) ſarà
a+c : c : : b+m : m; oppure (per il Coroll. preced.) ſarà
a+c : a : : b+m : b; cioè la ſomma degli antecedenti è ad uno degli ſteſſi antecedenti, come la ſomma de' termini conſeguenti al conſeguente corriſpondente.

PROPOSIZIONE QUINTA.

Teorema.

Qualunque volta vi ſaranno quattro termini proporzionali, la differenza tra il primo, e il ſecondo termine allo ſteſſo ſecondo, avrà la medeſima ragione, che ha la differenza tra il terzo, e il quarto allo ſteſſo quarto termine. Queſto genere d' argomentare dicaſi Diviſion della ragione.

Sia la proporzione
a : b : : c : m, dividendo, ſarà
a — b : b : : c — m : m.

Di-

Dimoſtrazione.

Dalla data proporzione
a : b : : c : m (Propoſ. 1.) ne naſce l' equazione
am = bc, da cui tolgaſi dall' una, e dall' altra parte bm, (aſſioma 3.) reſterà
am — bm = bc — bm, cioè (Aritm. 61.)
a — b × m = c — m × b, e diſciogliendo (per il Coroll. 1. della Propoſ. 2.) ſarà
a — b : b : : c — m : m. Il che era da dimoſtrarſi.
Queſta è la Propoſizione 17. del Libro I. di Euclide.

Corollario Primo.

Se dell'equazione
am = bc le parti am, e bc ambedue ſi ſottraggano da ac (prodotto dagli antecedenti della data proporzione
a : b : : c : m), allora (aſſiom. 3.) reſterà
ac — am = ac — bc, cioè
c — m × a = a — b × c; e diſciogliendo, ſi avrà
a : a — b : : c : c — m; cioè il primo termine della data proporzione alla differenza tra il primo, e il ſecondo, ſiccome il terzo termine alla differenza tra il terzo, e il quarto. E queſto modo di argomentare appellaſi *Converſion della ragione*.
Queſta è la Propoſizione 19. del Libro 5. di Euclide.

Corollario Secondo.

Inoltre alternando la data proporzione
a : b : : c : m, ſarà
a : c = b : m; onde dividendo, ſi avrà
a — c : c = b — m : m, cioè la differenza de' termini antecedenti è al ſecondo antecedente, come la differenza de' termini conſeguenti al ſecondo conſeguente.
Di più convertendo la medeſima proporzione
a : c : : b : m, ſarà
a : a — c : : b : b — m; e invertendola, ſi avrà
a — c : a : : b — m : b; cioè la differenza de' termini antecedenti è al primo antecedente ſiccome la differenza de' conſeguenti al primo conſeguente della data proporzione
a : b : : c : m.

Corollario Terzo.

Poichè dati quattro termini proporzionali
a : b : : c : m, componendo (per la Propoſ. preced.) abbiamo

a + b : b = c + m : m, e (per queſta Propoſ.) dividendo è
a — b : b = c — m : m, perciò (per la ſeconda parte della Propoſ. 3.) alternando le medeſime proporzioni ſi avrà
a + b : c + m = b : m, e
a — b : c — m = b : m; dunque (per l' aſſiom. 1.) ſarà
a + b : c + m = a — b : c — m; e alternando ſi avrà
a + b : a — b = c + m : c — m; cioè la ſomma de' termini della prima ragione è alla differenza de' medeſimi termini, ſiccome la ſomma de' termini della ſeconda ragione alla differenza degli ſteſſi: il che diceſi *Meſchiar la ragione*.

Similmente perchè per le coſe dimoſtrate (nel Coroll. 2. della Propoſ. 4; ed altresì nel Coroll. 2. di queſta Propoſ.) è
a + c : a = b + m : b, e
a — c : a = b — m : b, meſchiando ſarà
a + c : a — c = b + m : b — m,
cioè la ſomma de' termini antecedenti è alla loro differenza, come la ſomma de' termini conſeguenti alla differenza di lor medeſimi.

Scolio.

Con un ſolo eſempio numerico ſi dichiarino tutt' i generi di argomentare di ſopra dimoſtrati.

Sia la proporzione Geometrica
12 : 4 : : 6 : 2, invertendola (per la prima parte della Prop. 3.) ſarà
4 : 12 : : 2 : 6, e alternando (per la ſeconda parte della Propoſ. 3.) ſi avrà
12 : 6 : : 4 : 2, e componendo la data proporzione (per la Propoſ. 4.) ſarà
12 + 4 : 4 : : 6 + 2 : 2, cioè
16 : 4 : : 8 : 2; ovvero (per il Coroll. 1. della Propoſ. 4.) ſarà
12 + 4 : 12 : : 6 + 2 : 6, cioè
16 : 12 : : 8 : 6, e (per il Coroll. 2. della Propoſ. 4.) ſi avrà
12 + 6 : 6 : : 4 + 2 : 2, cioè
18 : 6 : : 6 : 2, ovvero ſarà
12 + 6 : 12 : : 4 + 2 : 4, cioè
18 : 12 : : 6 : 4; e dividendo la medeſima data proporzione, per queſta Propoſizione ne riſulta
12 — 4 : 4 : : 6 — 2 : 2, cioè
8 : 4 : : 4 : 2; o convertendola (per il Coroll. 1. di queſta Prop.) ſarà
12 — 4 : 12 : : 6 — 2 : 6, cioè
8 : 12 : : 4 : 6. Parimenti (per il Coroll. 2. di queſta Prop.) ſi avrà
12 — 6 : 6 : : 4 — 2 : 2, vale a dire
6 : 6 = 2 : 2, ovvero
12 — 6 : 12 = 4 — 2 : 4, cioè
6 : 12 : : 2 : 4.

Final-

Finalmente meſchiando (per il Coroll. 3. di queſta Propoſ.) ſarà
12 + 4 : 12 — 4 : : 6 + 2 : 6 — 2, cioè
16 : 8 : : 8 : 4, ovvero ſarà
12 + 6 : 12 — 6 : : 4 + 2 : 4 — 2, cioè
18 : 6 : : 6 : 2.

PROPOSIZIONE SESTA.

Teorema.

Se vi ſaranno due, o più Geometriche proporzioni diſcrete, e di tal condizione, che gli ſteſſi conſeguenti della prima proporzione (conſervato l' ordine di primo, e di ſecondo) ſieno anche antecedenti della ſeconda proporzione, e i conſeguenti della ſeconda, ſieno parimenti antecedenti della terza proporzione, e così in ſeguito; il primo antecedente della prima proporzione ſarà al primo conſeguente dell' ultima proporzione ſiccome il ſecondo antecedente della prima al ſecondo conſeguente dell' ultima proporzione. Il che diceſi argomentare Dall' eguaglianza ordinata, *o ſia* coll' ordinare.

Sieno date le proporzioni
a : b : : e : r, e
b : c : : r : ſ, e
c : m : : ſ : t, nelle quali i conſeguenti b, ed r della prima ſono anche antecedenti della ſeconda, e i conſeguenti c, ed ſ della ſeconda ſono parimenti antecedenti della terza proporzione; dico, ordinandole, eſſere
a : m : : e : t.

Dimoſtrazione.

Imperciocchè per l'ipoteſi abbiamo
a : b = e : r, e
b : c = r : ſ, e
c : m = ſ : t; e (per la ſeconda parte della Propoſ. 3.) alternando ciaſcuna delle proporzioni, avremo
a : e = b : r, e
b : r = c : ſ, e
c × ſ = m : t; dunque (Aſſiom. 1.) ſarà
a : e = m : t; e alternando ſarà
a : m = e : t; cioè il primo termine della prima proporzione ſarà al ſecondo termine dell' ultima proporzione, ſiccome il terzo termine della prima al quarto dell' ultima proporzione. Il che era da dimoſtrarſi.

Queſte ſono le Propoſizioni 20, e 22. del Libro 5; e 14. del Libro 7. di Euclide.

PRO-

PROPOSIZIONE SETTIMA.

Teorema.

Se vi saranno due proporzioni di tal condizione, che il primo conseguente della prima sia anche primo antecedente della seconda proporzione; e il secondo antecedente della prima sia parimenti secondo conseguente della seconda proporzione: allora il primo antecedente della prima proporzione sarà al primo conseguente della seconda, siccome il secondo antecedente della seconda proporzione al secondo conseguente della prima. Quest' argomentazione dicesi, Perturbar la ragione, *ovvero* Dall'eguaglianza perturbata.

Sieno due proporzioni
a : b :: f : t, e
b : c :: m : f, nelle quali b, ed f termini medj della prima proporzione (conservato l'ordine di primo, e di secondo) sono anche termini estremi della seconda proporzione, perturbandoli sarà
a : c :: m : t

Dimostrazione.

Dalle date proporzioni
a : b :: f : t, e
b : c :: m : f, moltiplicando i medj, e gli estremi (per la Propos. 1.) ne nascono l'equazioni
at = bf, e
bf = cm; e perciò (per l'Assiom. 1.) sarà
at = cm, e (per il Coroll. 1. della Propos. 2.) disciogliendo si avrà la proporzione
a : c :: m : t. Dunque se i medj della prima proporzione saranno anche estremi della seconda, il primo termine della prima sarà al secondo della seconda proporzione, siccome il terzo della seconda al quarto termine della prima proporzione. Il che era da dimostrarsi.

Questa Proposizione contiene le Proposizioni 21. e 23. del Libro 5., e 22. del Libro 7. di Euclide.

PROPOSIZIONE OTTAVA.

Teorema.

Se vi saranno più grandezze proporzionali, ovvero più ragioni eguali, raccogliendo, sarà la somma di tutti gli antecedenti alla somma di tutti i conseguenti, siccome qualsivoglia termine antecedente al suo conseguente.

Sieno le quantità proporzionali, o ragioni eguali
a : b = c : m = f : t; raccogliendole sarà
a + c + f : b + m + t :: a : b, ovvero :: c : m, ecc.

Di-

Dimostrazione.

Per la fatta ipotesi abbiamo
a:b::c:m, e perciò componendo (per il Coroll. 2. della Propos. 4.) sarà
a + c:c::b + m:m, e alternando sarà
a + c:b + m = c:m; ma per la fatta ipotesi è
c:m = f:t; dunque (per l'Assiom. 1.) sarà anche
a + c:b + m = f:t, e (per il Coroll. della Propos. 4.) si avrà
a + c + f:f::b + m + t:t, e alternando sarà
a + c + f:b + m + t = f:t. E' poi per la fatta ipotesi
f:t = c:m = a:b; conseguentemente (per l'Assiom. 1.) sarà
a + c + f:b + m + t = a:b, ovvero = c:m. Dunque se vi saranno più grandezze proporzionali, ecc. Il che era da dimostrarsi.

Questa è la Proposizione 12. del Libro 5., e la 12. del Libro 7. di Euclide.

PROPOSIZIONE NONA.

Problema.

Dati tre termini, ritrovare un quarto proporzionale.

Sieno dati i tre termini a, c, m, e sia da ritrovarsi un quarto, al quale il terzo termine m abbia la medesima ragione, che ha il primo a al secondo c.

Risoluzione.

Si moltiplichi il secondo c per il terzo m, e il prodotto cm dividasi per il primo termine a, il quoziente $\frac{cm}{a}$ sarà il quarto ricercato termine proporzionale.

Dimostrazione.

Il quarto termine ricercato si chiami x (Aritm. n°. 21.), e la proporzione sarà
a:c::m:x; conseguentemente (per la Propos. 1.) l'equazione sarà $ax = cm$; e dividendo tutta l'equazione per a (per l'Assiom. 5.) resterà $x = \frac{cm}{a}$. Dunque il quarto ricercato termine proporzionale, che fu chiamato x, è uguale al quoziente $\frac{cm}{a}$, che nasce dividendo per il primo termine a il prodotto cm dal secondo termine nel terzo. Il che era da farsi, e da dimostrare.

Sia $a = 3$, $c = 12$, ed $m = 7$, sarà
$x = \frac{12 \times 7}{3}$, cioè $x = \frac{84}{3}$, vale a dire sarà
$x = 28$; imperciocchè è
3:12::7:28.

Sco-

Scolio.

In questo Problema si è dimostrata la regola principale dell'Aritmetica, la quale dicesi *Regola delle Proporzioni*, e per la sua eccellenza, e grandissima utilità chiamasi *Regola Aurea*, volgarmente però *Regola del Tre*, perchè da tre dati numeri si ritrova il quarto proporzionale, ed incognito.

L'altre tre Regole dell'Aritmetica, cioè di *Società*, di *Falsa posizione*, e di *Alligazione* dipendono affatto da questa regola delle proporzioni: come si può vedere negli Autori di Aritmetica.

Per sciogliere poi con questa regola le questioni Aritmetiche, devesi diligentemente osservare che fra i tre dati numeri ve ne sono due tra di loro omogenei, e il terzo del medesimo genere col quarto ricercato; e che i tre dati numeri si devono distribuire con tal ordine, che il luogo medio tenga quello, che è omogeneo col quarto ricercato; che in terzo luogo pongasi quello, il quale ha annessa la questione; e quello, che a questo è omogeneo, si scriva in primo luogo: come si può vedere nell'esempio seguente

Ricercasi in quante ore compisca il corso di 420 miglia quel corriere, il quale colla medesima celerità fece in 12 ore 72 miglia.

In questa questione il termine, che è omogeneo col quarto ricercato, sono l'ore 12; laonde si ponga 12 in secondo luogo; il termine, che ha annessa la questione, sono le miglia 420, e questo pongasi in terzo luogo; nel primo luogo poi scrivasi il termine a questi omogeneo, cioè le miglia 72, in questa maniera

M

72 : 12 : : 420 :

Dipoi conforme alla dimostrazione antecedente si moltiplichi il terzo termine 420 per il secondo 12, e il prodotto 5040 dividasi per il primo termine 72, il quoziente 70 sarà il quarto ricercato: cioè in ore 70 compirà il corso delle dette miglia 420; imperciocchè è

72 : 12 : : 420 : 70, perchè è

$72 \times 70 = 12 \times 420$.

Quando poi la data questione ha più di tre termini, cioè o cinque, o sette, o nove, ecc., allor la *Regola delle proporzioni* dicesi *Composta*, e si riduce alla semplice, perchè de' dati termini tre solamente sono i principali; e gli altri meno principali si compongono co' principali, come apparisce nella seguente Questione.

50 Soldati nel corso di otto giorni spesero 600 lire d' argento, cercasi quante lire debbano spendere 80 Soldati in 15 giorni.

I termini principali di questo Problema sono 50 soldati, 600 lire, e 80 Soldati; e ai Soldati 50 appartengono gli 8 giorni, e agli 80 Soldati appartengono i giorni 15: e perciò si moltiplichino 50 per 8, e 80 per 15; e il primo prodotto 400 sarà il primo termine; il secondo prodotto 1200 sarà il terzo termine; il termine me-

ne medio poi saranno le lire 600, e così la regola sarà semplice
400 : 600 : : 1200 :
e moltiplicando 600 in 1200, e dividendo il prodotto 720000 per 400, il quoziente 1800 sarà il ricercato numero delle lire.

Oltre a ciò la Regola delle Proporzioni composta può risolversi in due, o più regole semplici. Ma di ciò sia detto a bastanza. Veggansi gli Autori di Aritmetica.

Corollario.

Dati i due termini, a, c, si ritrova anche il terzo continuamente proporzionale, dividendo il quadrato del secondo termine per il primo; imperciocchè ponendo x per terzo termine ricercato, si ha la proporzione continua
$\div$ a : c : x; e perciò (per il Coroll. della prima Propos.) sarà
$ax = cc$; e dividendo l'equazione per a (per l'Assiom. 5.) si avrà
$x = \frac{cc}{a}$. conseguentemente il terzo termine della proporzione continua è uguale al quoziente, che nasce dividendo il quadrato del secondo per il primo termine.

Dati poi il primo termine a, e il terzo m, per ritrovare il termine medio proporzionale, dal prodotto a m del primo a nel terzo m si estragga la radice quadrata, la quale darà il termine ricercato.

Imperciocchè data la proporzione
a : x : m, (per il Corol. della prima Propos.) sarà
$xx = am$; ed estraendo la radice quadrata da quantità eguali (Aritm. 18a.), si avrà $x = \sqrt{am}$.

Se a sia 12, ed m sia 3, sarà
$x = \sqrt{12 \times 3}$, cioè
$x = \sqrt{36}$, vale a dire
$x = 6$; perciò sarà
$\div$ 12 : 6 : 3, come da se è manifesto.

PROPOSIZIONE DECIMA.

Teorema.

Dati quattro termini proporzionali a : b : : c : m, se gli antecedenti, o i conseguenti, o il primo e il secondo termine, o il terzo e il quarto, o tutti i termini si moltiplichino, oppur si dividano per la medesima quantità, i quattro termini sempre resteranno proporzionali.

Dimostrazione.

1. Poichè (per la fatta ipotesi) è
a : b : : c : m, dunque (per la Propos. prima) sarà

$am = bc$; e moltiplicando l' equazione per f, (per l'Aſſiom. 4. ſi avrà

$amf = bcf$; e diſcioglendo (per il Corollar. primo della Propoſ. 2.) ſarà

$af : b :: cf : m$, ovvero

$a : bf :: c : mf$, oppure

$af : bf :: c : m$, o ſarà

$a : b :: cf : mf$.

Che ſe l'equazione

$am = bc$ ſi moltiplichi per ff, (per l'Aſſiom. 4.) ſarà

$amff = bcff$; e diſcioglendo ſi avrà

$af : bf :: cf : mf$.

Se poi la medeſima equazione

$am = bc$ ſi divida per f, (per l'Aſſiom. 5.) ſi avrà

$\frac{am}{f} = \frac{bc}{f}$, e diſcioglendo ſarà

$\frac{a}{f} : b :: \frac{c}{f} : m$, ovvero

$a : \frac{b}{f} :: c : \frac{m}{f}$; oppur ſarà

$\frac{a}{f} : \frac{b}{f} :: c : m$; o ſarà

$a : b :: \frac{c}{f} : \frac{m}{f}$; imperciocchè ſempre il prodotto degli eſtremi uguaglia il prodotto de' medj.

Finalmente l' equazione

$am = bc$ dividaſi per ff, e (per l'Aſſiom. 5.) reſterà

$\frac{am}{ff} = \frac{bc}{ff}$, e diſcioglendo ſarà

$\frac{a}{f} : \frac{b}{f} :: \frac{c}{f} : \frac{m}{f}$. Dunque dati quattro termini proporzionali ecc. Il che era da dimoſtrarſi.

Corollario Primo.

Se l'equazione di ſopra ritrovata

$am = bc$ ſi moltiplichi per rf, (per l'Aſſiom. 4.) ſarà

$amrf = bcrf$, e diſcioglendo ſi avrà

$ar : bf :: cr : mf$, oppure ſarà

$af : bf :: cr : mr$.

Che ſe l' equazione

$am = bc$ ſi divida per la quantità rf, (per l' Aſſiom. 5.) ſi avrà

$\frac{am}{rf} = \frac{bc}{rf}$, e diſcioglendo ſarà

$\frac{a}{r} : \frac{b}{f} :: \frac{c}{r} : \frac{m}{f}$, ovvero

$\frac{a}{r} : \frac{b}{r} :: \frac{c}{f} : \frac{m}{f}$.

Per la qual coſa data la proporzione

$a : b :: c : m$, ſe gli antecedenti ſi moltiplichino, o ſi dividano per una

una quantità, e i conseguenti per un' altra; ovvero il primo, e il secondo termine per una, e il terzo col quarto per un' altra quantità, i quattro termini saranno sempre proporzionali.

Corollario Secondo.

Oltre a ciò, moltiplicando la medesima equazione
$bc = am$ per a, (per l'Assiom. 4.) si avrà
$abc = aam$; e (per il Coroll. 1. della Propos. 2.) disciogliendo sarà
$a : m :: aa : bc$.

Dunque dati quattro termini proporzionali
$a : b :: c : m$, il primo sarà al quarto siccome il quadrato del primo termine al prodotto de' medj, cioè $:: aa : bc$. Ma la ragione $aa : bc$ (per il Corollar. 3. della Definiz. 6.) è composta dalle due ragioni $a : b$, e $a : c$; per conseguenza la ragione del primo termine al quarto è composta dalle ragioni del primo al secondo, e del primo al terzo.

PROPOSIZIONE UNDECIMA.

Teorema.

Se due, o più proporzioni avranno i medesimi conseguenti, allora la somma de' primi antecedenti sarà al comun conseguente, siccome la somma de' secondi antecedenti al suo comun conseguente.

Sieno le proporzioni
$a : b :: c : m$, e
$f : b :: r : m$, che hanno i medesimi conseguenti
b, ed m, sarà
$a + f : b :: c + r : m$.

Dimostrazione.

Imperciocchè dalle date proporzioni
$a : b :: c : m$, e
$f : b :: r : m$, (per la Propos. 1.) ne nascono l'equazioni $am = bc$, e $fm = br$; e ad uguali aggiungendo altri eguali, (per l'Assiom. 2.) sarà
$am + fm = bc + br$, cioè
$a + f \times m = c + r \times b$; e disciogliendo (per il Coroll. 1. della Propos. 2.) sarà
$a + f : b :: c + r : m$. Il che era da dimostrarsi.
Questa è la Proposizione 24. del Libro 5. di Euclide.

Corollario.

Se poi due proporzioni
a : b : : c : m, e
a : r : : c : ſ avranno i medeſimi antecedenti
a, e c, perchè invertendo (per la Propoſ. 3.) ſi fanno le proporzioni
b : a : : m : c, e
r : a : : ſ : c, che hanno i medeſimi conſeguenti ; perciò (per la Dimoſtr. preced.) ſarà
b + r : a : : m + ſ : c, ed invertendo ſi avrà
a : b + r : : c : m + ſ.

Laonde ſe due proporzioni avranno i medeſimi antecedenti, allora il primo comune antecedente ſarà alla ſomma de' ſuoi conſeguenti, ſiccome il ſecondo comune antecedente alla ſomma de' ſecondi conſeguenti.

PROPOSIZIONE DUODECIMA.

Teorema.

Date due proporzioni, moltiplicando, o dividendo i termini d' una per i corriſpondenti termini dell' altra proporzione, i prodotti nel primo caſo, e i quozienti nel ſecondo ſaranno proporzionali.

Sieno le due proporzioni
a : b : : c : m, e
r : ſ : : t : u; primieramente ſarà
ar : bſ : : ct : mu; in ſecondo luogo ſarà
$\frac{a}{r} : \frac{b}{ſ} :: \frac{c}{t} : \frac{m}{u}$.

Dimoſtrazione.

Poichè per la fatta ipoteſi è
a : b : : c : m, e
r : ſ : : t : u; perciò (per la Propoſ. 1.) ſarà
am = bc, e
ru = ſt; conſeguentemente moltiplicando am per ru, e bc per ſt, (per l'Aſſiom. 4.) ſarà
amru = bcſt; e diſciogliendo (per il Coroll. 1. della Propoſ. 2.) ſi avrà
ar : bſ : : ct : mu. Il che era in primo luogo da dimoſtrarſi.

Se l'equazione
am = bc ſi divida per l'equazione
ru = ſt, (per l'Aſſiom. 5.) ſarà
$\frac{am}{ru} = \frac{bc}{ſt}$; e diſciogliendo ſarà
$\frac{a}{r} : \frac{b}{ſ} : : \frac{c}{t} : \frac{m}{u}$. Il che era in ſecondo luogo da dimoſtrarſi.

PRO-

PROPOSIZIONE TERZADECIMA.

Teorema.

Tutti quattro termini proporzionali, le potenze eguali, e le radici eguali de' medesimi termini saranno altresì proporzionali.

Primieramente sia
a : b : : c : m, sarà
$a^2 : b^2 :: c^2 : m^2$; parimenti sarà
$a^3 : b^3 :: c^3 : m^3$, e così in seguito.

Dimostrazione.

Imperciocchè se la proporzione
a : b : : c : m scrivasi due volte, e si moltiplichino tra di loro i termini corrispondenti; (per la Propos. preced.) si avrà
$a^2 : b^2 :: c^2 : m^2$; che se i termini di questa proporzione si moltiplichino per i termini corrispondenti della data proporzione
a : b : : c : m, si farà
$a^3 : b^3 :: c^3 : m^3$; e così andando innanzi si avrà
$a^4 : b^4 :: c^4 : m^4$.

In secondo luogo se sarà
$a^2 : b^2 :: c^2 : m^2$, ovvero
$a^3 : b^3 :: c^3 : m^3$, sarà parimenti
a : b : : c : m.

Dimostrazione.

Poichè per la fatta ipotesi è
$a^2 : b^2 :: c^2 : m^2$; (per la Propos. 11.) sarà
$a^2 m^2 = b^2 c^2$; per conseguenza estraendo la radice quadrata (Arim. 182.), sarà
$am = bc$; e disciogliendo (per il Coroll. 1. della Prop. 2.) si avrà
a : b : : c : m. Collo stesso raziocinio se sarà
$a^3 : b^3 :: c^3 : m^3$, si dimostrerà essere
a : b : : c : m; e così dell'altre. Il che era da dimostrarsi.

PRO-

PROPOSIZIONE QUARTADECIMA.

Teorema.

Due qualfivoglia frazioni ſarannno tra di loro in ragione compoſta dalla diretta ragione de' numeratori, e dalla ragione inverſa, o reciproca de' denominatori. Cioè ſarà la prima frazione alla ſeconda, come il prodotto del numerator della prima nel denominator della ſeconda frazione al prodotto del numerator della ſeconda frazione nel denominator della prima.

Sieno due qualfivoglia frazioni, per eſempio $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{m}$, ſarà

$\frac{a}{c} : \frac{b}{m} :: am : bc$.

Dimoſtrazione.

Imperciocchè ſe ſi moltiplichi il primo termine $\frac{a}{c}$ per il quarto bc, il prodotto (Aritm. 134.) ſarà $\frac{abc}{c}$, cioè (Aritm. 123.) ſarà ab. Similmente moltiplicando il ſecondo termine $\frac{b}{m}$ per il terzo am, il prodotto ſarà parimenti $\frac{abm}{m}$, cioè ab. Dunque i quattro predetti termini (per la Propoſ. 2.) ſaranno proporzionali, cioè $\frac{a}{c} : \frac{b}{m} :: am : bc$. Ma la ragione am : bc (per il Coroll. 3. della Defin. 6.) è compoſta dalle due ragioni a : b, ed m : c, la prima delle quali a : b è la ragion diretta de' numeratori a, e b; la ſeconda poi m : c è la ragione inverſa della ragione c : m dei denominatori c, ed m : (per la Defin. 5.). Dunque le date frazioni $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{m}$ ſono tra di loro in ragione compoſta dalla diretta ragione de' numeratori, e dalla ragione reciproca dei denominatori. Il che era da dimoſtrarſi.

PROPOSIZIONE QUINTADECIMA.

Teorema.

Le Frazioni del medeſimo nome ſono tra di loro in ragion diretta de' numeratori.

Le Frazioni poi, che hanno il medeſimo numeratore, ſono tra di loro in ragione reciproca dei denominatori.

Primieramente ſieno le frazioni del medeſimo denominatore $\frac{a}{m}$, $\frac{c}{m}$; ſarà $\frac{a}{m} : \frac{c}{m} :: a : c$.

Di-

Dimostrazione.

Imperciocchè (per la Propos. anteced.) è $\frac{a}{m} : \frac{c}{m} :: am : cm$; e dividendo il terzo, e il quarto termine per m, (per la Propos. 10.) sarà $\frac{a}{m} : \frac{c}{m} :: a : c$. Il che era in primo luogo da dimostrarsi.

In secondo luogo fatte le frazioni $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{m}$ del medesimo numeratore a, sarà

$\frac{a}{c} : \frac{a}{m} :: m : c$.

Dimostrazione.

Avvegnacchè (per la Propos. preced.) è $\frac{a}{c} : \frac{a}{m} :: am : ac$; e dividendo per a i due ultimi termini, (per la Propos. 10.) si avrà $\frac{a}{c} : \frac{a}{m} :: m : c$; cioè la prima frazione alla seconda reciprocamente, come il denominator della seconda al denominator della prima, Ciò che aveasi a dimostrare in secondo luogo.

Corollario Primo.

Quindi se le due quantità ineguali a, e c si dividano per la medesima quantità m, i quozienti $\frac{a}{m}$, e $\frac{c}{m}$ saranno tra di loro in ragione delle date quantità a, e c, perchè, siccome si è dimostrato, e $\frac{a}{m} : \frac{c}{m} :: a : c$; cioè la metà di qualsivoglia quantità è alla metà d'un'altra quantità, come la prima quantità alla seconda; parimenti la terza parte della prima alla terza della seconda quantità, come la prima alla seconda; e così in seguito.

Questa è la Proposizione 15. del Libro 5. di Euclide.

Corollario Secondo.

Che se la medesima quantità a si divida per le due ineguali quantità c, ed m, i quozienti $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{m}$ saranno tra di loro in ragione reciproca de' divisori c, ed m; perchè, siccome si è dimostrato, è $\frac{a}{c} : \frac{a}{m} :: m : c$; cioè il primo quoziente è al secondo reciprocamente, come il secondo divisore al primo divisore.

Così dividendo il numero 42 per i numeri 2, e 6, sarà $\frac{42}{2} : \frac{42}{6} :: 6 : 2$, cioè 21 : 7 :: 6 : 2.

PROPOSIZIONE SESTADECIMA.

Teorema.

Se vi saranno quantità del medesimo genere quante si vogliano, allora la ragione della prima all'ultima sarà composta da tutte le ragioni intermedie; cioè dalla ragione della prima alla seconda, della seconda alla terza, della terza alla quarta, ecc.

Sieno le quantità omogenee a, b, c, m, f, t, r, ecc; dico, che la ragione a : r è composta da tutte le ragioni intermedie
a : b,
b : c,
c : m,
m : f,
f : t,
t : r.

Dimostrazione.

Delle ragioni intermedie
a : b,
b : c,
c : m,
m : f,
f : t,
t : r
si moltiplichino gli antecedenti
a, b, c, m, f, t
tra di loro, e i conseguenti
b, c, m, f, t, r
parimenti tra di loro, i prodotti
abcmft, e
bcmftr (per il Coroll. 3. della Defin. 6.) formeranno la ragione
abcmft : bcmftr :: a : r,
perchè il prodotto degli estremi
abcmft × r
uguaglia il prodotto de' medj
bcmftr × a;
dunque la ragione della prima quantità a all'ultima r è composta da tutte le ragioni intermedie
a : b,
b : c,
c : m, ecc. Il che era da dimostrarsi.

Sieno i numeri
48, 24, 6, 24, 4, 2, 16, 8, ecc.

la ra-

la ragione del primo 48 all'ultimo 8 sarà composta da tutte le ragioni intermedie

48 : 12,
12 : 6,
6 : 24,
24 : 4,
4 : 2,
2 : 16,
16 : 8,

perchè se gli esponenti, o valori

$\frac{48}{12}$, $\frac{12}{6}$, $\frac{6}{24}$, $\frac{24}{4}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{2}{16}$, $\frac{16}{8}$, cioè

4, 2, $\frac{1}{4}$, 6, 2, $\frac{1}{2}$, 2 si moltiplichino tra di loro, il prodotto sarà $4 \times 2 \times \frac{1}{4} \times 6 \times 2 \times \frac{1}{2} \times 2$, cioè $\frac{96}{16}$, vale a dire 6; e l'esponente della ragione

48 : 8 è parimenti $\frac{48}{8}$, cioè 6; e perciò (per la Definiz. 6.) questa ragione da quelle è composta.

Scolio.

Questa Propozizione tanto utile a' Geometri, gli antichi Teone, Endocio, e Vitellione la dimostrarono soltanto ne' numeri; ma il Rev. Padre Andrea Taquet della Compagnia di Gesù, Soggetto non mai abbastanza lodato, primo di tutti diede la dimostrazione universale di questa Propozizione al numero 12. della 3. Parte del 5. Libro del suo Euclide.

Corollario.

Dunque qualsivoglia data ragione a : b può esser divisa in quante ragioni si vogliono; imperciocchè se tra l'antecedente a, e il conseguente b si frappongano quante grandezze piacciono omogenee alle quantità a, e b, allora, per la Dimostrazion precedente, la ragione a : b sarà composta da tutte le ragioni intermedie; per conseguenza sarà divisa in altrettante ragioni, quante saranno le ragioni intermedie, dalle quali è composta: come data la ragione 6 : 2, se tra 6, e 2 si frappongano i numeri 5, 4, 7, perchè (per la Dimostr. preced.) dati i numeri 6, 5, 4, 7, 2, la ragion del primo 6 all'ultimo 2 è composta da tutte le ragioni intermedie

6 : 5,
5 : 4,
4 : 7,
7 : 2;

perciò la ragione
6 : 2 sarà divisa nelle quattro predette ragioni, come da se è manifesto.

PROPOSIZIONE DICIASETTESIMA.

Teorema.

In ogni progressione Geometrica la ragione del primo termine al terzo è quadrata, o duplicata della ragione del primo al secondo; la ragione del primo al quarto è triplicata della ragione del primo al secondo; la ragione del primo al quinto è quadruplicata della ragione del primo al secondo; e così in seguito.

Sia la progressione Geometrica
a : b : : m : f : : r ;
sarà
a : c : : a² : b²,
come già abbiamo dimostrato nel Corollario 4. della Proposizione 2.
Parimenti sarà
a : m : : a³ : b³; e
a : f : : a⁴ : b⁴, ecc.

Dimostrazione.

Imperciocchè (per la Prop. preced.) la ragione a : m è composta da tre ragioni intermedie a : b, b : c, c : m, le quali (per la fatta ipotesi) sono tra di loro eguali; per conseguenza (per il Coroll. 1. della Defin. 7.) la ragione a : m sarà triplicata di ciascuna delle medesime ragioni; sarà adunque
a : m : : a³ : b³ (per il Coroll. 2. della Defin. 7.).

Col medesimo raziocinio si mostra che la ragione a : f è quadruplicata della ragione a : b, essendo composta la ragione a : f (per la Propos. preced.) delle quattro ragioni intermedie a : b, b : c, c : m, m : f eguali tra di loro per l' ipotesi fatta; perciò (per la Defin. 7., e per i Coroll. 1. e 2.) sarà
a : f : : a⁴ : b⁴.

Similmente la ragione a : r, cioè del primo al sesto, si dimostra quintuplicata della ragione a : b, e così andando innanzi in infinito. Il che era da dimostrarsi.

Corollario.

Per conseguenza la ragione a : b, cioè del primo al secondo, (per il Coroll. 3. della Defin. 7.) è subduplicata della ragione a : c, cioè del primo al terzo; subtriplicata della ragione a : m, cioè del primo al quarto, e così in seguito.

PRO-

PROPOSIZIONE DICIOTTESIMA.

Teorema.

In ogni progressione Geometrica il prodotto degli estremi uguaglia il prodotto de' termini egualmente distanti da' medesimi estremi; ed è uguale al quadrato del termine medio, quando il numero de' termini è dispari.

Dimostrazione.

Sia qualvoglia progressione Geometrica
$\div a . aa : ac^2 : ac^3 : ac^4 : ac^5 : ac^6 : ac^7$, ecc. sarà
$a \times ac^6 = ac \times ac^6 = ac^2 \times ac^5 = ac^3 \times ac^4$, cioè
$= a^2c^7$, come è evidente.

Parimenti data la progressione
$\div ac^2 : ac^3 : ac^4 : ac^5 : ac^6$ ecc., sarà
$ac^2 \times ac^4 = ac^3 \times ac^5 = a^2c^8$ quadrato del termine medio ac^6, come da se è manifesto.

PROPOSIZIONE DICIANNOVESIMA.

Teorema.

Dati il denominator della ragione, e i termini massimo, e minimo d'una progressione Geometrica, ritrovare la somma di tutti i termini.

Risoluzione.

Dal massimo termine sottraggasi il minimo, e il residuo si divida per il denominator della ragione diminuito d'una unità, e al quoziente si aggiunga il termine massimo, e si avrà la ricercata somma di tutt'i termini.

Dimostrazione.

Sieno della progressione Geometrica il minimo termine a, il massimo ac^3, e il denominatore c; il termine minimo a si sottragga dal massimo ac^3, e il residuo $ac^3 - a$ dividasi per il denominatore c diminuito d'una unità, cioè per $c - 1$, e (Arism. 75. 76.) si ritroverà il quoziente
$ac^2 + ac + a$,
al quale aggiungasi il termine massimo ac^3, e sarà
$ac^3 + ac^2 + ac + a$
la ricercata somma di tutti i termini della progressione
$\div a : ac : ac^2 : ac^3$.

Sia la progressione $\div 3 : 9 : 27 : 81 : 243$,

la somma di tutti i termini sarà $\frac{243 - 3 \pm 243}{3 - 1}$, cioè $\frac{240}{2} \pm 243$, vale a dire sarà 363.

Similmente della progressione

$\pm$ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 la somma sarà

$\frac{64-1}{2-1} \pm 64$, cioè $\frac{63}{1} \pm 64$.

Definizione Duodecima.

Quando due quantità omogenee si paragonano tra di loro, e si considera la differenza tra la prima, e la seconda, allora quel paragone dicesi *Ragione Aritmetica*.

Come a : a $\pm$ m è una ragione aritmetica, in cui il secondo termine a $\pm$ m eccede il primo a per la quantità m.

Similmente 9 : 5 sarà una ragione aritmetica, se si consideri che il numero 9 eccede il numero 5 per quattro unità.

Eguali chiamansi quelle *ragioni aritmetiche*, che hanno differenze eguali; cioè gli antecedenti delle quali egualmente superano i loro conseguenti, o egualmente dai conseguenti discadono.

Così le ragioni 8 : 5, e 12 : 9 sono eguali, perchè è 8 — 5 = 12 — 9.

Similmente sono ragioni aritmetiche eguali

a : a $\pm$ m, e

b : b $\pm$ m, perchè gli antecedenti a, e b per la medesima quantità m egualmente discadono da loro conseguenti a $\pm$ m, e b $\pm$ m.

Paragonando tra di loro due ragioni Aritmetiche eguali, si forma la *Proporzione Aritmetica*.

Così 8 : 5 è come 12 : 9, la quale così scrivesi

8 : 5 ∴ 12 : 9; e chiamasi *Discreta* quando il secondo termine non è eguale al terzo.

Proporzione poi *Aritmetica continua* dicesi quando il primo termine è al secondo, come il secondo al terzo; la quale s' indica con questo segno ÷

Come ÷ 2 : 5 : 8, ovvero

÷ a : a $\pm$ c : a $\pm$ 2c.

La serie poi delle quantità, che crescono, o calano secondo la medesima differenza, chiamasi *Progressione Aritmetica*; come la progressione

÷ 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9 : 10, ecc.,

la quale dicesi serie de' numeri naturali; oppure

÷ 1 : 4 : 7 : 10 : 13 : 16 : 19 : 22, ecc.

Parimenti

÷ a : a $\pm$ c : a $\pm$ 2c : a $\pm$ 3c : a $\pm$ 4c, ecc., ovvero

÷ a : a — c : a — 2c : a — 3c : a — 4c : a — 5c, ecc., o

÷ 8 : 5 : 2 : — 1 : — 4 : — 7 : — 10, ecc.

PRO-

PROPOSIZIONE VENTESIMA.

Teorema.

Nella proporzione aritmetica la somma degli estremi uguaglia la somma de' medj: ed è dupla del termine medio nella proporzione continua.

Dimostrazione.

Imperciocchè data la proporzione aritmetica
a : a ± m ∴ c : c ± m, è evidente che la somma degli estremi
a ± c ± m è uguale alla somma de' medj a ± m ± c.

Similmente se sarà
c : a — m ∴ b : b — m, sarà
a ± b — m = a — m ± b, come chiaramente apparisce.

Se poi la proporzione sarà continua
± a : a ± m : a ± 2 m, la somma degli estremi
a ± a ± 2m, cioè
2a ± 2m sarà dupla del termine medio
a ± m, come è evidente.

Sia 12 : 7 ∴ 20 : 15, sarà
12 ± 15 = 20 ± 7.

E se sarà
± 5 : 8 : 11, si avrà
5 ± 11 duplo del medio 8.

Corollario.

Dunque dati tre termini d'una proporzione aritmetica, si ritroverà il quarto, se dalla somma del secondo col terzo si sottragga il primo termine; perchè, conforme a quanto si è dimostrato, la somma del secondo col terzo eguaglia la somma del primo col quarto.

Come dati i tre termini
a : a ± c ∴ m, il quarto proporzionale sarà
a ± c ± m — a, cioè m ± c.

Se poi dati due termini si ricerchi il terzo continuamente proporzionale, dal duplo del secondo si sottragga il primo, il residuo sarà il termine ricercato.

Come dati i due termini
± a : a ± m, il terzo continuamente proporzionale sarà
2a ± 2m — a, cioè a ± 2m.

Finalmente il medio proporzionale si ottiene prendendo la metà della somma del primo coll'ultimo.

Così tra i due numeri 12, e 18, il medio aritmeticamente proporzionale sarà $\frac{12 \pm 18}{2}$, cioè $\frac{30}{2}$, vale a dire 15;

Imperciocchè è
± 12 : 15 : 18.

PRO-

PROPOSIZIONE VENTESIMAPRIMA.

Teorema.

In ogni progressione aritmetica la somma degli estremi è uguale alla somma de' termini dagli estremi egualmente distanti; ed è dupla del termine medio, quando il numero de' termini è impari.

Come nella progressione

$\div a : a + c : a + 2c : a + 3c : a + 4c : a + 5c$ è

$a + a + 5c = a + c + a + 4c = a + 2c + a + 3c = 2a + 5c$; e nella progressione

$\div a : a + c : a + 2c : a + 3c : a + 4c$ è

$a + a + 4c = a + c + a + 3c = 2a + 4c$ duplo del termine medio $a + 2c$.

Sia $\div 1 : 4 : 7 : 10 : 13 : 16 : 19$, sarà

$1 + 19 = 4 + 16 = 7 + 13 = 10 \times 2$.

Similmente data la progressione aritmetica

$\div 9 : 7 : 5 : 3 : 1 : -1 : -3 : -5$, ecc; sarà

$9 - 5 = 7 - 3 = 5 - 1 = 3 + 1$.

Corollario.

Dati il primo termine, e l'ultimo, e il numero de' termini della progressione, si ritroverà la somma di tutti i termini, se la somma del primo coll'ultimo si moltiplichi per il numero de' termini, e il prodotto si divida per il numero 2.

Come della progressione

$\div a : a + m : a + 2m : a + 3m : a + 4m$ il numero de' termini è 5, e la somma del primo coll'ultimo è $2a + 4m$; la somma di tutti i termini sarà

$\frac{2a + 4m \times 5}{2}$, cioè $\frac{10a + 20m}{2}$, vale a dire sarà

$5a + 10m$, come è evidente.

Parimenti della progressione

$\div 1 : 5 : 9 : 13 : 17 : 21$, la somma sarà

$\frac{22 \times 6}{2} = \frac{132}{2} = 66$. E della progressione

$\div 7 : 5 : 3 : 1 : -1 : -3 : -5$, la somma sarà

$\frac{7 - 5 \times 7}{2} = \frac{2 \times 7}{2} = 7$;

imperciocchè è $7 + 5 + 3 + 1 - 1 - 3 - 5 = 7$.

Oltre a ciò se dal massimo termine si sottragga il minimo, e il residuo dividasi per il numero de' termini diminuito d'una unità, il quoziente darà la differenza. Come nella progressione

$\div 9 : 7 : 5 : 3 : 1 : -1 : -3 : -5$, sottraendo il minimo -5 dal massimo 9 (Arit. 53. 53.) e dividendo il residuo 14 per il numero de' termini diminuito d'una unità, cioè per $8 - 1$, vale a dire per 7, il quoziente $\frac{14}{7}$, cioè 2, sarà la differenza ricercata.

DEGLI ELEMENTI DELLA GEOMETRIA

LIBRO SECONDO.

Definizione Prima.

Corpo, o *Solido*, dicesi quella quantità, che ha una trina dimensione, cioè lunghezza, larghezza, e profondità, o sia altezza. Fig. I. Tav. I.

Definizione Seconda.

La *Superficie* è una quantità, che ha lunghezza, e larghezza senza profondità; vale a dire è l'estremità del corpo estesa in lungo, e largo senza grossezza alcuna. Fig. II. Tav. I.

Definizione Terza.

La *Linea* è una quantità, che ha lunghezza solamente senza larghezza, e senza grossezza; ovvero è l'estremità della superficie estesa in lungo senza larghezza. Fig. III. Tav. I.

Definizione Quarta.

Il *Punto Geometrico* è un segno nella quantità continua, che dalla nostra mente si concepisce senza alcuna estensione; vale a dire è l'estremità, o il termine della linea senza estensione; ovvero è il segno della division della linea in due parti. Fig. IV. Tav. I.

Scolio.

Si rileva che la Linea è prodotta dal flusso, o scorrere del punto; la Superficie da quel della linea; e il Corpo da quello della superficie.

Definizione Quinta.

La *Linea Retta* è la più breve tra tutte le linee, che possono tirarsi da un punto a un altro. E *Linea Curva* dicesi quella, che non è la più breve tra tutte quelle, che possono esser tirate da uno a un altro punto. Fig. V. e VI. Tav. I.

Corollario.

Dunque una sola linea retta può esser tirata da uno a un altro punto; cioè tra due dati punti non possono esser tirate due, o più linee rette. Per conseguenza se i termini d' una linea retta saranno posti

posti sopra i termini d'un'altra retta linea, necessariamente quelle due linee rette saranno eguali, ed una cadrà perfettamente sopra l'altra.

Definizione Sesta.

Superficie Piana, o *Piano* è quello, alle di cui parti tutte può adattarsi la linea retta.

Fig. VII. Tav. I. Quella Superficie poi, sopra di cui non si può adattare la linea retta per ogni parte, dicesi *Superficie Curva*; la quale si appella *Superficie Convessa* quando è la superficie esteriore d'un corpo rotondo: siccome quando è l'interna superficie d'un corpo rotondo si chiama *Concava*.

Definizione Settima.

Fig. VIII. Tav. I. *Angolo Piano* è l'inclinazione di due linee, che scambievolmente si toccano sul medesimo piano, e che non stanno a giacere dirittamente.

Il Punto del concorso delle linee, dove si forma l'angolo, dicesi *Vertice*, o *Cima* dell'angolo; e le linee, che formano l'angolo, chiamansi *Lati*, o *Gambe* dell'angolo medesimo.

Dicesi *Angolo Piano Rettilineo* quello, ch'è formato da due linee rette.

Chiamasi *Angolo Curvilineo*, quando è composto di due linee curve: E si dice *Angolo Misti-lineo*, qualor ha una linea retta, e una curva.

Fig. IX. Tav. I. Laonde l'inclinazione d'una verso l'altra delle due linee rette AB, AC, che scambievolmente si toccano nel punto A, è un Angolo piano rettilineo.

Fig. X. Tav. I. L'inclinazione delle curve FE, LE, che a vicenda si toccano nel punto E, è un Angolo curvilineo.

Fig. XI. Tav. I. L'Angolo poi formato dalla retta BM, e dalla curva BC, è mistilineo.

Qualsivoglia Angolo piano è denotato da tre lettere dell'Alfabeto,

Fig. IX. Tav. I. delle quali quella, che è nel mezzo, denota il vertice dell'angolo; come l'Angolo formato dalle linee AB, AC, chiamasi l'Angolo CAB, ovvero BAC.

S'indica ancora l'Angolo piano colla lettera posta presso il vertice dell'angolo, quando concorrono soltanto due linee al punto medesimo. Così il detto Angolo CAB, si chiama ancora l'Angolo A.

Inoltre l'Angolo piano è denotato ancora dalla picciola lettera po-

Fig. XII. Tav. I. sta nel vertice dell'angolo tra i due lati dell'angolo medesimo. Come l'Angolo ACL compreso dalle linee AC, e LC, è indicato dalla lettera x; e l'angolo BCA è denotato dalla lettera m.

Corollario.

Poichè l'Angolo piano consiste nella sola inclinazione delle linee,

Fig. XIII. Tav. I. che scambievolmente si toccano, perciò la maggior, o minor lunghezza delle linee non accresce l'Angolo, nè lo diminuisce.

Così

Così non si muta l'Angolo CAB, quantunque i lati AB, AC, verso B, e C indefinitamente si estendano.

Definizione Ottava.

Una linea retta cadendo sopra un'altra retta, forma due angoli, che da' Latini chiamansi *Angoli deinceps positi*, oppure *Angoli consequenti*, quali sono i due angoli m, e x, ovvero i due ABC, ABL. Fig. XIV. Tav. I.

Definizione Nona.

Quando una linea retta (AB) cadendo sopra un'altra retta (CL) non si piega più verso una parte, che verso l'altra, e perciò gli angoli conseguenti (ABC, ABL) sono eguali, allora ambidue gli angoli uguali chiamansi *Retti*; e la linea (AB), che sta sopra l'altra, dicesi *Linea Perpendicolare*, o *Normale*, o *Perpendicolo*. Fig. XV. Tav. I.

Corollario.

Dunque sopra la retta CL, e dal punto A in B può esser tirata la sola retta perpendicolare BA, perchè nella sola positura BA la linea non si piega più verso una parte, che verso l'altra.

Definizione Decima.

Quando una linea retta (AC) stando appoggiata sopra un'altra retta (BL) si piega più verso una parte, che verso l'altra, e perciò forma gli angoli conseguenti (m; e x) ineguali, la stessa retta (AC), che sta sopra all'altra (BL), dicesi *Linea Obliqua*; e quello degli angoli ineguali (ACB, ovvero m), che è maggiore del retto, si chiama *Angolo Ottuso*; quello poi (ACL, o x), che è minore del retto, dicesi *Angolo Acuto*. Fig. XVI. Tav. I.

Corollario.

Per conseguenza quello è angolo retto, che dall'altra parte, se si estenda un lato, ha l'Angolo conseguente uguale.

Angolo ottuso è quello, un di cui lato esteso forma l'angolo conseguente di se minore.

Angolo acuto poi è quello, un di cui lato esteso dall'altra parte, forma l'angolo conseguente maggior di se stesso.

Definizione Undecima.

Linee parallele, o *equidistanti* diconsi quelle, che esistendo sul medesimo piano, conservano sempre tra di se la medesima distanza: di

modo che quantunque dall'una, e dall'altra parte si estendano in indefinito, non mai però si congiungeranno.

Come se si concepisca che la retta terminata AB si muova, o scorra perpendicolarmente sopra CL, il di lei ultimo punto A descriverà la linea AAM paralella, ovvero equidistante alla retta CL.

Fig. XVII. Tav. I.

Per conseguenza quando le linee perpendicolari interposte tra due linee sono eguali tra di se, allora quelle due rette sono paralelle, o equidistanti.

E vicendevolmente quando due linee sono paralelle, le perpendicolari poste in mezzo ad esse saranno tra di loro eguali.

Definizione Duodecima.

Fig. XVIII. Tav. I. *Figura* è uno spazio chiuso per ogni parte da uno, o più termini.

Definizione Terzadecima.

Fig. XIX. Tav. I. *Figura Piana* è una superficie piana, che è terminata per ogni parte da una, o da più linee.

Fig. XX. Tav. I. Quella *Figura piana*, che in ogni parte è chiusa da linee rette, dicesi *Rettilinea*.

Fig. XXI. Tav. I. Quella, che è terminata da linee curve, dicesi *Figura piana curvilinea*.

Fig. I. Tav. II. E quella poi, che in parte è circoscritta da linee curve, e in parte da linee rette, chiamasi *Figura piana mistilinea*.

I lati della Figura piana sono le linee, che terminano, e chiudono la figura.

Tutte le linee poi, che prese insieme terminano la figura, diconsi con parola Greca περιμετρος *Perimetro*, cioè *Circonferenza*, o *Circuito* della medesima figura.

Corollario.

Dunque due linee rette non possono formare una figura, perchè non possono chiudere lo spazio da ogni parte.

Definizione Quartadecima.

Figura Solida è lo spazio terminato per ogni parte da una sola, o da più superficie.

Scolio.

Quella parte della Geometria, in cui trattasi delle Figure piane, delle linee, e degli angoli descritti in un piano, chiamasi *Geometria Piana*.

Defi-

Definizione Quintadecima.

Circolo è una figura piana curvilinea terminata da una sola linea curva, ciascun punto della quale è distante egualmente dal punto medio.

Come se qualsivoglia linea retta (AC) si concepisca rivolgersi in un piano intorno all'uno, o all'altro suo estremo (C) fisso, e immobile, per tanto tempo (da A per B, D, E, F), sinchè ritorni al medesimo punto (A), o alla medesima positura (AC), donde era partita. Fig. II. Tav. II.

La Figura piana curvilinea (ABDFL) descritta dal fluſſo, o scorrere della medesima retta (AC), appellasi Circolo.

La linea curva (ABDEFGLA) descritta da una estremità (A) della retta girata intorno, dicesi *Circonferenza*, o *Periferia*, ovvero *Perimetro* del Circolo.

Le parti della circonferenza (come ABD, EF, AL, ecc.) diconsi *Archi del circolo*.

Il Punto medio (C) appellasi *Centro del circolo*.

Tutte le linee rette (CA, CB, CD, ecc.) terminate dal centro del circolo, e dalla periferia, chiamansi *Raggi*, ovvero *Semidiametri* del medesimo circolo, i quali tutti sono tra di loro uguali, come è evidente.

Definizione Sestadecima.

Diametro, o Dimeziente del circolo dicesi qualsivoglia retta, che passa pel centro del circolo, e che termina alla periferia dall'una, e dall'altra parte; come AB, che divide il circolo in due, cioè in due parti uguali; le quali chiamansi *Semicircoli*; per conseguenza il *Semicircolo* è una figura piana mistilinea terminata dal diametro, e dalla metà della periferia del circolo, come AFB, ovvero ABM. Fig. III. Tav. II.

Definizione Diciassettesima.

Corda del circolo dicesi qualsivoglia retta, che termina alla periferia dall'una, e dall'altra parte, ma che non passa pel centro del circolo, come AM. Ella divide il circolo in due parti ineguali, che diconsi *Segmenti, pezzi, o porzioni del circolo*. Fig. IV. Tav. II.

Laonde il *segmento, o la porzione d'un circolo* è una figura piana mistilinea compresa dall'arco, e dalla corda del circolo.

Il *Segmento maggiore* dicesi quello (ABM), in cui ritrovasi il centro del circolo; l'altro poi (AEM) chiamasi *Segmento minore*.

Definizione Diciottesima.

Figura trilatera rettilinea, o Triangolo rettilineo è una figura piana rettilinea terminata da tre lati, le di cui specie a cagione de' lati sono tre; cioè Fig. V. Tav. II.

Definizione Diciannovesima.

Fig. VI. Tav. II. Il *Triangolo Equilatero*, che ha tutti i lati uguali.

Definizione Ventesima.

Fig. VII. Tav. II. Il *Triangolo Isoscele*, che ha soltanto due lati eguali.

Definizione Ventesimaprima.

Fig. VIII. Tav. II. E il *Triangolo Scaleno*, il quale ha tutti i lati ineguali.

Scolio.

Le spezie de' Triangoli a cagione degli angoli sono parimenti tre, perchè, come abbiamo dimostrato, o tutti i tre angoli sono acuti, o uno è retto, o ottuso, e gli altri due acuti. Perciò

Definizione Ventesimaseconda.

Fig. IX. Tav. II. *Triangolo Rettangolo*, ovvero *Ortogonio*, è quello, che ha un angolo retto.

Definizione Ventesimaterza.

Fig. X. Tav. II. *Triangolo Ottusangolo*, ovvero *Ambligonio*, dicesi quello, che ha un angolo ottuso.

Definizione Ventesimaquarta.

Fig. XI. Tav. II. Il *Triangolo* poi *Acutangolo*, ovvero *Oxigonio*, ha tutti gli angoli acuti.

Definizione Ventesimaquinta.

In qualsivoglia triangolo rettangolo il lato opposto all'angolo retto chiamasi *Ipotenusa*, e gli altri due lati, che formano l'angolo retto, si appellano *Cateti*.

Scolio.

In qualsisia triangolo rettilineo sette cose sono da considerarsi, cioè i tre lati, i tre angoli, e lo stesso triangolo, vale a dire la superficie piana terminata da tre lati per ogni parte.

Oltre a ciò nominati due lati d'un triangolo, l'altro lato che resta chiamasi *Base* del medesimo triangolo: e la base del triangolo Isoscele è un lato ineguale.

Definizione Ventesimasesta.

La Figura piana rettilinea terminata per ogni parte da quattro linee

nee rette chiamasi *Figura Quadrilatera*, o *Figura Quadrangolare*, perchè ha parimenti quattro angoli. Fig.XII. Tav. II.

Definizione Ventesimasettima.

Paralellogramo è una figura quadrilatera, di cui i due lati opposti sono paralelli; e si dice *Rettangolo*, quando i di lui quattro angoli sono retti; Fig.XII. e XIII. Tav. II. Fig. XIV. Tav. II.

Dicesi poi *Obliquangolo* il paralellogramo, quando ha gli angoli obliqui.

Oltre a ciò chiamasi *Equilatero*, quando ha tutti i quattro lati tra di se eguali. Fig.XII. e XV. Tav. II.

Definizione Ventesimaottava.

Quadrato è un paralellogramo equilatero, e rettangolo. Fig.XII. Tav. II.

Definizione Ventesimanona.

Rombo è un paralellogramo equilatero, ed obliquangolo. Fig.XV. Tav. II.

Definizione Trentesima.

Figura in una parte più lunga, la quale anche dicesi *Rettangolo*, è un paralellogramo rettangolo, e non equilatero, ma che ha i due lati opposti eguali. Fig. XVI. Tav. II.

Definizione Trentesimaprima.

Romboide è un paralellogramo obliquangolo, e non equilatero, che ha però i due lati opposti tra di se uguali. Fig. XVII. Tav. II.

Definizione Trentesimaseconda.

Trapezio dicesi ogni altra figura quadrilatera, che non è paralellogramo. Fig. XVIII. Tav. II.

Definizione Trentesimaterza.

Le Figure piane rettilinee, che sono terminate in ogni parte da più di quattro lati, si dicono *Figure Moltilatere*, o *Moltangole*, o *Poligonie*.

E il *Poligono* compreso da cinque lati, chiamasi *Pentagono*; da sei, *Esagono*; da sette, *Ettagono*; da otto, *Ottagono*; da nove, *Enneagono*, ecc; e così dell'altre figure moltilatere, che sempre desumono il nome dal numero de' lati, o dal numero eguale degli angoli. Fig. XIX. Tav. II.

Definizione Trentesimaquarta.

Linea Diagonale di qualsifia figura è una linea retta dentro la figura tirata da qualsivoglia angolo all'altro angolo opposto; la qual linea nel paralellogramo chiamasi *Diametro* del paralellogramo. Fig.XX. Tav. II.

Defi-

Definizione Trentesimaquinta.

L'*Area* di qualsivoglia *Figura Piana* è la superficie, o sia lo spazio chiuso per ogni parte dal perimetro della medesima figura.

Come l'area d'un triangolo è la superficie terminata dai tre lati del medesimo triangolo. L'area d'un circolo è lo spazio compreso dalla periferia del medesimo circolo. E così dell'altre.

Fig. XXI. Tav. II.

Definizione Trentesimasesta.

Se qualsivoglia retta terminata AC si concepisca che perpendicolarmente si muova, o scorra sopra la retta terminata AB, e che in ogni sito AC, EF, GH, ecc. lasci vestigio di se stessa, finattantochè arrivi al sito BL, allora la retta AC descriverà il rettangolo ACLB.

Fig. XXII. Tav. II.

Il medesimo rettangolo AL si ottiene, se si concepisca che la retta AB scorra perpendicolarmente sopra tutta AC, e che in ogni sito lasci vestigio di se stessa. Laonde si comprende, che il rettangolo AL è composto da altrettante linee uguali della retta AC, quanti sono gli elementi, o punti, che formano la retta AB: oppur, che è lo stesso, si concepisce, che il rettangolo AL è composto da altrettante linee uguali della retta AB, quanti sono i punti che formano la retta AC.

Fig. XXII. Tav. II.

Quindi dicesi, che qualsivoglia *Rettangolo*, AL, *è fatto*, o *contenuto* dai due lati contigui, AB, AC. E il lato AB dicesi *Base*, e il perpendicolo AC chiamasi *Altezza* del medesimo *Rettangolo*.

Per la qual cosa si ritroverà l'area di qualsivoglia rettangolo, ABCF, moltiplicando la base AB per l'altezza BC. Imperciocchè se la base AB sarà di quattro oncie, o dita di lunghezza, e l'altezza BC di tre, moltiplicando 4 per 3, il prodotto 12 farà conoscere l'area, o la superficie del dato rettangolo AC.

Fig. I. Tav. III.

Se poi la base di qualsivoglia rettangolo chiamisi b, e l'altezza m, allora il prodotto bm significherà l'area del medesimo rettangolo.

Fig. II. Tav. III.

Quando la base AB è uguale all'altezza AC, allora il rettangolo AF da esse contenuto chiamasi quadrato della linea AB, ovvero della linea AC. E se la base AB sarà di cinque oncie di lunghezza, anche l'altezza AC conterrà cinque oncie di lunghezza; e il prodotto da 5 in 5, cioè 25, esprimerà l'area dello stesso quadrato.

Fig. III. Tav. III.

Se la base AB del quadrato chiamisi a, l'eguale altezza AC sarà parimenti a, e il prodotto aa, ovvero a^2 indicherà l'area del quadrato dalla linea AB, oppure AC.

Corollario.

Adunque una linea moltiplicata per un'altra linea, non produce una linea, ma una superficie. Come moltiplicando la linea BA d'oncie

Fig. IV. Tav. III.

cie quattro per la linea BC di tre oncie di lunghezza, il prodotto veramente è 12, ma non sono 12 oncie di lunghezza; imperciocchè, come è chiaro, sono dodici superficie quadrate, ciascuna delle quali ha una sola oncia di lunghezza, ed un'altra oncia di larghezza; e una tal picciola superficie quadrata appellasi *Oncia quadrata*.

Per la qual cosa le *Misure* altre sono *Lineari*, colle quali misuriamo le distanze de' luoghi; altre poi diconsi *Misure Superficiali*, con cui si misurano tutte le superficie.

Definizione Trentesimasettima.

Il Rettangolo ACFB contenuto dalle linee AB, AC, s'indica in tal guisa ABXAC. Fig. V. Tav. III.

Il quadrato poi della retta AB s'indica in tal maniera $\overline{AB}^2$.

Oltre a ciò se la linea E sarà eguale al lato AB del rettangolo ACFB, e la linea G sarà uguale al lato AC, allora il rettangolo AF dicesi che anche è contenuto dalle rette E, e G.

Similmente se la retta L sarà uguale al lato AB del quadrato ACFB, allora il medesimo quadrato si appellerà anche quadrato della retta L. Fig. VII. Tav. III.

Definizione Trentesimaottava.

L'Altezza di qualsivoglia *Figura rettilinea* è la perpendicolare tirata fino alla base dalla cima, o dal lato opposto alla base medesima, come AM. Fig. VI. Tav. III.

Postulato Primo.

Tirare una linea retta da un dato punto ad un altro punto.

Postulato Secondo.

Tirare in lungo una data retta linea terminata, in dritto, e indefinitamente.

Postulato Terzo.

Dato un centro, e un intervallo, o un raggio, descrivere un circolo.

Scolio.

Ai tredici Assiomi già dati nel Libro Secondo degli Elementi dell' Aritmetica Universale ai numeri 103. 104. ecc. si devono aggiungere i seguenti.

Assioma Quartodecimo.

Quelle cose, che scambievolmente soprapposte convengono, e si corrispondono, sono tra di loro uguali.

Come

Fig.VII. Tav.III. Come se il circolo A si ponga sopra al circolo B, e posto il centro del circolo A sopra il centro del circolo B, la circonferenza del circolo A perfettamente cada sopra la circonferenza del circolo B, allora i due circoli scambievolmente si corrisponderanno, e saranno tra di loro eguali, come da se è manifesto.

Similmente tutti i circoli, che hanno i raggi eguali, se vicendevolmente si pongano sopra, converranno, e saranno eguali, come dalla stessa Definizione del circolo chiaramente apparisce.

Oltre a ciò tutte le linee rette eguali scambievolmente soprapposte concorderanno.

Parimenti tutti gli angoli rettilinei eguali se a vicenda si pongano sopra l'uno all'altro, devono convenire; come si deduce immediatamente dalle definizioni quinta, e settima.

Assioma Quintodecimo.

Se un tutto sarà il duplo d'un altro tutto, e il tolto sarà il duplo del tolto, anche il restante sarà il duplo del restante.

Fig. VIII. Tav.III. Sia il numero 24 duplo del numero 12, e dal tutto 24 si tolga il numero 10 duplo del numero 5, il quale tolgasi dal tutto 12, anche il restante 24 — 10 sarà duplo del residuo 12 — 5: cioè il residuo 14 sarà duplo del residuo 7.

Assioma Sestodecimo.

Tutti gli angoli retti sono tra di se uguali.

Fig. IX. Tav.III. Sieno le rette AB, LG, perpendicolari alle rette CD, EF; gli angoli retti in B saranno eguali agli angoli retti in G. Imperciocchè se la retta CD si ponga sopra alla retta EF, cosicchè il punto B cada sopra il punto G, allora la perpendicolare BA necessariamente coincidera colla perpendicolare GL; altrimenti se di qua, o di là piegasse dalla perpendicolare GL, sarebbe obbliqua: il che è contro la fatta ipotesi; per conseguenza (Assiom. 14.) gli angoli retti in B sono eguali agli angoli retti in G, perchè convengono.

Assioma Decimosettimo.

Due lati di qualsivoglia triangolo rettilineo presi insieme sono maggiori del lato rimanente.

Fig. X. Tav.III. Come nel triangolo ABC è evidente, che due qualsivoglia lati, per esempio AB, BC, presi insieme sono maggiori, o più lunghi dell'altro lato AC. Il che è dimostrato da Euclide nella Proposizione 20. del Libro I.

Assioma Decimottavo.

Se dalle estremità (A, eC) d'un lato (AC) di qualsivoglia triangolo

golo rettilineo (ABC) si tirino due linee rette (AD, CD) a qualche punto (D) dentro lo stesso triangolo, le stesse prese insieme saranno minori degli altri due lati (AB, CB) del dato triangolo presi insieme. Cioè la strada da A per D a C è minore, che quella da A per B a C.

E' la prima parte della Proposizione 21 del Libro I. di Euclide.

PROPOSIZIONE PRIMA.

Problema.

Sopra una data linea retta terminata descrivere un triangolo equilatero.

Sia data la retta AC terminata dai punti A, e C, e sopra la medesima retta sia da descriversi un triangolo equilatero. Fig. XII. Tav. III.

Costruzione.

Dal centro A, e coll'intervallo, o col raggio AC (per il Postul. 3.) descrivasi il circolo CDF. Similmente dal centro C, e coll'intervallo medesimo CA descrivasi l'altro circolo ADE, la di cui periferia in qualche luogo taglierà la periferia dell'altro circolo, come nel punto D, dal quale ai punti A, e C si tirino due rette linee DA, DC (per il Postul. 1.). Dico il triangolo ADC essere equilatero.

Dimostrazione.

Le rette linee AD, AC sono raggi d'un medesimo circolo DFC, e perciò (per la Defin. 15.) è AD = AC. Similmente è CD = CA, perchè sono raggi d'un medesimo circolo AED; dunque (per l'assiom. 1.) sarà AD = DC, perchè ambedue si sono mostrate eguali alla medesima retta AC. Pertanto le tre rette AD, AC, CD, saranno eguali tra di loro; per conseguenza (per la definiz. 19.) il triangolo ADC sarà equilatero.

Dunque sopra una data retta terminata si è formato un triangolo equilatero. Il che era da farsi, e da dimostrare.

Questa è la Proposizione Prima del Lib. I. di Euclide.

PROPOSIZIONE SECONDA.

Problema.

Da un dato punto tirare una linea retta eguale a una data retta terminata.

Sia data la retta terminata AB, e dato sia il punto D, da cui si abbia a tirare una linea retta eguale alla data AB. Fig. XIII. Tav. III.

Costruzione.

Dal centro A, e nell'intervallo AB (per il Post. 3.) descrivasi il circolo BFE; dipoi dal punto D al punto A (per il Post. 1.) si tiri la retta DA. Sopra la retta DA (per la Propos. preced.) si costruisca il triangolo equilatero ACD, il di cui lato CA (per il Post. 2.) si allunghi fino alla periferia in F; dipoi dal centro C coll'intervallo CF (per il Post. 3.) descrivasi l'altro circolo FGL; finalmente si allunghi il lato CD fino alla periferia del circolo in L, sarà DL la linea ricercata.

Dimostrazione.

Il triangolo CDA per la costruzione è equilatero; dunque (per la Defin. 19.) sarà il lato CD = CA. Inoltre (per la Defin. 15.) è il raggio CL = CF, perchè (per la costr.) sono raggi del maggior circolo FGL; per tanto dalle linee eguali CL, CF, si tolgano le parti eguali CD, CA, e (per l'Assiom. 3.) resterà DL = AF; ma (per la Defin. 15,) è parimenti AB = AF, (imperciocchè sono raggi del circolo minore FBE); dunque (per l'Assiom. 1.) sarà DL = AB.

Per la qual cosa da un dato punto si è tirata una linea retta eguale a una data retta terminata. Il che era da farsi, e da dimostrare.

Questa è la Proposizione 2. del Lib. I. di Euclide.

PROPOSIZIONE TERZA.

Problema.

Date due linee rette ineguali, dalla maggiore tagliare una parte eguale alla minore.

Fig. XIV. Tav. III. Sieno date due rette ineguali AB maggiore, e CD minore; e dalla maggiore AB abbiasi a togliere una parte eguale alla minor CD.

Costruzione.

Dall'ultimo punto A della maggior AB (per la Propos. preced.) si tiri la retta AE eguale alla minor CD. Dipoi dal centro A, e col raggio AE (per il Postul. 3.) si descriva il circolo EFG, la di cui periferia in qualche luogo taglierà la linea AB (perchè questa è maggior di CD, o del raggio AE) come nel punto F. Dico AF essere la porzion ricercata eguale alla minor CD.

Dimostrazione.

Tutti i raggi d'un medesimo circolo (per la Defin. 15.) sono tra di lo-

di loro eguali; perciò sarà il raggio AF = AE; ma (per la costruz.) è AE = CD; dunque (per l'Assiom. 1.) sarà AF = CD.

Per conseguenza dalla data retta maggiore si è tagliata una porzione eguale alla data retta minore. Il che si avea a dimostrare.

Questa è la Proposizione 3. del Libro I. di Euclide.

PROPOSIZIONE QUARTA.

Problema.

Date tre linee terminate, due delle quali in qualunque modo prese eccedano l'altra, sopra una d'esse costituire un triangolo, che abbia due lati eguali all'altre due date linee rette.

Sieno date tre rette linee GH, A, e C, due delle quali prese in ogni guisa sieno maggiori dell'altra (per l'Assiom. 17.), e sopra GH sia da descriversi un triangolo, i di cui due altri lati sieno eguali alle linee A, e C, ciascuno a ciascuna in particolare. Fig. I. Tav. IV.

Costruzione.

La retta terminata GH (per il Postul. 2.) dall'una, e dall'altra parte si allunghi verso E, ed F indefinitamente, dipoi (per la Propos. preced.) si taglino le parti GE uguale alla linea A, e HF uguale alla linea C. Indi dal centro G coll'intervallo GE (per il Postul. 3.) descrivasi il circolo ELM, e dal centro H col raggio HF descrivasi l'altro circolo LFK. Finalmente dal punto L, in cui le periferie si tagliano a vicenda, al punto G, ed H (per il Postul. 1.) si tirino le rette LG, LH, sarà LGH il triangolo ricercato.

Dimostrazione.

Il lato GL (per la Definiz. 15.) è uguale alla retta GE; ma la retta GE (per la costr.) è uguale alla retta A; dunque (per l'Assiom. 1.) farà il lato GL uguale alla retta A. Per la medesima ragione è HL = HF (per la Definiz. 15.), e HF = C (per la costruz.); e perciò (per l'Assiom. 1.) sarà il lato HL = alla retta C.

Per conseguenza sopra GH si è costituito il triangolo GLH, che ha gli altri due lati GL, LH eguali all'altre date rette linee A, C. Il che era da farsi, e da dimostrare.

Questa è la Proposizione 22. del Libro I. di Euclide.

Corollario.

Se tutte le tre date rette saranno eguali tra di loro, il descritto triangolo (per la Definiz. 20.) sarà equilatero; se due soltanto saranno Fig. I. II. e III. Tav. IV.

no eguali tra di loro, il triangolo (per la Definiz. 20.) sarà isoscele; se poi tutte tre saranno ineguali, il triangolo descritto (per la Definiz. 21.) sarà scaleno.

PROPOSIZIONE QUINTA.

Teorema.

Se un triangolo avrà due angoli eguali a due angoli d' un altro triangolo, e il lato posto tra i due angoli eguali sarà in ambidue eguale, l' angolo, e i lati, che restano, saranno altresì in ambidue eguali, e un triangolo sarà all' altro eguale.

Fig. IV. Fig. IV. I due triangoli ABC, EFM, abbiano l'angolo A eguale all' angolo E, l'angolo C eguale all'angolo M, e il lato frapposto AC eguale al lato frapposto EM, devesi mostrare che il lato AB sia uguale al lato EF, e il lato BC = FM; che l'angolo B sia eguale all'angolo F, e il triangolo ABC sia eguale al triangolo EFM.

Dimostrazione.

Si concepisca che il triangolo ABC talmente sia posto sopra al triangolo EFM, che il punto A cada sopra il punto E, il lato AC sopra l'egual lato EM; il punto C cadrà in M, e i due lati AC, EM eguali scambievolmente si combaccieranno (per il Coroll. della Definiz. 5.). Per l'ipotesi poi essendo l'angolo A eguale all' angolo E, il lato AB necessariamente cadrà sopra il lato EF. Similmente perchè l' angolo C è uguale all' angolo M, il lato CB cadrà sopra MF; per conseguenza il punto B comune ai due lati AB, CB, cadrà sopra il punto F comune ai due lati EF, FM, e il triangolo ABC perfettamente si combacierà col triangolo EFM; dunque (per l'Assiom. 14.) sarà il lato AB = EF, il lato BC = FM, l'angolo B eguale all'angolo F, e il triangolo, o sia l' area ABC sarà uguale all' area del triangolo EFM.

Laonde se un triangolo avrà due angoli ugnali a due angoli d'un altro triangolo, e il lato posto tra i due angoli eguali sarà in ambidue eguale, ogni altro lato, ed angolo in essi sarà pure eguale. Il che era da dimostrarsi.

Questa è la prima Parte della Propos. 26. del Libro I. di Euclide.

PROPOSIZIONE SESTA.

Teorema.

Se due triangoli avranno un angolo eguale ad un angolo, e se i lati, che formano gli angoli eguali, saranno eguali tra di loro gli uni agli altri, anche la base sarà eguale alla base, un triangolo sarà eguale all'altro, e gli altri due angoli saranno eguali agli altri due, a' quali si oppongono i lati uguali.

I due triangoli ADE, BCF, abbiano l' angolo A eguale all' angolo

golo B, il lato AD = BC, e il lato AE = BF; dico, che la base DE è uguale alla base CF, che il triangolo ADE è uguale al triangolo BCF, che l'angolo D è uguale all'angolo C, e l'angolo E uguale ad F, a'quali si oppongono i lati eguali. Fig. V. Tav. IV.

Dimostrazione.

Il triangolo ADE si ponga sopra al triangolo BCF in tal modo, che il punto A cada sopra il punto B, e il lato AD sopra il lato eguale BC, il punto D necessariamente cadrà in C, essendochè (per l'ipotesi) è il lato AD = BC. Oltre a ciò perchè l'angolo A (per l'ipotesi è uguale all'angolo B; perciò il lato AE cadrà sopra BF, e il punto E cadrà in F, perchè (per l'ipotesi) è il lato AE = BF; e perciò la retta DE (per il coroll. della Definiz. 5.) si combacierà colla retta CF (perchè già si è dimostrato, che i punti D, ed E, cadono in C, ed F); e il triangolo ADE si combacierà col triangolo BCF, l'angolo D coll'angolo C, e l'angolo E coll'angolo F; conseguentemente (per l'Assiom. 14.) farà la base DE uguale alla base CF, il triangolo ADE uguale al triangolo BCF, l'angolo D = C, e l'angolo E = F.

Dunque se due triangoli avranno ecc. Il che era da dimostrarsi.

Questa è la Proposizione 4. del Libro I. di Euclide.

PROPOSIZIONE SETTIMA.

Teorema.

Se due triangoli avranno due lati eguali a due lati, gli uni agli altri, e avranno l'angolo maggior dell'altro contenuto dai lati eguali, avranno anche la base maggior della base.

I due triangoli ABC, EFL, abbiano i lati AB = FE, i lati BC = EL, e l'angolo ABC maggior dell'angolo E; dico, che la base AC opposta all'angolo maggiore è maggior della base FL, che è opposta all'angolo minore. Fig. VI. Tav. IV.

Concepiscasi che il triangolo EFL talmente sia posto sopra il triangolo ABC, che il punto E cada in B, e il lato FE si estenda sopra il lato eguale BA, il punto F necessariamente cadrà in A per l'eguaglianza de' lati EF, BA.

Oltre a ciò, perchè per l'ipotesi l'angolo E è minore dell'angolo ABC, il lato EL cadrà di sotto BC, come in BR, e il lato FL cadrà in AR.

Dimostrazione.

Nel triangolo IBC (per l'Assiom. 17.) i due lati BI, IC, presi insieme, sono maggiori dell'altro che resta BC; ma (per l'ipotesi)

teſi) è il lato BC = EL, e (dalla coſtruzione) è il lato BR = EL; perciò (per l'Aſſiom. L) ſarà il lato BR = BC.

Per conſeguenza i due lati BI, IC, che ſi ſono moſtrati maggiori di BC, (per la ſeconda parte dell' Aſſiom. 1.) ſaranno anche maggiori di BR; ma (per l'Aſſiom. 11.) è BR = BI + IR; dunque i due lati BI, e IC, i quali, come ſi è dimoſtrato, ſono maggiori di BR (per la ſeconda parte dell' Aſſiom. 1.), ſaranno altresì maggiori dei due BI, e IR; e dalle ſomme ineguali BI + IC > BI + IR togliendo la parte comune BI (per l'Aſſiom. 7.), reſterà IC > IR, a' quali aggiungaſi la porzion comune IA, e (per l'Aſſiom. 6.) ſaranno le due rette IC, e IA maggiori delle due IR, IA, cioè IC + IA, vale a dire (per l'Aſſiom. 11.) tutta la retta AC ſarà maggiore delle due IR, IA; ma la due rette IR, IA, nel triangolo IAR (per l'Aſſiom. 17.) ſono maggiori dell'altra che reſta AR; dunque (per l'Aſſiom. 13.) anche la retta AC ſarà maggiore della retta AR: è poi per la coſtruzione AR = FL; e perciò (per la ſeconda parte dell' Aſſiom. 1.) ſarà parimenti AC maggior della retta FL.

Laonde ſe due triangoli avranno ecc. Il che era da dimoſtrarſi.

Queſta è la Propoſizione 24 del Libro I. di Euclide.

Scolio.

Quando il lato AB è maggior del lato BC, ovvero FE ſia maggior di EL, allora nella coſtruzion di queſta Propoſizione poſto il punto E in B, ſi eſtenda il lato EL ſopra il lato eguale BC, oppur, che è lo ſteſſo, ſi traſporti la lettera A in C, e C in A; parimenti F in L, ed L in F, acciò non ſuccedano caſi diverſi dal precedente, e non ſia d'uopo d'un'altra dimoſtrazione.

PROPOSIZIONE OTTAVA.

Teorema.

Se due triangoli avranno due lati eguali a due lati, l'uno all' altro; e la baſe maggior della baſe; avranno parimenti l' angolo maggior dell' altro contenuto dai lati eguali.

Fig. VII. Tav. IV. I due triangoli ABC, EFL abbiano i lati eguali AB = FE, BC = EL, e la baſe AC maggior della baſe FL, dico l' angolo B eſſer maggiore dell'angolo E.

Dimoſtrazione.

Imperciocchè ſe l'angolo B foſſe eguale all'angolo E, avvegnacchè (per l'ipoteſi) è BA = EF, e BC = EL, allora (per la Prop. 6.) anche la baſe AC ſarebbe uguale alla baſe FL: il che è contro l'ipote-

poteſi. Se poi l'angolo B foſſe minore dell' angolo E, allora (per la Propoſ. preced.) anche la baſe AC ſarebbe minore della baſe FL: il che parimenti è contro l'ipoteſi. Dunque l' angolo B ſarà maggiore dell'angolo E; perchè, ſiccome ſi è dimoſtrato, non può eſſer eguale, nè minore dell'angolo medeſimo.

Per la qual coſa ſe due triangoli ecc. Il che era da dimoſtrarſi.

Queſta è la Propoſizione 25. del Libro I. di Euclide.

PROPOSIZIONE NONA.

Teorema.

Se ciaſcun lato di due triangoli ſarà uguale a ciaſcun altro lato de' medeſimi, anche ciaſcun angolo ſarà uguale a ciaſcun altro degli ſteſſi, a cui ſi oppongono i lati eguali, e un triangolo ſarà all' altro eguale.

Sieno dati i due triangoli ACF, EBL, i quali abbiano il lato AC=BE, il lato CF=EL, e la baſe AF=BL, deveſi moſtrare che l'angolo C ſia eguale all'angolo E, l'angolo A=B, l'angolo F=L; e che il triangolo ACF ſia eguale al triangolo ELB. Fig. VIII. Tav. IV.

Dimoſtrazione.

Poichè i due lati AC, CF (per l'ipoteſi) ſono eguali ai due lati EB, EL, gli uni agli altri, ſe l'angolo C non foſſe uguale all' angolo E, ma o maggior, o minor dello ſteſſo, allora (per la Propoſ. 7.) anche la baſe AF ſarebbe maggior, o minore della baſe BL, il che è contro l'ipoteſi; dunque eſſendo la baſe AF eguale alla baſe BL, è neceſſario che l'angolo C ſia eguale all'angolo E; ma gli ſteſſi angoli C, ed E, dimoſtrati eguali, ſono contenuti da lati uguali; perciò (per la Propoſ. 6.) ſarà anche l' angolo A eguale all' angolo B, l'angolo F eguale all'angolo L, a' quali ſi oppongono i lati eguali; e il triangolo ACF ſarà eguale al triangolo EBL.

Dunque ſe ciaſcun lato ecc. Il che era da dimoſtrarſi.

Queſta è la Propoſizione 8. del Libro I. di Euclide.

PROPOSIZIONE DECIMA.

Problema.

Sopra una data retta linea indefinita, e a un punto dato in eſſa coſtituire un angolo rettilineo eguale a un dato angolo rettilineo.

Sia dato l'angolo rettilineo A, e data ſia la retta CE, e in eſſa il punto C; ſopra la retta CE, e nel punto C coſtituire un angolo rettilineo eguale al dato angolo A. Fig. IX. Tav. IV.

Co-

Costruzione.

Si tiri la retta FG, la quale unisca due qualsivoglia punti de' lati AF, AG. Dipoi dall'indefinita CE (per la Propos. 3.) si tagli la parte CI eguale al lato AG, e sopra CI (per la Propos. 4.) si descriva il triangolo CMI, il di cui lato CM sia eguale al lato AF, e il lato MI sia uguale al lato FG del triangolo AFG; MCI sarà l'angolo ricercato.

Dimostrazione.

I triangoli CMI, AFG (per la costruz.) hanno i lati CI=AG, CM=AF, ed MI=FG; dunque (per la Propos. preced. (sarà l' angolo MCI eguale al dato angolo A, a' quali si oppongono i lati eguali MI, FG.

Per tanto sopra una data retta linea ecc. Il che era da farsi, e da dimostrare.

Questa è la Proposizione 23. del Libro I. di Euclide.

PROPOSIZIONE UNDECIMA.

Problema.

Dividere un dato angolo rettilineo in due parti.

Fig. X. Tav. IV. L'angolo rettilineo CAB sia da dividersi in due parti, cioè in due angoli eguali.

Costruzione.

Nel lato AB si prenda qualsivoglia punto, per esempio F, e dall' altro lato AC indefinitamente allungato verso C (per la Propos. 3.) si tagli la parte AE eguale alla parte AF, e (per il Postul. 1.) si tiri la retta FE, sopra la quale (per la Propos. 1.) si descriva il triangolo equilatero EFL; dipoi dal punto L al punto A (per il Postul. 1.) si tiri la retta LA, la quale taglierà il dato angolo CAB in due parti, cioè in due angoli eguali CAL, LAB.

Dimostrazione.

I due triangoli AEL, ALF hanno il lato AL comune, il lato AE (per la costruz.) eguale al lato AF, e il lato FL (per la Definiz. 19.) eguale al lato LE; perciò (per la Propos. 9.) sarà l' angolo LAE uguale all'angolo LAF, a' quali si oppongono i lati eguali LE, LF. Ma i due angoli LAE, LAF (per l'Assiom. 11.) costituiscono tutto l'angolo dato CAB; dunque il dato angolo si è diviso in due parti. Il che era da dimostrarsi.

Questa è la Proposizione 9. del Libro I. di Euclide.

PRO-

PROPOSIZIONE DUODECIMA.

Problema.

Dividere in due parti una data retta linea terminata.

Sia data la retta AE terminata ne' punti A, ed E, la quale sia da dividersi in due parti tra di loro uguali. Fig. XI. Tav. IV.

Costruzione.

Sopra la data retta AE (per la Propos. 1.) descrivasi il triangolo equilatero ABE, dipoi (per la Propos. preced.) dividasi in due parti l'angolo ABE per la retta BC, la quale tagli la data AE in qualche punto C: dico, che la retta AE è divisa in due parti in C; cioè sarà AC=CE.

Dimostrazione.

I due triangoli ABC, BCE, hanno il lato BC comune, e il lato AB=BE (per la Definiz. 19.); oltre a ciò (per la costruz.) hanno l'angolo ABC contenuto dai lati AB, BC, eguale all'angolo CBE contenuto dai lati EB, BC; per conseguenza (per la Propos. 6.) avranno anche la base AC eguale alla base CE, le quali insieme (per l'Assiom. 11.) uguagliano tutta la base AE.

Dunque la data retta terminata è stata divisa in due parti. Il che era da farsi, e da dimostrare.

Questa è la Proposizione 10. del Libro I. di Euclide.

Corollario.

Oltre a ciò ne' triangoli ABC, BCE (per la Propos. 6.) sarà anche l'angolo ACB eguale all'angolo BCE, a' quali si oppongono i lati eguali AB, BE; ma i due angoli eguali BCA, BCE sono angoli conseguenti; e perciò (per la Definiz. 9.) saranno ambidue retti, e BC sarà perpendicolare alla retta AE; dunque la retta BC, che divide in due parti l'angolo ABE contenuto dai lati eguali AB, BE, non solo divide in due parti il lato AE opposto al medesimo angolo, ma è ancora perpendicolare al medesimo lato. Le quali cose tutte si verificano ancorchè il triangolo ABE non sia equilatero, ma isoscele, di cui i due lati tra di loro eguali sieno AB, e BE, perchè sarà la medesima dimostrazione.

PROPOSIZIONE TERZADECIMA.

Problema.

Su d'una data retta linea, e da un punto dato in essa alzare una linea perpendicolare.

Fig. XII. Tav. IV. Sia data la retta AB, ed in essa dato sia il punto C, da cui sia da alzarsi una retta linea perpendicolare alla data linea AB.

Costruzione.

Nella parte CA si segni un qualche punto E, e si avrà la retta terminata CE; dipoi dall'altra parte CB allungata indefinitamente (per la Propos. 3.) si tagli la parte CF=CE, e sopra tutta la linea EF si costituisca il triangolo equilatero ELF (per la Prop. 1.). Finalmente dal punto L al dato punto C (per il Postul. 1.) si tiri la retta LC, la quale sarà la perpendicolare ricercata.

Dimostrazione.

I due triangoli LCF, LCE hanno il lato CF=CE (per la costruz.), il lato CL comune, e il lato LF=LE (per la Defin. 19.); per la qual cosa (per la Propos. 9.) l'angolo LCF sarà eguale all'angolo LCE, a' quali si oppongono lati eguali; conseguentemente (per la Definiz. 9.) la retta LC sarà perpendicolare alla retta EF, o sia AB. Il che era da farsi, e da dimostrare.

Questa è la Proposizione 11. del Libro I. di Euclide.

Scolio.

Quando il dato punto è l'estremità della data linea, allora (per la Propos. 2.) la data retta si allunghi indefinitamente, e l'altre cose si facciano, come s'è detto.

PROPOSIZIONE QUARTADECIMA.

Problema.

A una data retta linea indefinita, e da un punto dato fuori di essa calare una linea perpendicolare.

Fig. XIII. Tav. IV. Sia data la retta indefinita AB, e fuori d'essa dato sia il punto C, da cui abbiasi a tirare una retta linea perpendicolare alla data AB.

Costruzione.

Da una parte della data linea AB si segni qualsivoglia punto L, e dal

dal centro C col raggio CL descrivasi un circolo, o l'arco ELF, il quale tagli la data retta AB in E, ed F; dipoi la sottoposta EF (per la Prop. 12.) dividasi in due parti in G, e (per il Postul. 1.) si tiri la retta CG, che sarà la perpendicolare ricercata. Vi si aggiungano i raggi CE, CF.

Dimostrazione.

I triangoli CGF, CGE hanno il lato comune CG, e (per la costr.) il lato GF = GE, il lato poi CF = CE (per la Definiz. 15.); perciò (per la Propos. 9.) sarà l'angolo CGF = CGE: per conseguenza (per la Definiz. 9.) la retta CG sarà perpendicolare alla retta EF, ovvero AB.

Dunque a una data retta ecc. Il che era da dimostrarsi.

Questa è la Proposizione 12. del Libro I. di Euclide.

PROPOSIZIONE QUINTADECIMA.

Teorema.

Una linea retta stando sopra ad un'altra retta forma due angoli consequenti, o retti, o eguali a due retti.

La retta linea AB stia sopra la retta CE, formerà i due angoli consequenti ABC, ABE, i quali (per la Defin. 9.) saranno ambidue retti, quando la retta AB cade perpendicolarmente sopra CE. Fig. I. Tav. V.

Se poi la retta AB cade obliquamente sopra CE, i due angoli obliqui ABC, ABE, presi insieme, saranno eguali a due retti. Fig. II. Tav. V.

Costruzione.

Sopra la retta CE, e dal punto in essa B (per la Propos. 11.) si alzi la perpendicolare FB.

Dimostrazione.

I due angoli FBC, FBE (per la Definiz. 9.) sono ambidue retti; l'angolo poi ottuso ABC eccede il retto FBC per l'angolo FBA, e l'angolo acuto ABE discade dal retto FBE per il medesimo angolo FBA: per la qual cosa dall'angolo ottuso ABC si tolga la parte FBA, resterà l'angolo retto FBC; all'angolo poi acuto ABE si aggiunga l'aggolo FBA tolto dall'ottuso, e (per l'Assiom. 11.) si formerà l'altro retto FBE; dunque i due angoli consequenti ABC, ABE presi insieme uguagliano due retti. Il che era da dimostrarsi.

Questa è la Proposizione 13. del Libro 1. di Euclide.

Corollario Primo.

Quindi tutti gli angoli CBF, FBA, ABE, ecc. che possono esser fatti nel punto B da quante linee si sieno, concorrenti dalla medesima parte della linea CE, presi insieme, sempre uguagliano due retti.

Corollario Secondo.

Fig. III. Tav. V. Oltre a ciò i quattro angoli, che sono fatti (in B) dalle due rette (AE, FC), le quali scambievolmente si tagliano (in B), saranno eguali a quattro angoli retti.

Corollario Terzo.

Conseguentemente se al medesimo punto B concorrono quante linee rette mai possono dall'una, e dall'altra parte della linea AE, Fig. IV. Tav. V. tutti gli angoli, che dalle stesse rette si formeranno in B, presi insieme, saranno eguali a quattro angoli retti.

PROPOSIZIONE SESTADECIMA.

Teorema.

Se a qualche punto in una data retta da parti opposte concorrano due linee rette, le quali formino due angoli conseguenti eguali a due retti, quelle due linee rette saranno poste direttamente, cioè comporranno una sola retta linea.

Sia la retta AC, e al punto in essa C da parti opposte sieno tirate le due rette BC, FC, le quali formino i due angoli conseguenti ACF, ACB, eguali a due retti, dico, che le rette BC, FC sono poste dirittamente, ovvero che costituiscono la sola retta BF. Fig. V. Tav. VI.

Dimostrazione.

Imperciocchè, se mai è possibile, la retta CF non sia posta dirittamente colla retta BC, ma l'altra retta CI stia a giacere dirittamente colla stessa retta BC, e allora la retta AC stando sopra alla retta BCI (per la Prop. preced.) formerà i due angoli ACB, ACI, presi insieme, eguali a due retti; ma, per l'ipotesi, i due angoli ACB, ACF, presi insieme, sono altresì eguali a due retti: dunque (per l'Assiom. 1.) i due angoli ACB, ACF, saranno eguali ai due angoli ACB, ACI; e tolto l'angolo comune ACB (per l'Assiom. 3.) resterà l'angolo ACF eguale all'angolo ACI; ma ripugna che il tutto sia eguale a una sua parte (per l'Assiom. 10.); dun-

dunque niun'altra retta linea, se non CF, può giacere dirittamente colla linea BC, giacchè gli angoli conseguenti ACB, ACF uguagliano due angoli retti.

Laonde se a qualche punto in una data retta, ecc. Il che era da dimostrarsi.

Questa è la Proposizione 14. del Libro I. di Euclide.

Corollario.

Dunque due linee rette non possono aver parte alcuna comune fuori d'un solo punto, in cui vicendevolmente si tagliano. Imperciocchè se la linea quantunque piccioliſſima CB fosse una parte comune alle due rette IC, FC; cioè se fosse ICB una linea retta, ed FCB un'altra linea retta, allora tirata al punto C l'altra retta AC, come poco fa abbiamo dimostrato, l'angolo ACF sarebbe uguale all'angolo ACI; il che non può essere (per l'Assiom. 10.); e perciò la linea CB, quantunque piccioliſſima, non può giacere dirittamente colle due linee rette; per conseguenza due linee rette non possono avere segmento alcuno comune. Fig. VI. Tav. V.

PROPOSIZIONE DECIMASETTIMA.

Teorema.

Due linee rette tagliandosi scambievolmente formano gli angoli verticali opposti tra di loro eguali.

Le due rette AB, FE, si taglino a vicenda nel punto C, sarà l'angolo x eguale all'angolo ECB, e l'angolo m eguale all'angolo z, che sono verticali opposti. Fig. VII. Tav. V.

Dimostrazione.

La retta AC cadendo sopra la retta FE forma i due angoli conseguenti m, ed x, eguali a due retti. Nella stessa maniera la retta FC cadendo sopra AB fa i due angoli conseguenti z, ed x, eguali a due retti; per conseguenza (per l'Assiom. 1.) i due angoli m, ed x, presi insieme saranno eguali ai due z, ed x, presi pure insieme; e dalle somme eguali m + x, e z + x togliendo l'angolo comune x (per l'Assiom. 3.), resterà l'angolo m eguale all'angolo z, cioè ACE eguale all'angolo FCB, che sono verticali opposti.

Inoltre i due angoli conseguenti m, e C (per la Propos. 15.) eguagliano parimenti due retti; e perciò (per l'Assiom. 1.) saranno anche eguali ai due angoli x, e z, i quali (per la Propos. 15.) eguagliano due retti; cioè sarà m + C = x + z; e togliendo gli angoli m, e z già dimostrati uguali (per l'Assiom. 3.), resterà l'angolo C

lo C eguale all'angolo x, i quali parimenti sono verticali opposti. Dunque due linee rette ecc. Il che era da dimostrarsi.

Questa è la Proposizione 15. del Libro I. di Euclide.

Corollario.

Fig. VIII. Tav. V. Se da parti opposte su la linea retta AB cadranno nel medesimo punto C le due rette FC, EC, le quali formino gli angoli verticali opposti ACE, FCB, eguali, quelle due rette FC, CE saranno poste dirittamente. Imperciocchè se agli angoli eguali ACE, FCB, si aggiunga l'angolo comune ACF (per l'Assiom. 2.), i due angoli ACE, ACF unitamente saranno eguali ai due FCB, ACF presi insieme: ma essendochè i due angoli conseguenti FCB, ACF (per la Propos. 15.) uguagliano due retti; dunque (per l'Assiom. 1.) anche i due angoli ACE, ACF saranno eguali a due retti. Conseguentemente (per la Propos. 16.) le due rette EC, CF giaceranno dirittamente.

PROPOSIZIONE DICIOTTESIMA.

Teorema.

Le linee rette perpendicolari a una medesima retta sono tra di se paralelle.

Fig. IX. Tav. V. Le due rette FE, LM sieno ambedue perpendicolari alla medesima retta AB, dico che le rette FE, LM sono paralelle. Nella retta FE prendasi qualsivoglia punto S, e (per la Propositz. 14.) si cali SI perpendicolare alla retta LM: dipoi dall'altra parte BM (per la Propos. 3.) si tagli la porzione BC = BI, e dal punto C sulla linea LM (per la Propos. 13.) si alzi la perpendicolare CR, e si tirino le rette CA, IA.

Dimostrazione.

Si consideri no i due triangoli ABC, ABI, i quali (per la costruz.) hanno il lato BC = BI, il lato BA comune all'uno, e all'altro triangolo, e l'angolo ABC (per l'Assiom. 16.) eguale all'angolo ABI, imperciocchè per l'ipotesi sono retti; dunque (per la Propos. 6.) sarà la base CA = alla base IA, e l'angolo z = x, e l'angolo t = y, a' quali si oppongono lati eguali.

Oltre a ciò per le linee RC, SI (per la costruz.) perpendicolari alla retta LM, gli angoli retti RCB, SIB (per l'Assiom. 10.) sono eguali, da' quali tolgansi parti eguali, cioè gli angoli z, ed x, e (per l'Assiom. 3.) resterà l'angolo ACR eguale all'angolo AIS. Similmente dagli angoli RAB, SAB (per l'ipotesi) retti, e (per l'Assiom. 16.) tra di se eguali, si tolgano le parti (per la Dimostr.) eguali,

li, cioè gli angoli t, ed y, refterà l'angolo RAC eguale all'angolo IAS (per l' Affiom. 3.). Per la qual cosa i due triangoli ACR, IAS (per la Dimostraz.) hanno i due angoli RCA, RAC eguali ai due angoli AIS, IAS, e il lato frapposto AC eguale al lato frapposto IA; e perciò (per la Propos. 5.) sarà il lato, o sia il perpendicolo CR eguale al lato, e perpendicolo IS, i quali si oppongono ad angoli eguali; per conseguenza le due rette FE, LM, (per la Definiz. 11.) saranno paralelle, essendosi dimostrate le perpendicolari frapposte tra d'esse IS, CR, eguali tra di loro: il che sempre si verifica, o le perpendicolari IS, CR sieno più vicine, oppur più remote dalla retta AB.

Dunque le linee rette perpendicolari ecc. Il che era da dimostrarsi.

PROPOSIZIONE DECIMANONA.

Teorema.

Se una linea retta cadendo sopra due rette farà gli angoli alterni eguali tra di loro; o l' angolo esterno eguale all' angolo interno, e opposto alla medesima parte; o due angoli interni, e posti alla medesima parte, eguali a due angoli retti: quelle due linee rette saranno sempre paralelle.

Primieramente la retta GF obliquamente tagli le due rette AB, CL, e formi l' angolo x eguale all'angolo z (i quali sono angoli interni, ed opposti, e si chiamano *Angoli alterni*): dico, che le due rette AB, CL sono paralelle. Fig. X. Tav. V.

La retta GF (per la Propoſiz. 12.) in due parti tagliſi nel punto I, dal quale sopra CL (per la Propos. 14.) si cali la perpendicolare IS; dipoi (per la Propos. 3.) dalla retta indeterminata GA si tagli la porzione GR = SF, e (per il Postul. 4.) vi si aggiunga la retta IR.

Dimostrazione.

I triangoli RGI, IFS (per la costruz.) hanno il lato GI = IF, e il lato RG = SF, e (per l'ipotesi) l'angolo x eguale all' angolo z, che sono formati da lati eguali; dunque (per la Propos. 6.) sarà l'angolo RIG eguale all'angolo verticale opposto SIF; conseguentemente (per il Coroll. della Propos. 17.) le rette RI, IS, formano la sola retta RS; oltre a ciò sarà l'angolo IRG eguale all'angolo ISF, il quale (per la costruz.) è retto; e perciò (per l' Affiom. 1.) anche l'angolo IRG sarà retto: laonde (per la Definiz. 9.) la retta SR sarà perpendicolare alla retta AB, e (per la costruz.) è anche perpendicolare alla retta CL; in conseguenza (per la Propos. precedente) le linee AB, CL saranno paralelle, perchè sono perpendicolari alla medesima retta SR.

Che

Che se poi ponganſi eguali tra di loro i due angoli t, ed o, i quali parimenti ſono *Alterni*, allora, perchè (per la Propoſ. 15.) tanto la ſomma degli angoli x + t, quanto la ſomma o + z eguaglia due retti, perciò (per l'Aſſiom. 1.) ſarà x + t = o + z; e togliendo gli angoli t, ed o (per l'ipoteſi) eguali, (per l'Aſſiom. 3.) reſterà x = z: conſeguentemente (per la Dimoſtraz. preced.) le linee AB, CL ſaranno paralelle.

Dunque ſe una linea retta cadendo ſopra due rette farà gli angoli alterni eguali tra di loro, quelle due rette ſaranno paralelle. Il che era primieramente da dimoſtrarſi.

In ſecondo luogo la retta CI ſtando ſopra le due rette AF, GH, formi l'angolo eſterno f eguale all'angolo m interno, e oppoſto alla medeſima parte, le rette AF, GH ſaranno ancor paralelle.

Dimoſtrazione.

L'angolo t (per la Propoſ. 17.) è uguale all'angolo f verticalmente oppoſto; ma (per l'ipoteſi) l'angolo m è eguale al medeſimo angolo f; dunque (per l'Aſſiom. 1.) ſarà l'angolo t eguale all'angolo alterno m; per conſeguenza (per la Dimoſtraz. preced.) le rette AF, GH ſaranno paralelle.

Fig XI. Tav. V. Nella medeſima maniera ſi dimoſtra che le rette AF, GH, ſono paralelle, ſe l'angolo eſterno CLF ſarà eguale all'angolo z interno, ed oppoſto, e alla medeſima parte.

Per la qual coſa ſe una retta linea cadendo ſopra due rette farà l'angolo eſterno eguale all'interno, ed oppoſto, e alla medeſima parte, le ſteſſe due rette linee ſaranno paralelle. Il che in ſecondo luogo aveaſi a dimoſtrare.

In terzo luogo la retta LI cadendo ſopra le rette AF, GH, formi gli angoli x, ed m (ovvero t, e z) interni, e poſti alla medeſima parte preſi inſieme eguali a due angoli retti, le rette AF, GH ſaranno paralelle.

Dimoſtrazione.

I due angoli conſeguenti z, ed f preſi inſieme (per la Propoſ. 15.) ſono eguali a due retti; ma (per l'ipoteſi) i due angoli m, ed x ſono anche eguali a due retti; e perciò (per l'Aſſiom. 1.) i due angoli z, ed m ſaranno eguali ai due x, ed m; da' quali tolgaſi l'angolo comune m, e (per l'Aſſiom. 3.) reſterà l'angolo z eguale all'angolo alterno x; dunque (per la prima Dimoſtrazione) le rette AF, GH ſaranno paralelle.

Col medeſimo raziocinio ſi dimoſtra, che le linee AF, GH, ſono paralelle, ſe gli altri due angoli t, e z interni, e poſti alla medeſima parte ſaranno eguali a due retti.

Dunque ſe una retta linea cadendo ſopra due rette farà due angoli interni, e poſti alla medeſima parte eguali a due angoli retti, quelle due

le due rette saranno paralelle. Il che era da dimostrarsi in terzo luogo.

Questa Proposizione contiene le Proposizioni 27, e 28, del Libro I. di Euclide.

PROPOSIZIONE VENTESIMA.

Teorema.

Se una linea retta cadendo sopra due paralelle sarà perpendicolare ad una delle paralelle, sarà anche all' altra perpendicolare.

Sieno le due rette paralelle FE, LM, sopra le quali cada la retta AB, la quale sia perpendicolare alla retta LM, dico, che la medesima AB è anche perpendicolare alla retta FE. Fig. IX. Tav. V.

Dal punto B si taglino le parti eguali BI, BC, e (per la Proposizione 13.) su la retta LM si alzino le perpendicolari IS, CR, e vi si aggiungano le rette IA, CA.

Dimostrazione.

Poichè i triangoli ABI, ABC intorno gli angoli (per l' Assiom. 16.) eguali ABI, ABC hanno i lati eguali IB = BC, e BA comune; perciò (per la Propos. 6.) sarà la base IA = CA, l'angolo x = z, e l'angolo y = t.

Per la qual cosa se dagli eguali angoli retti SIB, RCB si tolgano gli angoli eguali x, e z, (per l' Assiom. 3.) resterà l'angolo AIS = ACR. Adunque i due triangoli AIS, ACR hanno l'angolo AIS = ACR (per la Dimostraz.), e il lato IA = al lato CA, il lato poi SI (per la Definiz. 11.) eguale al lato RC, perchè sono perpendicolari frapposte tra paralelle; conseguentemente (per la Propos. 6.) sarà l'angolo IAS eguale all' angolo RAC, a' quali aggiunganfi gli angoli y, e t (dalle cose dimostrate) eguali, (per l' Assiom. 2.) sarà tutto l'angolo SAB eguale all' intero angolo RAB; e perciò (per la Defin. 9.) la retta BA sarà anche perpendicolare alla retta FE. Il che era da dimostrarsi.

PROPOSIZIONE VENTESIMAPRIMA.

Teorema.

Una linea retta cadendo obliquamente sopra due paralelle formerà gli angoli alterni tra di loro eguali; l' angolo esterno eguale all' interno, ed opposto, e alla medesima parte: e i due angoli interni e posti alla medesima banda eguali a due retti.

Primieramente la retta GF tagli obliquamente le due paralelle AB,

Fig. XII. Tav. V. AB, CL; dico, che gli angoli alterni sono tra di loro eguali, cioè x = z, e l'angolo BGF = CFG.

Dai punti E, e G, alle rette AB, CL (per la Propos. 14.) si calino le perpendicolari FE, GI.

Dimostrazione.

Poichè (per la costruz.) la retta FE è perpendicolare alla retta AB, perciò (per la Propos. antecedente) sarà anche perpendicolare all'altra paralella CL: per conseguenza le due rette EF, GI perpendicolari alla medesima CL (per la Propoſiz. 18.) saranno tra di loro paralelle. Laonde i due triangoli EFG, IGF hanno il lato FE = GI (per la Definiz. 17.), perchè sono perpendicolari poste tra paralelle AB, CL: similmente è il lato EG = IF, imperciocchè sono perpendicolari poste tra linee (per la Dimostrazione) paralelle EF, GI; il lato poi FG è comune all'uno, e all'altro triangolo; adunque (per la Propos. 9.) sarà l'angolo x = z, a' quali sono opposti i lati eguali EF, GI, e sono angoli alterni. Oltre a ciò sarà l'angolo o = t, a' quali aggiunganſi gli eguali angoli retti EFC, IGB, e (per l'Assiom. 2.) sarà tutto l'angolo CFG eguale all'intero angolo BGF, che sono parimenti alterni. Dunque una retta cadendo obliquamente sopra due rette paralelle, fa gli angoli alterni tra di loro eguali, il che avea si primieramente a dimostrare.

Fig. XIII. Tav. V. In secondo luogo la retta CI stando appoggiata sopra le due rette paralelle AF, GH, formerà l'angolo esterno f eguale all'angolo m interno, ed opposto, e alla medesima parte.

Dimostrazione.

Imperciocchè (per la Propos. 17.) l'angolo f è uguale all'angolo t, e (per la Dimostraz. precedente) l'angolo m è uguale allo stesso angolo t suo alterno; dunque (per l'Assiom. 1.) sarà l'angolo f eguale all'angolo m.

Nella stessa maniera si dimostra l'angolo ALC = z, perchè sono ambidue uguali al medesimo angolo x.

Per conseguenza una retta linea stando sopra due rette paralelle; fa l'angolo interno eguale all'angolo esterno, ed opposto, e alla stessa parte. Il che in secondo luogo erasi da dimostrare.

In terzo luogo la retta CI tagliando le due rette paralelle AF, GH, formerà i due angoli x, ed m interni, e posti alla medesima parte uguali a due angoli retti.

Dimostrazione.

Gli angoli alterni z, ed x per la prima parte di questa Proposizione sono tra di loro eguali; a' quali aggiungasi il medesimo angolo m, e i

due

due angoli z, ed m (per l'Assiom. 2.) saranno uguali ai due angoli x, ed m; ma gli angoli conseguenti z, ed m (per la Propos. 13.) uguagliano due retti; dunque (per l'Assiom. 1.) anche i due angoli x, ed m saranno eguali a due angoli retti.

Col medesimo raziocinio si dimostrano eguali a due retti gli angoli t, e z; dunque una linea retta cadendo su due rette paralelle, forma due angoli interni, e posti alla medesima banda, eguali a due angoli retti. Il che avea si a dimostrare.

Questa è la Proposizione 29. del Libro I. di Euclide.

PROPOSIZIONE VENTESIMASECONDA.

Teorema.

Le linee rette AE, CF paralelle a una medesima retta DL, saranno altresì tra di lor paralelle.

Si tiri la retta IM, la quale in qualsivoglia modo le tagli ne' punti I, G, M.

Dimostrazione.

Fig. XIV. Tav. V.

Poichè le due rette AE, DL, (per l'ipotesi) sono tra di lor paralelle, perciò (per la prima parte della Propos. preced.) sarà l'angolo x eguale all'alterno z. Inoltre, perchè le rette CF, DL (per l'ipotesi) sono paralelle, perciò (per la seconda parte della Propositz. preced.) sarà l'angolo interno f eguale all'angolo z esterno, ed opposto nella medesima parte; dunque (per l'Assiom. 1.) sarà l'angolo x uguale all'angolo f, i quali sono alterni; conseguentemente (per la prima parte della Propos. 19.) le due rette AE, CF saranno paralelle. Il che era da dimostrarsi.

Questa è la Proposizione 30. del Libro I. di Euclide.

PROPOSIZIONE VENTESIMATERZA.

Problema.

Per un dato punto (C) tirare una linea paralella a una data retta (AF).

Dal dato punto C a qualsivoglia punto L nella data retta AF tirisi la retta CL, e al punto C sopra la retta CL (per la Propos. 16.) costituiscasi l'angolo LCE eguale all'angolo FLC; la retta EC sarà la linea ricercata.

Fig. L. Tav. VI.

Dimostrazione.

Imperciocchè gli angoli alterni ECL, FLC per la costruzione sono

tra di loro eguali; e perciò (per la prima parte della Propos. 19.) le rette AF, EC saranno paralelle. Il che era da farsi, e da dimostrare.

Questa è la Proposizione 31. del Libro I. di Euclide.

PROPOSIZIONE VENTESIMAQUARTA.

Teorema.

In ogni triangolo rettilineo i tre angoli presi insieme uguagliano due angoli retti: e tirato in lungo qualsivoglia lato, l'angolo esterno sarà eguale ai due angoli interni, ed opposti presi insieme.

Primieramente sia dato il triangolo rettilineo ACD, dico, che tutti i di lui angoli interni t, m, ed x presi insieme sono eguali a due angoli retti.

Fig. II. Tav. VI.

Per il punto C (per la Proposiz. preced.) si tiri la retta GCF paralella al lato AD.

Dimostrazione.

Poichè le rette GF, AD (per la costruz.) sono paralelle, perciò la retta CA su d'esse cadendo (per la Proposiz. 21.) formerà gli angoli alterni eguali, cioè $x = z$; parimenti la retta CD tagliando le medesime paralelle, farà gli angoli alterni eguali, cioè $t = f$; e ad eguali aggiungendo cose eguali (per l'Asiom. 2.), sarà $x + t = z + f$; a' quali unisca si il comune angolo m, e (per l' Asiom. 2.) si avrà la somma $x + t + m = z + f + m$; ma così è che (per il Coroll. 1. della Propos. 15.) la somma degli angoli z, m, ed f eguaglia due angoli retti; dunque (per l'Asiom. 1.) anche i tre angoli x, t, ed m presi insieme saranno eguali a due retti. Il che era primieramente da dimostrarsi.

In secondo luogo si allunghi qualsivoglia lato, come AD verso E, e l' angolo esterno CDE sarà eguale ai due angoli x, ed m interni, ed opposti presi insieme.

Fig. III. Tav. VI.

Dimostrazione.

Imperciocchè i due angoli conseguenti t, e CDE insieme (per la Proposiz. 15.) sono eguali a due retti; ma i tre angoli interni x, t, ed m insieme (per la Dimostr. preced.) sono parimenti uguali a due angoli retti: dunque (per l'Asiom. 1.) i due angoli conseguenti t, e CDE saranno eguali ai tre angoli x, t, m presi insieme. Tolgasi il comune angolo t, e (per l'Asiom. 3.) resterà l'angolo esterno CDE eguale ai due angoli x, ed m interni, ed opposti presi insieme. Il che era in secondo luogo da dimostrarsi.

Per la qual cosa in ogni triangolo rettilineo ecc. Il che doveasi dimostrare.

Questa è la Proposizione 32. del Libro I. di Euclide.

Corol-

Corollario P[illegible]

Quindi due angoli di qualsivoglia triangolo presi insieme sempre saranno minori di due retti, perchè per la prima Dimostrazione tutti presi insieme uguagliano solamente due retti.

Questa è la Proposizione 17. del Libro I. di Euclide.

Corollario Secondo.

In qualsivoglia triangolo rettilineo, tirato in lungo un lato, l'angolo esterno sarà maggiore dell'uno, e dell'altro interno, ed opposto; imperciocchè per la seconda Dimostrazione l'angolo esterno CDE uguaglia i due interni, ed opposti m, ed x tolti insieme; per conseguenza sarà maggiore tanto dell'angolo m, quanto dell'angolo x, come da se è manifesto.

Questa è la Proposizione 16. del Libro I. di Euclide.

Corollario Terzo.

Se la retta linea BL cadendo sopra le due rette AF, ME, farà gli angoli interni, e posti alla medesima banda ABL, e BLM maggiori di due retti, allora gli altri due angoli interni, e posti all'altra parte FBL, ELB saranno minori di due retti, i quali due angoli conseguenti in B (per la Propos. 15.) uniti ai due angoli conseguenti in L formano quattro retti, da' quali se tolgansi i due angoli ABL, MLB (per l'ipotesi) maggiori di due retti, gli altri due angoli FBL, ELB saranno di due retti minori. Fig. 16. Tav. VI.

Oltre a ciò le linee AF, ME non saranno paralelle; imperciocchè quando le linee sono paralelle, (per la Propoſiz. 21.) gli angoli interni, e posti alla medesima parte uguagliano due retti.

Se poi (che è l'Assiom. 11. di Euclide) dall'una, e dall'altra parte si allunghino le rette AF, ME, certamente verranno ad unirsi da quella parte, verso cui gli angoli interni FBL, ELB sono minori di due retti, perchè (per il Coroll. 1.) due angoli di qualsivoglia triangolo rettilineo presi insieme sono sempre minori di due retti. E per la medesima ragione dall'altra parte, verso cui gli angoli interni ABL, MLB sono maggiori di due retti, mai si uniranno, ma più e più si discosteranno scambievolmente l'una dall'altra.

Laonde le linee AF, ME diconsi *Convergenti* verso la parte FE, e *Divergenti* dall'altra parte AM.

Corollario Quarto.

Se dai termini A, ed F d'un lato di qualsivoglia triangolo ACF saranno tirate due rette AE, FE a qualche punto E dentro il triangolo, le stesse rette conterranno l'angolo AEF maggiore dell'angolo ACF contenuto degli altri lati del dato triangolo ACF. Fig. V. Tav. VI.

Im-

Imperciocchè (per la retta CEL) l' angolo AEL esterno del interno, ed opposto dell' angolo ACE

Similmente l' angolo esterno LEF è maggiore dell' angolo ECE interno, ed opposto; per conseguenza tutto l' angolo AEF sarà maggiore dell' intero angolo ACE.

Questa è la seconda Parte della Proposizione 31. del Libro I. di Euclide.

Corollario Quinto.

Poichè la somma dei tre angoli di qualsivoglia triangolo rettilineo (per la prima parte di questa Proposizione) eguaglia due angoli retti, perciò se un angolo d' un triangolo sarà ottuso, o maggior d' un retto, allora gli altri due angoli saranno acuti, e presi insieme saranno minori d' un angolo retto.

Se poi un angolo d' un triangolo sarà retto, gli altri due saranno acuti, e presi insieme formeranno un angolo retto.

Per la qual cosa quando un angolo d' un triangolo è uguale agli altri due presi insieme, allora quell' angolo è retto, perchè uguale alla metà della somma di due retti.

Corollario Sesto.

Oltre a ciò, perchè (per la prima parte di questa Propoſiz.) la somma di tutti gli angoli di qualsivoglia triangolo rettilineo sempre è uguale a due angoli retti, perciò (per l' Assiom. 1.) la somma dei tre angoli di qualsivoglia triangolo rettilineo sarà eguale alla somma dei tre angoli di qualunque altro triangolo rettilineo.

Corollario Settimo.

Laonde se due angoli d' un triangolo saranno eguali a due angoli d' un altro triangolo, anche il restante sarà uguale al restante.

Similmente se un angolo d' un triangolo sarà eguale a un angolo d' un altro triangolo, anche gli altri due angoli del primo triangolo presi insieme saranno uguali agli altri due angoli del secondo triangolo colti insieme, perchè nell' uno, e nell' altro triangolo sempre devono costituire la medesima somma di due retti.

Corollario Ottavo.

La somma di tutti gli angoli di qualsivoglia figura rettilinea uguaglia altrettanti retti, quante unità, toltene quattro, contiene il numero de' lati preso due volte.

Vale a dire, se il numero de' lati della data figura prendasi due volte, e dallo stesso numero duplo si sottragga il numero quattro, il re-

il residuo indicherà a quanti angoli retti equivagliano tutti gli angoli interni della medesima figura presi insieme.

Come dato il Pentagono I L G F G, la somma di tutti gli angoli FCL, CLI, LIG, ecc. della medesima figura equivalerà a dieci angoli retti meno quattro, cioè formerà sei angoli retti. Fig. VI. Tav. VI.

Imperciocchè dentro la figura prendasi qualche punto A, dal quale a ciascun angolo della data figura si tirino le rette AC, AL, AF, ecc. la figura sarà divisa in altrettanti triangoli, quanti lati ella ha, cioè in cinque: ma tutti gli angoli di qualsivoglia triangolo (per la prima parte di questa Propolizione) uguagliano due retti; dunque perchè altrettanti sono i triangoli, quanti i lati, la somma di tutti gli angoli de' medesimi cinque triangoli equivalerà a dieci angoli retti, cioè al doppio del numero de' lati; gli angoli poi de' medesimi triangoli, che si fanno nel punto A, non appartengono alla figura, e presi insieme (per il Coroll. 3. della Prop. 15.) eguagliano quattro retti; perciò se dai dieci retti (somma di tutti gli angoli de' medesimi triangoli) si tolgano quattro retti (cioè tutti gli angoli, che si formano in A); gli altri sei angoli retti saranno eguali a tutti gli altri angoli de' triangoli, cioè saranno eguali alla somma di tutti gli angoli del dato pentagono.

Se la data figura avrà sedici lati, tutti i di lei angoli interni presi insieme saranno eguali a tredici angoli retti meno quattro: cioè, costituiranno ventotto angoli retti; il che si può dimostrare col medesimo raziocinio: e lo stesso intendasi di qualsivoglia altra figura rettilinea.

Corollario Nono.

Dunque tutti i Poligoni, che hanno un medesimo numero di lati, avranno anche le somme degli angoli interni tra di loro eguali.

Corollario Decimo.

Se ciascun lato di qualsivoglia figura rettilinea si allunghi soltanto da una parte, tutti gli angoli esterni presi insieme saranno eguali a quattro retti.

Imperciocchè nella figura C L F G B i due angoli conseguenti L C E interno, e L C D esterno presi insieme (per la Propos. 15.) uguagliano due retti: il che pure si verifica negli altri punti L F G E; per conseguenza gli angoli interni insieme cogli esterni fanno altrettanti paja d'angoli retti, quanti sono i lati del poligono; oppur, che è lo stesso, formano il numero degli angoli retti il duplo del numero de' lati; vale a dire in questa figura costituiscono dieci angoli retti, da' quali tolgansi tutti gli angoli interni, i quali (per il Coroll. 8.) costituiscono due volte tanti retti, quanti sono i lati, cioè quattro; in questa figura formano sei retti: gli altri quattro angoli retti saranno eguali alla somma di tutti gli angoli esterni. Fig. VII. Tav. VI.

Nella

Nella stessa maniera si dimostra il medesimo di qualsivoglia altro poligono.

Corollario Undecimo.

Per la qual cosa la somma degli angoli esterni di qualsiasi figura rettilinea è uguale alla somma di tutti gli esterni di qualunque altra figura rettilinea.

PROPOSIZIONE VENTESIMAQUINTA.

Teorema.

In ogni triangolo Isoscele gli angoli costituiti sopra la base sono tra di loro eguali; ed allungati i lati eguali, gli angoli situati di sotto alla base sono altresì tra di loro eguali.

Fig. VIII. Tav. VI. Sia dato il triangolo Isoscele ABC, i di cui due lati eguali sieno AB, AC, e la base sia BC; sarà l' angolo x eguale all' angolo z, i quali sono sopra la base BC; e allungati di sotto alla base BC i lati eguali AB verso R, e AC verso E, sarà l' angolo m eguale all'angolo f, che sono di sotto la base.

La base BC in due parti dividasi in F (per la Propos. 12.); e s'innalzi al vertice A la retta FA.

Dimostrazione.

I due triangoli ABF, AFC, hanno il lato AB=AC per l'ipotesi, il lato BF=FC per la costruzione, e il lato AF comune all' uno, e all'altro triangolo; dunque (per la Prop. 9.) sarà l' angolo x=z, a' quali è opposto il lato comune AF.

Oltre a ciò i due angoli conseguenti x, ed m presi insieme (per la Propos. 15.) sono eguali a due retti: similmente i due angoli conseguenti z, ed f presi insieme eguagliano due retti; dunque (per l'Assiom. 1.) i due angoli x, ed m saranno eguali ai due z, ed f; da' quali si tolgano gli angoli (per la Dimostrazione) eguali x, e z, (per l'Assiom. 3.) resterà l'angolo m eguale all' angolo f. Laonde in qualsivoglia triangolo Isoscele ecc. Il che era da dimostrarsi.

Questa è la celebre Proposizione 5. del Libro I. di Euclide.

Corollario Primo.

Poichè i due triangoli ABF, ACF (per la Dimostrazione) hanno ciascun lato eguale a ciascun lato, perciò sarà anche l' angolo AFB=AFC, a' quali sono opposti i lati eguali AB, AC; conseguentemente (per la Defin. 9.) la retta AF tirata dal vertice A del triangolo isoscele ABC alla metà della base F sarà perpendicolare

lare alla medesima base. Oltre a ciò dividerà anche in due parti l' angolo verticale CAB. Per la qual cosa (per la Prop. 9.) sarà anche l'angolo FAB eguale all'angolo FAC, che sono opposti ai lati eguali BF, FC.

Corollario Secondo.

Scambievolmente se dal vertice A del triangolo isoscele alla base BC (per la Propos. 14.) si cali la perpendicolare AF, questa taglierà in due parti la base BC, e l'angolo opposto CAB. Imperciocchè (per l'Assiom. 16.) è l'angolo AFB = AFC, e l'angolo x = z (per la Dimostraz. preced.); conseguentemente (per il Coroll. 7. della Propos. 24.) il rimanente angolo FAB sarà eguale al restante FAC; e (per l'ipotesi) è il lato AB = AC frapposto tra angoli eguali; perciò (per la Prop. 5.) sarà il lato FB = FC, i quali (per la Dimostr.) sono opposti ad angoli eguali.

Corollario Terzo.

Ogni triangolo equilatero ACF è anche equiangolo; imperciocchè perchè i lati CA, CF (per la Defin. 19.) sono eguali, perciò (per la prima parte di questa Propos.) sarà l'angolo A = F. Similmente perchè è AC = AF, sarà l' angolo C = F; perciò (per l' Assiom. I.) sarà l' angolo A = C; per conseguenza tutti i tre angoli saranno eguali, e ciascun conterrà una terza parte di due retti. Fig. IX. Tav. VI.

Corollario Quarto.

Dunque qualsivoglia angolo d'un triangolo equilatero uguaglia due terze parti d'un angolo retto; imperciocchè sei terze parti costituiscono due interi; i tre angoli poi d'un triangolo equilatero si sono dimostrati tra di loro eguali, e presi insieme (per la Propos. 24.) eguagliano due retti; perciò qualsivoglia d' essi sarà eguale a due terze parti d' un angolo retto.

PROPOSIZIONE VENTESIMASESTA.

Teorema.

Quel triangolo, che ha un lato maggior dell' altro, avrà anche l'angolo opposto al lato maggiore più grande dell' angolo opposto al lato minore.

Sia il triangolo ACD, il quale abbia il lato AC maggior del lato CD, sarà l'angolo CDA opposto al lato maggior CA più grande dell'angolo CAD opposto al lato minore CD. Fig. X. Tav. VI.

Dal lato maggiore CA (per la Propos. 3.) si tagli la parte CE eguale al minore CD, e si tiri la retta DE (per il Postul. I.).

Dimostrazione.

Nel triangolo CDE (per la costruz.) isoscele l'angolo x è (per la Propos. preced.) eguale a z; dunque tutto l'angolo CDA, il quale (per l'Assiom. 10.) è maggiore dell'angolo z, che è una sua parte, sarà (per la seconda parte dell'Assiom. 1.) anche maggiore dell'angolo x; ma l'angolo esterno x del triangolo ADE (per il Coroll. 2. della Propos. 24.) è maggior dell'interno, ed opposto A; e perciò (per l'Assiom. 13.) l'angolo CDA, il quale si è mostrato maggiore dell'angolo x, sarà parimenti maggiore dell'angolo A.

Dunque in qualsivoglia triangolo il lato maggiore è opposto all'angolo maggiore, e il lato minore è opposto all'angolo minore. Il che era da dimostrarsi.

Questa è la Proposizione 18. del Libro I. di Euclide.

Corollario.

Per la qual cosa il triangolo Scaleno avrà tutti gli angoli ineguali.

PROPOSIZIONE VENTESIMASETTIMA.

Teorema.

Il triangolo, che ha due angoli tra di se eguali, avrà parimenti due lati eguali opposti agli stessi angoli. Se poi il triangolo avrà un angolo maggior d'un angolo, allora avrà il lato opposto all'angolo maggiore più grande del lato opposto all'angolo minore.

Fig. XI. Tav. VI. Primieramente sia il triangolo ACF, in cui sia l'angolo A eguale all'angolo F, sarà il lato CF = CA.

Dimostrazione.

Imperciocchè se il lato CF fosse maggiore, o minore del lato CA, allora (per la Propos. preced.) l'angolo opposto A sarebbe parimenti maggiore, o minore dell'angolo F: il che è contro l'ipotesi; dunque (per l'Assiom. 12.) è necessario che il lato CF sia uguale al lato CA. Il che primieramente doveasi dimostrare.

Fig. XII. Tav. VI. In secondo luogo sia il triangolo ACF, il di cui angolo A sia maggiore dell'angolo F; sarà il lato CF maggiore del lato CA.

Dimostrazione.

Imperciocchè se il lato CF fosse eguale al lato CA, allora (per la Propos. 25.) sarebbe l'angolo A eguale all'angolo F, il che è con-

contro l'ipotesi; se poi il lato CF fosse minore del lato CA, allora (per la Propos. preced.) l'angolo A sarebbe minore dell'angolo F, il che parimenti è contro l'ipotesi: dunque è necessario, che il lato CF sia maggiore del lato CA, poichè l'angolo A è maggiore dell'angolo F. Il che avea si a dimostrare in secondo luogo.

La prima parte è la Proposizione 6., e la seconda parte è la Proposizione 19. del Libro I. di Euclide.

Corollario Primo.

Quindi ogni triangolo, che ha due angoli eguali, sarà Isoscele; e se avrà tutti gli angoli eguali, cioè se sarà equiangolo, sarà anche equilatero; e se avrà tutti gli angoli ineguali, sarà Scaleno.

Corollario Secondo.

Di tutte le linee, che da qualsivoglia punto C possono esser tirate a qualsivoglia retta FE, la minima è la perpendicolare CL. Imperocchè se si tiri qualsivoglia altra retta CA, perchè nel triangolo ACL l'angolo retto ALC è maggiore dell'acuto CAL, anche il lato CA opposto all'angolo maggiore ALC (per la seconda parte di questa Propos.) sarà maggiore del lato CL opposto all'angolo minore CAL: il che sempre si verifica. Fig. XIII. Tav. VI.

Per la qual cosa la distanza tra il punto C, e la linea FE, è misurata dalla perpendicolare CL; e dal medesimo punto C alla retta FE può esser tirata una sola linea perpendicolare.

PROPOSIZIONE VENTESIMAOTTAVA.

Teorema.

Ogni Parallelogramo ha i lati opposti eguali, gli angoli opposti eguali, ed è diviso in due parti dalla diagonale, o sia dal diametro.

Sia il Parallelogramo ACHB; sarà il lato AB=CF, AC=FB, l'angolo A=F, l'angolo ACF=FBA, e tirato il diametro CB, sarà il triangolo ABC uguale al triangolo CFB. Fig. XIV. Tav. VI.

Dimostrazione.

Le rette AB, CF (per l'ipotesi) sono parallele; perciò (per la Propos. 27.) gli angoli alterni z, ed x sono eguali. Similmente per le parallele AG, FB, gli angoli t, ed f alterni sono eguali; e perciò i due triangoli ACB, FCB hanno i due angoli f, ed x eguali ai due angoli c, ed t, e il lato CB frapposto tra gli angoli eguali è comune all'uno, e all'altro triangolo; dunque (per la Propositione 5.)

ne 5.) sarà il lato AB=FC, il lato AC=FB, l'angolo A eguale all'angolo F, e il triangolo ABC eguale al triangolo FCB. Inoltre, perchè gli angoli f, e z si sono dimostrati eguali a t, ed x, perciò (per l'Assiom. 2.) sarà tutto l'angolo ACF eguale all'intero angolo FBA.

Per la qual cosa in ogni paralellogramo ecc. Il che era da dimostrarsi.

Questa è la Proposizione 34. del Libro I. di Euclide.

PROPOSIZIONE VENTESIMANONA.

Teorema.

La figura quadrilatera, che ha due lati paralelli, ed eguali, avrà anche gli altri due lati paralelli, ed eguali; cioè sarà un Paralellogramo.

Fig. XV. Tav. VI. La figura quadrilatera ACFE abbia il lato AC paralello, ed eguale al lato EF, anche il lato AE sarà paralello ed eguale al lato CF.

Dimostrazione.

Tirisi la diagonale EC, la quale cadendo su le due rette AC, EF (per l'ipotesi) paralelle, (per la Propos. 21.) forma gli alterni x, e z tra di loro eguali; e perciò i due triangoli ACE, EFC hanno il lato EC comune, e (per l'ipotesi) il lato AC=EF, e l'angolo x=z, i quali sono formati da lati eguali; dunque (per la Propos. 4.) sarà AE=CF, e l'angolo f eguale all'angolo m, i quali due angoli sono alterni: laonde (per la Proposizion 19.) le rette EA, FC saranno paralelle, e la figura FA (per la Defin. 27.) sarà un paralellogramo.

Per tanto la figura quadrilatera, che ha ecc. Il che era da dimostrarsi.

Questa è la Proposizione 33. del Libro I. di Euclide.

PROPOSIZIONE TRENTESIMA.

Problema.

Sopra una data retta (AC) descrivere un quadrato, o qualunque altro paralellogramo.

Fig. XVI. Tav. VI. Sopra AC, e dai punti A, e C si alzino (per la Propos. 13.) indefinitamente le perpendicolari AB, CF, le quali ambedue (per la Propos. 3.) si facciano eguali alla data AC, e si tiri la retta EB (per il Postul. 1.), sarà AF il quadrato ricercato.

Di-

Dimostrazione.

Imperciocchè le rette AB, CF (per la costruz.) perpendicolari alla medesima AC (per la Propos. 18.) sono paralelle, e (per la costruz.) sono eguali; e perciò (per la Propos. preced.) sarà il lato FB = AC, e la figura AF sarà un paralellogramo: ma i lati AB, CF (per la costruz.) sono eguali al medesimo lato AC; conseguentemente (per l'Assiom. 1.) tutti i lati sono eguali; gli angoli poi A, e C (per la costruz.) sono retti, perciò anche gli angoli F, e B ad essi opposti, ed eguali (per la Propos. 28.) saranno retti. Dunque la figura BC sarà un quadrato (per la Definiz. 28.), perchè per le cose dimostrate è un paralellogramo equilatero, e rettangolo. Il che era in primo luogo da dimostrarsi.

Questa è la Proposizione 46. del Libro I. di Euclide.

In secondo luogo, se le perpendicolari eguali AB, CF si facciano maggiori, o minori della retta AC, allora tirata la retta FB, la figura formata sarà un rettangolo, come da se è manifesto. Fig. XVII. Tav. VI.

In terzo luogo se abbiasi a descrivere un Rombo, si tiri dal punto A la retta AB = AC, la quale formi l'angolo A obliquo, cioè acuto, oppure ottuso; dipoi per il punto C (per la Propositione 23.) si tiri la retta CF paralella, ed eguale alla retta AB, o AC, e vi si aggiunga la retta FB, sarà AF il Rombo ricercato. Fig. XVIII. Tav. VI.

In quarto luogo, che se stabilito l'angolo A obliquo, si ponga AB maggiore, o minore della data AC, e si finisca il paralellogramo, si avrà la Romboide AF. Il che erasi proposto. Fig. XIX. Tav. VI.

Corollario.

Dunque il paralellogramo, che ha un angolo retto, avrà altresì gli altri angoli retti.

PROPOSIZIONE TRENTESIMAPRIMA.

Teorema.

I paralellogrami costituiti sopra una medesima base, e dentro le stesse paralelle, sono tra di loro eguali.

I due paralellogrami ABCE, BCFG abbiano comune la base BC, e sieno costituiti tra le medesime paralelle AF, BR, sarà il paralellogramo ABCE eguale al paralellogramo BCFG. Fig. XX. Tav. VI.

Dimostrazione.

Imperciocchè (per la Propos. 28.) è AE = BC, e GF = BC; e per-

perciò (per l'Assiom. 1.) sarà AE = GF; e aggiuntavi la comun porzione EG (per l'Assiom. 2.) sarà AG = FE; laonde i due triangoli ABG, EFC (per la Propoſiz. 28.) hanno i lati BG = FC, AB = CE, e (per la Dimoſtraz.) AG = FE; dunque (per la Propoſiz. 9.) sarà il triangolo ABG eguale al triangolo ECF; da' quali tolgasi la parte comune, cioè il triangolo EFG, e (per l'Assiom. 3.) resterà il Trapezio EIBA, eguale al Trapezio CFGI, a' quali aggiungasi il comun triangolo IBC, e (per l'Assiom. 2.) sarà il paralellogramo ABCE uguale al paralellogramo BCFG. Dunque i paralellogrami ecc. Il che era da dimoſtrarſi.

Questa è la Propoſizione 25. del Lib. 1. di Euclide.

Corollario Primo.

L'area del paralellogramo rettangolo ABCE (per la Definiz. 36.) si ritrova moltiplicando la base BC nell'altezza BA eguale FR. Ma il paralellogramo obliquangolo BCFG si è dimoſtrato uguale al rettangolo ABCE; perciò l'area di qualsivoglia paralellogramo FGBC si ottiene moltiplicando la base BC per l'altezza BA, o FR, oppur CE (per la Definiz. 38.).

Per tanto se la base d'un paralellogramo si chiami m, e la di lui altezza si appelli a, il prodotto am sarà l'area del paralellogramo, cioè significherà lo stesso paralellogramo.

Corollario Secondo.

L'area poi di qualsivoglia triangolo rettilineo ABC è uguale alla metà prodotta dall'altezza BM nella base AC. Imperciocchè se per i punti AB (per la Propoſiz. 23.) si tirino le rette AE paralella al lato BC, e BE paralella al lato AC, si avrà il paralellogramo ABCE (per la Propoſ. 28.) duplo del triangolo ABC; ma (per il Corell. preced.) l'area del paralellogramo ACBE è AC × BM; dunque la di lui metà, cioè l'area del triangolo ABC sarà $\frac{AC \times BM}{2}$.

fig. 1. Tav. VII.

Per tanto se la base AC si chiami b, e l'altezza BM si chiami m, il prodotto bm significherà l'area del paralellogramo ACBE; e $\frac{bm}{2}$ sarà l'area del triangolo ABC.

Ma è $\frac{bm}{2} = \frac{b}{2} \times m = b \times \frac{m}{2}$ (per l'Aritmetica n°. 134.); per conseguenza l'area d'un triangolo anche si ottiene moltiplicando la metà della base in tutta l'altezza, o l'intera base per la metà dell'altezza.

PRO-

PROPOSIZIONE TRENTESIMASECONDA.

Teorema.

I triangoli (ABC, FCB) costituiti sopra una medesima base (BC), e nelle medesime paralelle (LI, BC) sono tra di loro eguali.

Per il punto B, e C (per la Propoſizion 23.) ſi tirino le rette RL paralella al lato AC, e CI paralella al lato FB. Fig. II. Tav. VII.

Dimoſtrazione.

I paralellogrami ACBL, FBCI (per la Propoſiz. preced.) ſono tra di loro eguali; dunque (per l'Aſſiom. 9.) anche i triangoli ABC, EBC ſaranno tra di ſe uguali, eſſendo (per la Propoſ. 28.) metà d'eguali paralellogrami LC, BI. Dunque ecc. Il che era da dimoſtrarſi.

Queſta è la Propoſizione 37. del Libro I. di Euclide.

PROPOSIZIONE TRENTESIMATERZA.

Teorema.

Se un paralellogramo (ABCF), e un triangolo (LBC) ſaranno poſti ſopra una medeſima baſe (BC), e nelle medeſime paralelle (AL, BC), il paralellogramo ſarà il doppio del triangolo.

Dimoſtrazione.

Imperciocchè tirato il diametro AC, il triangolo LBC (per la Propoſ. preced.) è uguale al triangolo ABC; ma il triangolo ABC (per la Propoſ. 28.) è la metà del paralellogramo ABCF: dunque (per la ſeconda parte dell'Aſſiom. 1.) anche l'egual triangolo LBC ſarà la metà del medeſimo paralellogramo ABCF, il che era da dimoſtrarſi. Fig. III. Tav. VII.

Queſta è la Propoſizione 41. del Libro I. di Euclide.

PROPOSIZIONE TRENTESIMAQUARTA.

Problema.

Coſtituire un paralellogramo eguale a un dato triangolo (ABC), e che abbia un angolo eguale a un dato angolo (Z).

Da qualche angolo B, del dato triangolo ſi tiri fino al lato oppoſto ſe è d'uopo (per la Propoſ. 14.) la perpendicolare BE, la quale (per la Propoſ. 22.) in due parti eguali ſi tagli in F, e per il punto F (per la Propoſ. 23.) ſi tiri la retta RM paralella alla baſe AC. Dipoi alla retta AC, e al punto in eſſa A (per la Propoſ. 10.) ſi faccia l'angolo CAL eguale al dato angolo Z. Fig. IV. Tav. VII.

Fi-

Finalmente per il punto C (per la Propos. 23.) si tiri la retta CI paralella alla retta AH: sarà AHIC il paralellogramo ricercato.

Dimostrazione.

L'area del paralellogramo AHIC (per il Coroll. 1. della Propos. 31.) è uguale al prodotto dall'altezza FE nella base AC; ma l'area del triangolo ABC (per il Coroll. 2. della Propos. 31.) è parimenti uguale al prodotto dalla base AC in FE metà dell'altezza BE; dunque (per l'Assiom. 1.) l'aree saranno uguali, cioè il paralellogramo AHIC sarà eguale al triangolo ABC. Il che erasi proposto da dimostrare.

Questa è la Proposizione 42. del Libro I. di Euclide.

Corollario.

Se il dato angolo Z sarà retto, allora il paralellogramo descritto sarà un rettangolo; se l'angolo Z sarà obliquo, il paralellogramo sarà obliquangolo.

PROPOSIZIONE TRENTESIMAQUINTA.

Teorema.

I triangoli eguali costituiti sopra una medesima base, e posti alla stessa parte, saranno nelle medesime paralelle, cioè avranno la medesima altezza.

Fig. V. Tav. VII. Sopra la medesima base BC, e verso la stessa parte sieno costituiti i due triangoli eguali ABC, FBC, tirata la retta AF dal vertice A d'uno al vertice F dell'altro triangolo, dico che la retta AF è paralella alla base BC.

Dimostrazione.

Imperciocchè se la retta AF non fosse paralella alla base BC, allora per il punto A (per la Propos. 23.) si tirerebbe la retta, per esempio, AL paralella alla base BC, la quale in qualche luogo tagliarebbe il lato FB, come in L, e tirata la retta LC, il triangolo LBC (per la Propos. 32.) sarebbe uguale al triangolo ABC, a cui (per l'ipotesi) è già uguale il triangolo FBC; e perciò (per l'Assiom. 1.) sarebbe il triangolo FBC uguale al triangolo LBC, cioè il tutto eguale alla parte: il che (per l'Assiom. 10.) non può mai essere. Dunque non può farsi che la retta AF non sia paralella alla base BC. Per conseguenza i triangoli eguali ecc. Il che avevasi a dimostrare.

Questa è la Proposizione 39. del Libro I. di Euclide.

DE-

DEGLI ELEMENTI DELLA GEOMETRIA

LIBRO TERZO.

Definizione Prima.

Figure simili diconsi quelle, che hanno un medesimo numero di lati, e di angoli, e che oltre a ciò hanno ciascun angolo eguale a ciascun angolo, e i lati, che costituiscono gli angoli eguali, ovvero opposti agli angoli eguali, cioè frapposti tra gli angoli eguali, fra di loro proporzionali.

Ciascun angolo del pentagono M sia eguale a ciascun angolo del pentagono N, cioè A = F, B = G, C = H, D = I, E = L, e di più i lati posti tra gli angoli eguali sieno proporzionali ciascuno a ciascun altro, cioè Fig. VI. e VII. Tav. VII.

AB : FG = BC : GH = CD : HI = DE : IL = AE : FL;

oppure alternando sia

AB : BC = FG : GH;
BC : CD = GH : HI,
CD : DE = HI : IL, e
DE : AE = IL : FL, allora i pentagoni M, ed N saranno due figure rettilinee simili. Lo stesso intendasi di qualunque altra figura simile.

Corollario.

Dunque i rettilinei (M, ed N) simili a un medesimo rettilineo (R), saranno anche simili tra di loro. Imperciocchè gli angoli de' poligoni M, ed N, perchè (per l'ipotesi) sono eguali agli angoli del poligono R, ciascuno a ciascun altro, perciò (per l'Assiom. 1.) saranno parimenti tra di loro eguali. Similmente perchè le ragioni de' lati dei poligoni M, ed N sono (per l'ipotesi) eguali alle ragioni de' lati del poligono R, perciò (per l'Assiom. 1.) saranno anche eguali tra di loro. Fig. VIII. Tav. VII.

Questa è la Proposizione 21. del Libro 6. di Euclide.

Definizione Seconda.

Nelle figure simili i lati posti tra gli angoli eguali diconsi *Lati Omologhi*, come ne' precedenti poligoni simili M, ed N sono lati omologhi AB, e GF, parimenti CD, e HI, ecc. Fig. VI. e VII. Tav. VII.

Definizione Terza.

Figure *Reciproche* chiamansi quelle, che hanno i lati reciprocamen-

te proporzionali, cioè nelle quali è un lato della prima figura a un lato della seconda, siccome un altro lato della seconda a un altro lato della prima.

Fig. IX. Tav. VII. Così i due triangoli ABC, EDF saranno due figure reciproche, se sarà

AB : DE : : DF : BC, ovvero

AB : DF : : DE : BC.

Definizione Quarta.

Fig. X. Tav. VII. I triangoli (ABF, ACF, AFG, ecc.) che hanno il vertice comune (A), e le basi (BF, CF, FG, ecc.) poste nella medesima retta linea (BG), saranno egualmente alti: imperciocchè l'altezza degli stessi (per la Definiz. 38. del Libro 1.) è la perpendicolare tirata dal comun vertice (A) alla linea (BG), in cui si ritrovano le basi.

PROPOSIZIONE PRIMA.

Teorema.

I paralellogrami egualmente alti, ovvero costituiti tra le medesime paralelle, saranno tra di loro in ragion delle basi. Similmente i triangoli, che hanno la medesima, o un'eguale altezza, saranno tra di loro in ragion delle basi.

Fig. XI. Tav. VII. Primieramente sieno dati i due paralellogrami ABCR, FGHL costituiti nelle medesime paralelle AL, BI, ovvero che abbiano eguali altezze AM = LI, dico, che il paralellogramo AC ha la medesima ragione al paralellogramo FH, che ha la base BC alla base GH; cioè se sarà la base BC = GH, sarà il parallelogramo BR = FH; se la base BC sarà dupla della base GH, anche il paralellogramo AC sarà duplo del paralellogramo FH.

Dimostrazione.

Imperciocchè del paralellogramo BR la base BC si chiami b, e l'altezza AM si chiami c, e (per il Coroll. 1. della Propos. 31. del Libro 2.) l'area del paralellogramo BR sarà bc. Similmente del paralellogramo FH la base GH si chiami m, e la di lui altezza LI, perchè (per l'ipotesi) è uguale all'altezza AM, sarà parimenti c: laonde (per il Coroll. 1. della Proposiz. 31. del Libro 2.) sarà cm l'area del paralellogramo FH. Ma (per la Proposiz. 2. del Lib. 1.) è bc : cm : : b : m, cioè il paralellogramo BR al paralellogramo FH siccome la base BC alla base GH: dunque i paralellogrami

egual-

egualmente alti sono tra di loro in ragion delle basi. Il che primieramente, ecc.

In secondo luogo i triangoli BCR, HLI egualmente alti, ovvero posti nelle medesime paralelle EM, IB, saranno altresì tra di loro fig. XII. Tav. VII. siccome le basi BR, LI.

Si taglino CM = BR, e HE = LI (per la Proposta 3. del Libro 2.), e si tirino le rette BM, IE, acciò (per la Proposizione 29. del Libro 2.) si abbiano i due paralellogrami egualmente alti RM, LE.

Dimostrazione.

Il triangolo BCR è la metà del paralellogramo RM (per la Proposiz. 41. del Libro 2.), e il triangolo HIL è la metà del paralellogramo LE; ma (per il Coroll. 1. della Propos. 15. del Libro 1.) la metà di qualsivoglia quantità è alla metà d'un'altra, siccome la prima quantità alla seconda; e perciò sarà △ BCR : △ HLI :: □ RM : □ LE; ma per la Dimostrazion precedente è □ RM : □ LE :: BR : LI; dunque (per l'Assioma 1.) sarà △ BCR : △ HLI :: BR : LI; cioè △ BCR ha la medesima ragione al △ HLI, che ha la base BR alla base LI. Il che erasi proposto da dimostrare.

Questa è la Proposizione 1. del Libro 6. di Euclide.

Corollario Primo.

Dunque se le basi de' paralellogrami, che hanno un'eguale, o una medesima altezza, saranno uguali, i paralellogrami saranno parimenti tra di loro eguali.

Questa è la Proposizione 36. del Libro 1. di Euclide.

Corollario Secondo.

Similmente saranno eguali tra di loro i triangoli egualmente alti, ovvero costituiti nelle medesime paralelle, se avranno le basi eguali.

Questa è la Proposizione 38. del Libro 1. di Euclide.

Corollario Terzo.

Se due paralellogrami am, e bm avranno la medesima base m, e le altezze ineguali a, e b, allora i paralellogrami saranno tra di loro in ragione delle altezze; perchè (per la Propozione 1. del Lib. 1.) è am : bm :: a : b.

Corollario Quarto.

Se poi due paralellogrami am, e bc saranno eguali, ed avran-

no le basi a, e b tra di loro eguali, avranno parimenti le altezze m, e c tra di loro eguali; imperciocchè è (per l'ipotesi) a m = b c, e a = b; e perciò dividendo a m per a, e b c per b, (per l'Assiom. 5.) resterà m = c. Dunque paralellogrami eguali posti alla medesima parte, e che hanno basi eguali poste nella medesima retta linea, saranno costituiti nelle medesime parallelle.

Corollario Quinto.

Per la stessa ragione i triangoli eguali, posti alla medesima parte, e che hanno le basi eguali costituite nella medesima retta linea, saranno anche posti nelle medesime paralelle, ovvero avranno la medesima altezza; imperciocchè i triangoli sono metà di paralellogrami, che hanno la medesima altezza.

Questa è la Proposizione 40. del Libro I. di Euclide.

PROPOSIZIONE SECONDA.

Teorema.

Fig. XIII. Tav. VII. *Se in qualsivoglia triangolo (ABC) si tiri una retta (FG) paralella alla base (AC), la stessa retta (FG) proporzionalmente taglierà gli altri due lati (AB, CB; cioè sarà AF : FB :: CG : GB). Se poi i due lati (BA, BC) del triangolo (ABC) proporzionalmente saranno tagliati da qualche retta (FG), la stessa retta sarà paralella al lato rimanente, o sia alla base (AC).*

Dimostrazione della Prima Parte.

Tirate le rette AG, FC, i due triangoli AFG, CFG, costituiti nelle medesime paralelle AC, FG, e sopra la medesima base FG (per la Proposizione 32. del Libro 2.) saranno tra di loro eguali; e perciò (per il Corol. 5. della Propos. 2. del Lib. 1.) avranno una medesima ragione allo stesso triangolo BFG; cioè sarà
△AGF: △BFG :: △CFG : △BFG; ma (per la seconda parte della Propos. preced.) i triangoli egualmente alti sono tra di loro in ragion delle basi: dunque sarà
△AFG : △BFG :: AF : FB; e
△CFG : △BFG :: CG : GB; dunque per l'Assiom. 1. sarà
AF : FB :: CG : GB. Il che era in primo luogo da dimostrarsi.

Dimostrazione della Seconda Parte.

Per l'ipotesi è AF : FB :: CG : GB; ma tirate, come prima, le rette AG, FC (per la seconda parte della Propos. preced.) sarà
△AFG : △BFG :: AF : FB; e

△CFG:

△CFG : △BFG :: CG : GB; conseguentemente (per l' Assioma 1.) sarà
△AFG : △BFG :: △CFG : △BFG; e perciò i triangoli AFG, CFG, i quali hanno una medesima ragione al medesimo triangolo BFG, (per il Coroll. 2. della Propos. 3. del Libro I.) saranno tra di loro uguali; hanno poi una medesima base FG, e sono posti a una stessa parte; dunque (per la Propos. 35. del Libro 1.) saranno costituiti nelle medesime parallelle; cioè sarà FG parallella al lato AC. Il che aveasi a dimostrare in secondo luogo.

Questa è la Proposizione 2. del Libro 6. di Euclide.

PROPOSIZIONE TERZA.

Problema.

Da una data retta (AB) tagliare qualsivoglia parte ricercata (per esempio la terza parte).

Si tiri dal punto A l'indefinita AC, la quale colla data AB formi qualsivoglia angolo CAB, ed in essa si taglino le tre parti AE, EF, FG tra di loro eguali; dipoi vi si aggiunga la retta BG, e per il punto E (per la Propos. 23. del Libro 2.) si tiri la retta EL paralella alla retta BG; sarà AL la ricercata terza parte della retta AB. Fig. XIV. Tav. VII.

Dimostrazione.

Nel triangolo BGA la retta EL tirata, (per la costruz.) è paralella al lato GB; perciò (per la prima parte della Prop. 2.) sarà
GE : EA :: BL : LA; e componendo (per la Propos. 4. del Libro I.) sarà
GE + EA : EA :: BL + LA : LA; cioè
GA : EA :: BA : LA; ma così è, che (per la costruz.) la retta GA è tripla della retta EA; dunque anche la retta BA sarà tripla della retta LA; cioè sarà LA la ricercata terza parte della retta BA. Il che erasi proposto da dimostrare.

Questa è la Proposizione 9. del Libro 6. di Euclide.

PROPOSIZIONE QUARTA.

Problema.

Dividere una data retta (AL) nella stessa maniera, con cui un'altra retta (AM) sia stata divisa (ne' punti B, e C). Fig. XV. Tav. VII.

Le date rette AL, AM, talmente si compongano tra di loro, che formino qualsivoglia angolo LAM; dipoi vi si aggiunga la retta LM, a cui (per la Prop. 23. del Libro 2.) si tirino le paralle-

le

le CF, BE, le quali taglieranno la retta AL in parti proporzionali alle parti della retta AM. Tirisi BI paralella alla retta AL.

Dimostrazione.

Ne' triangoli ACF, BIM (per la prima parte della Prop. 2.) è
AB : BC : : AE : EF, e
BC : CM : : BG : GI; ma (per la Proposizion 28. del Lib. 2.) è
BG = EF, e GI = FL; e perciò sostituendo eguali ad eguali, sarà
BC : CM : : EF : FL; per conseguenza la retta AL sarà divisa in parti proporzionali alle parti della retta AM. Il che si era proposto da dimostrare.

Questa è la Proposizione 10. del Libro 6. di Euclide.

PROPOSIZIONE QUINTA.

Problema.

Fig. XVI. Tav. VII.

Date due rette linee (F, e G) ritrovarne una terza proporzionale.

Formisi qualsivoglia angolo rettilineo LCB, e dal lato CB, (per la Prop. 3. del Lib. 2.) si taglino le parti CA = F, AB = G, e dall'altro lato CL si tagli CE = G, dipoi si tiri la retta EA; a questa per il punto B (per la Propos. 23. del Libro 2.) si tiri la retta paralella BL; sarà EL la linea ricercata.

Dimostrazione.

Imperciocchè (per la prima parte della Propos. 2.) è
CA : AB : : CE : EL, cioè
F : G : : G : EL.
Dunque date due rette si è ritrovata la terza proporzionale. Il che erasi proposto da dimostrare.

Questa è la Proposizione 11. del Libro 6. di Euclide.

Corollario Primo.

Se la prima linea F si chiami a, e la seconda G si appelli c, la terza ritrovata EL (per il Coroll. della Propos. 9. del Libro I.) si appellerà $\frac{cc}{a}$; e perciò la linea ritrovata EL esprime il quoziente, che nasce dividendo il quadrato della seconda G per la prima F.

Corollario Secondo.

Oltre a ciò, perchè (per la Dimostrazione) è
F . G : : G : EL, cioè

$\div$ F : G : EL; perciò (per il Corollario della prima Propos. del Libro I.) sarà
F × EL = G²; vale a dire la ritrovata linea EL moltiplicata per la data F forma il rettangolo eguale al quadrato dell' altra data linea G.

PROPOSIZIONE SESTA.

Fig. XVII. Tav. VII.

Problema.

Date tre rette linee (F, G, L.) ritrovare la quarta proporzionale.

Si costituisca l'angolo rettilineo BCM, e dai lati CB, CM, (per la Prop. 3. del Libro 2.) si taglino le parti CA = F, AB = G, e CE = L; dipoi vi si aggiunga la retta AE, a cui per il punto B (per la Propos. 23. del Libro 1.) si tiri la parallela BM; sarà EM la linea ricercata.

Dimostrazione.

Imperciocchè (per la prima parte della Propos. 2.) è
CA : AB :: CE : EM; cioè
F : G :: L : EM, perchè (per la costruz.) è
CA = F, AB = G, e CE = L. Dunque date tre rette si è ritrovata la quarta proporzionale EM. Il che era da farsi, e da dimostrare.

Questa è la Proposizione 12. del Libro 6. di Euclide.

Corollario Primo.

Se le date linee si pongano F = a, G = c, e L = m, allora la ritrovata retta EM (per la Propositz. 9. del Libro I.) sarà $\frac{cm}{a}$: per conseguenza la retta EM è il quoziente, che nasce dividendo per la prima F il rettangolo dalla seconda G nella terza L.

Corollario Secondo.

Poichè (per la Dimostrazione) è
F : G :: L : EM, perciò (per la Propos. 1. del Libro 1.) sarà
F × EM = G × L. Acciò dunque sopra la linea F si descriva un rettangolo uguale al rettangolo da G in L, alle tre rette F, G, L si ritrovi la quarta proporzionale EM.

PROPOSIZIONE SETTIMA.

Teorema.

I triangoli equiangoli avranno proporzionali i lati opposti agli angoli eguali.

Sieno i due triangoli ABC, EFG equiangoli, i quali cioè abbiano gli angoli eguali A = E, B = F, e C = G, avranno proporzionali

Fig. 1. Tav. VIII.

nali i lati posti tra gli angoli eguali, cioè sarà
AB : EF : : AC : EG : : BC : FG.

Pongasi l'angolo F sopra l'uguale angolo B; oppure (che è il medesimo) da' lati BA, BC (per la Propos. 3. del Libro 2.) si taglino le parti BI = FE, BL = FG, e si tiri IL.

Dimostrazione.

I trangoli IBL, EFG, che hanno il lato BI = FE, il lato BL = FG, e (per l'ipotesi) l'angolo B = F, (per la Prop. 6. del Libro 2.) saranno uguali; cioè sarà la base IL = EG, l'angolo LIB = E, e l'angolo ILB = G; ma (per l'ipotesi) sono gli angoli A = E, e C = G; dunque (per l'Assiom. 1.) sarà l'angolo LIB = A, e ILB = C, cioè l'esterno all'interno, ed opposto alla medesima parte; e perciò (per la seconda parte della Prop. 19. del Libro 2.) sarà IL paralella alla retta AC. Per conseguenza (per la prima parte della Propos. 2.) sarà AI : IB : : CL : LB; e componendo (per la Prop. 4. del Libro 1.) sarà
AI + IB : IB : : CL + LB : LB, cioè
AB : BI : : CB : BL; e sostituendo i lati FE, FG per gli eguali BI, BL, sarà
AB : FE : : CB : FG.

Nella stessa maniera se l'angolo G soprappongasi all'angolo eguale C, si dimostrerà
CB : FG : : AC : EG; e (per l'Assiom. 1.) sarà
AB : FE : : AC : EG. Adunque i lati opposti agli angoli eguali saranno proporzionali; cioè
AB : EF : : AC, EG : : BC : FG; e alternando (per la seconda parte della Propos. 3. del Libro 1.) sarà
AB : AC : : EF : EG, e
AC : BC : : EG : FG, e
AB : BC : : EF : FG. Il che era da dimostrarsi.

Questa è la Propos. 4. del Libro 6. di Euclide.

Corollario.

Quindi la retta IL paralella al lato AC taglia il triangolo IBL simile all'intero triangolo ABC.

PROPOSIZIONE OTTAVA.

Teorema.

I triangoli, che hanno i lati proporzionali, sono anche equiangoli.

Fig. II. Tav. VIII. I due triangoli ABC, EFG abbiano i lati proporzionali
AB : BC : : EF : FG, e

AC

AC : CB :: EG : FG, ecc. avranno gli angoli eguali, a' quali sono opposti i lati omologi, cioè A = E, B = EFG, e C = EGF.

Sopra FG al punto F si costituisca l'angolo GFL = B (per la Propos. 10. del Libro 2.), e al punto G si faccia l'angolo FGL = C, sarà (per il Coroll. 7. della Propoſiz. 24. del Libro 2.) il rimanente angolo L uguale al rimanente A.

Dimostrazione.

I due triangoli ABC, FGL (per la costruz.) equiangoli, (per la Propos. preced.) avranno i lati proporzionali; cioè sarà
AB : BC :: FL : FG; e
AC : CB :: LG : FG; ma (per l'ipotesi) è
AB : BC :: FE : FG, e
AC : CB :: EG ; FG; perciò (per l'Assiom. 1.) sarà
FL : FG :: FE : FG, e
LG : FG :: EG : FG; conseguentemente (per il Coroll. 2. della Propos. 3. del Libro 1.) sarà
FL = FE, e LG = EG; è inoltre FG una base comune ai due triangoli FEG, FLG, e così (per la Propos. 9. del Libro 2.) gli stessi triangoli avranno gli angoli eguali, cioè E = L, EFG = LFG, e EGF = LGF; ma (per la costruzione) è l'angolo LFG = B, l'angolo LGF = C, e L = A; dunque (per l'Assiom. 1.) sarà l'angolo A = E, l'angolo B = EFG, e l'angolo C = EGF. Il che era da dimostrarsi. Questa è la Propoſiz. 5. del Lib. 6. di Euclide.

PROPOSIZIONE NONA.

Teorema.

I triangoli (ABC, EFG), che hanno un angolo (B) uguale a un angolo (F), e i lati, che costituiscono i medesimi angoli, proporzionali (cioè AB : EF :: BC : FG); avranno gli angoli rimanenti uguali (A = E, e C = G), a' quali sono opposti i lati proporzionali; e gli stessi triangoli saranno simili. Fig. III. Tav. VIII.

Dai lati BA, BC (per la Propos. 3. del Libro 2.) si taglino le parti BI = EF, BL = FG, e si tiri IL.

Dimostrazione.

I due triangoli ILB, EFG (per la costruz.) hanno il lato BI = EF; BL = FG, e (per l'ipotesi) l'angolo B = F; perciò (per la Propos. 6. del Libro 2.) sarà il lato IL = EG, l'angolo LIB = E, e l'angolo ILB = G; è poi (per l'ipotesi)

AB : EF : : BC : FG ; laonde sostituendo eguali per eguali sarà AB : BI : : BC : BL, e dividendo (per la Propos. 5. del Libro 1.) sarà AB — BI : BI : : BC — BL : BL, cioè AI : BI : : CL : BL ; dunque (per la seconda parte della Proposizione 2.) la retta LI sarà parallela al lato CA, e (per la seconda parte della Propos. 22. del Lib. 2.) sarà l'angolo esterno ILB = C, e l'angolo LIB = A ; ma già abbiamo dimostrato l'angolo ILB = G, e l'angolo LIB = E ; conseguentemente (per l'Assiom. 1.) sarà l'angolo A = E, e l'angolo C = G ; e (per la Prop. 7.) i triangoli ABC, EFG saranno simili. Il che era da dimostrarsi.

Questa è la Proposizione 6. del Libro 6. di Euclide.

PROPOSIZIONE DECIMA.

Teorema.

Fig. IV. Tav. VIII.

Se per qualsivoglia punto (I) del diametro (BR) nel parallelogramo (AC) si tirino due rette (GL, FE) parallele ai lati del medesimo parallelogramo, le stesse rette divideranno tutto il parallelogramo in quattro parallelogrami, due de' quali (GF, ed EL), che sono intorno al diametro (BR), saranno simili all'intero parallelogramo (AC), e tra di loro : gli altri poi due parallelogrami (GE, FL), che diconsi Compimenti di quelli, che sono intorno al diametro, saranno tra di loro eguali.

Dimostrazione della Prima Parte.

Nel triangolo BRC la retta IL (per l'ipotesi) parallela al lato RC (per il Coroll. della Propos. 7.) taglia il triangolo ILB simile all'intero triangolo BRC ; similmente nel triangolo ARB la retta EI (per il Coroll. della Propos. 7.) taglia il triangolo EIB simile al triangolo ABR ; e perciò (per la Defin. 1.) sarà

RC : CB : : IL : LB, e
AR : AB : : EI : EB ; parimenti
CB : BR : : LB : BI, e
BR : BA : : BI : BE ; ed ordinando (per la Propos. 6. del Libro 1.) sarà
CB : BA : : LB : BE ; laonde ad eguali sostituendo eguali, sarà anche AR : RC : : EI : IL ; perciò i parallelogrami AC, EL hanno i lati proporzionali ; oltre a ciò hanno gli angoli eguali contenuti da' lati proporzionali, perchè (per la seconda parte della Propos. 21. del Libro 2.) è l'angolo A = IEB, l'angolo C = ILB, e l'angolo ARC = EIL, perchè (per la Propos. 28. del Libro 2.) sono ambidue eguali all'opposto angolo comune ABG ; dunque (per la Definiz. 1.) il parallelogramo EL sarà simile al parallelogramo AC, al quale nella stessa maniera si dimostra simile il parallelogramo GF.

con-

conseguentemente (per il Coroll. della Defin. 1,) sarà anche il paralellogramo EL simile al paralellogramo GF. Il che era in primo luogo da dimostrarsi.

Questa è la Proposizione 24. del Libro 6. di Euclide.

Dimostrazione della Seconda Parte.

Il diametro BR (per la Propos. 28. del Libro 2.) divide i paralellogrami AC, GF, EL in due parti; perciò è △ABR = △BCR, △IGR = △IFR, e △EIB = △ILB; e dagli eguali triangoli ABR, BCR togliendo gli eguali triangoli IGR, EIB dal primo ABR, e IFR, ILB dall'altro BCR, (per l'Assiom. 3.) resterà il paralellogramo GE = al paralellogramo FL; vale a dire i compimenti saranno tra di loro eguali. Il che era in secondo luogo da dimostrarsi.

Questa è la Proposizione 43. del Libro I. di Euclide.

Corollario.

Quindi se il dato paralellogramo sarà quadrato, anche i paralellogrami intorno al di lui diametro saranno quadrati; perchè (per la prima Dimostrazione) sono simili al medesimo paralellogramo dato.

PROPOSIZIONE UNDECIMA.

Teorema.

I paralellogrami simili, e collocati in simil maniera, che hanno un angolo comune, saranno posti intorno al medesimo diametro.

I due paralellogrami BM, LG, abbiano l'angolo A comune, siano simili, e posti in simil modo; cioè sia l'angolo B = ILA, e i lati proporzionali. Fig. V. Tav. VIII.

AB : BC :: AL : LI, ecc.; dico che il diametro AI coincide col diametro AC.

Dimostrazione.

Imperciocchè (per l'ipotesi) è l'angolo B = ILA, e i lati che formano i medesimi angoli sono proporzionali, cioè AB : BC :: AL : LI; dunque (per la Propos. 9.) sarà l'angolo CAB = IAL; ma il lato AL coincide col lato AB, perchè l'angolo A è comune all'uno, e all'altro paralellogramo; e perciò anche il lato AI coincidera col lato AC; per conseguenza i paralellogrami BM, e LG saranno costituiti intorno al medesimo diametro AC. Il che era da dimostrarsi.

Questa è la Proposizione 26. del Libro 6. di Euclide.

PROPOSIZIONE DUODECIMA.

Problema.

Fig. VII. Tav. VIII. *Sopra una data retta (AB) terminata descrivere un rettilineo simile a un dato rettilineo (E F G C), e posto in simil modo.*

Da qualsivoglia angolo F del dato poligono E F G C a ciascun degli angoli opposti si tirino le linee diagonali, come F C, le quali dividano il poligono in triangoli. Dipoi sopra la retta A B (per la Propos. 23. del Libro 2.) si costituiscano gli angoli L B A = F E C, ed L A B = F C E, e (per il Coroll. 7. della Propos. 24. del Libro 2.) sarà il rimanente angolo A L B = C F E. Similmente sopra A L si facciano gli angoli t = f, ed r = m, il rimanente angolo I sarà eguale al rimanente G, e così andando inanzi, se il poligono dato contenga più triangoli; sarà A B L I il ricercato rettilineo.

Dimostrazione.

I triangoli A I L, G F C (per la costruz.) sono equiangoli, epperciò (per la Propos. 7.) sarà

A I : A L : : C G : C F.

Similmente ne' triangoli A B L, E F C (per la costruz.) equiangoli sarà

A L : A B : : C F : C E; e perciò ordinando (per la Propos. 6. del Libro 1.) sarà

A I : A B : : C G : C E.

Nella stessa guisa si dimostra

B L : L I : : E F : F G; oltre a ciò (per la Propos. 7.) è

L I : I A : : F G : G C, e

A B : B L : : C E : E F; laonde i lati sono proporzionali: gli angoli poi (per la costruzione) sono eguali

B = E, I = G, I A B = G C E, e I L B = G F E: dunque (per la Defin. 1.) il poligono I L B A è simile al poligono E F G C, e nello stesso modo descritto sopra A B. Il che erasi proposto da dimostrare.

Questa è la Proposizione 18. del Libro 6. di Euclide.

PROPOSIZIONE TERZADECIMA.

Teorema.

I triangoli simili sono tra di loro in ragion duplicata, cioè come i quadrati de' lati omologi.

Fig. VIII. Tav. VIII. Sieno i due triangoli simili A B C, E F I, i quali cioè (per la Defin. 1.) abbiano l'angolo B = F, A = E, C = I, e i lati proporzionali

A C

AC : EI : : AB : EF, : : BC : FI;
dico, che il △ ABC al △ EFI ha la ragion duplicata del lato AC al lato EI, ovvero AB ad EF, ecc. cioè sarà
△ ABC : △ EFI : : $\overline{AC}^2$: $\overline{EI}^2$, ovvero : : $\overline{AB}^2$: $\overline{EF}^2$, ecc.

Il triangolo EFI pongasi sopra il triangolo ABC, cosicchè il punto E cada in A, e il lato EF cada in AZ sopra il lato AB; l'altro lato EI, attesa l'uguaglianza degli angoli A, ed E, cadrà sopra AC, come in AL, e il lato FI cada in ZL. Dipoi vi si aggiunga la retta LB.

Dimostrazione.

I triangoli ABC, ABL, che hanno il comune vertice B, e le basi AC, AL nella medesima retta AC (per la Definiz. 4.) sono egualmente alti. Similmente sono egualmenti alti i due triangoli ALB, ALZ, perchè hanno le basi AB, AZ, nella medesima retta AB, e il vertice comune L. Ma i triangoli ABC, ABL, ALZ, sono quantità omogenee (Aritmet. n°. 26.); perciò la ragion del primo ABC al terzo ALZ (per la Propoſiz. 16. del Libro 1.) sarà composta dalle ragioni del primo ABC al secondo ABL, e del secondo ABL al terzo ALZ; ma (per la seconda parte della Propoſiz. 1.) è la ragion del triangolo ABC al triangolo egualmente alto ABL, siccome la base AC alla base AL, e il
△ ABL : △ ALZ : : AB : AZ;
perciò la ragion del primo triangolo ABC al terzo ALZ (ovvero all'egual triangolo EFI) è composta dalle due ragioni AC : AL, e AB : AZ, cioè dalle ragioni AC : EI, e AB : EF, imperciocchè è AL = EI, e AZ = EF (per la costruzione): ma per l'ipotesi è AC : EI = AB : EF; dunque la ragion del triangolo ABC al triangolo EFI è composta dalle due eguali ragioni AC : EI, e AB : EF; e perciò (per il Coroll. 1. della Defin. 7. del Libro 1.) fatta duplicata dell'una, e dell'altra, cioè (per il Coroll. 2. della Definiz. 7. del Libro 1.) sarà
△ ABC : △ EFI = $\overline{AC}^2$: $\overline{EI}^2$, ovvero : : $\overline{AB}^2$: $\overline{EF}^2$, oppure anche = $\overline{BC}^2$: $\overline{FI}^2$ (per la Propoſiz. 13. del Libro 1.), perchè (per l'ipotesi) è AB : EF = BC : FI = AC : EI. Per la qual cosa i triangoli simili sono tra di loro in ragion duplicata, cioè siccome i quadrati de' lati omologi: il che era da dimostrarsi.

Questa è la Propoſizione 19. del Libro 6. di Euclide.

Corollario Primo.

Se alle due rette AC, EI, si ritrovi la terza proporzionale M, sarà la prima AC alla terza M, siccome il triangolo ABC al simile triangolo EFI; imperciocchè essendo (per la costruz.) AC : EI : : EI : M; perciò (per il Coroll. 4. della Propoſ. 2. del Libro 1.) sarà AC : M : :

$\overline{AC}^2$

$\overline{AC}^2 : \overline{EI}^2$; ma per la precedente Dimostrazione abbiamo $\triangle ABC : \triangle EFI :: \overline{AC}^2 : \overline{EI}^2$; dunque (per l'Assiom. 1.) sarà $AC : M :: \triangle ABC : \triangle EFI$, cioè la prima linea a una terza siccome il triangolo ABC descritto sopra la prima, al simile triangolo EFI sopra la seconda EI similmente descritto.

Corollario Secondo.

Poichè per le cose dimostrate è $\triangle ABC : \triangle EFI :: \overline{AC}^2 : \overline{EI}^2$, perciò se il lato AC sarà duplo del lato omologo EI, il triangolo ABC sarà quadruplo del triangolo EFI. Se il lato AC sarà decuplo del lato EI, il triangolo ABC cento volte conterrà il triangolo EFI, ecc.

PROPOSIZIONE QUARTADECIMA.

Teorema.

Fig. IX. Tav. VIII. *I parallellogrami equiangoli* (R, ed S) *sono tra di loro in ragione composta dalle ragioni* (AB : BE, e BC : BG) *de' lati, che costituiscono gli angoli eguali* (cioè sarà $R : S :: AB \times BC : BE \times BG$).

I lati AB, BE si pongano direttamente in tal modo, che gli angoli eguali ABC, EBG sieno opposti, e (per il Coroll. della Propoſiz. 17. del Libro 2.) i lati CB, BG, altresì giaceranno direttamente. Si allunghino i lati DC, FE fin tanto che si rincontrino, come in L.

Dimostrazione.

I parallellogrami R, X, ed S (Aritmet. n°. 26.) sono quantità del medesimo genere; perciò (per la Propoſ. 16. del Libro 1.) la ragion del primo R all'ultimo S sarà composta da tutte le ragioni intermedie del primo R al secondo X, e del secondo X al terzo S. Ma (per la prima parte della Propoſ. 1.) è

$\square R : \square X :: AB : BE$, e

$\square X : \square S :: CB : BG$;

e perciò la ragion del parallellogramo R al parallellogramo S sarà composta dalle due ragioni $AB : BE$, e $CB : BG$; cioè (per il Coroll. 3. della Definiz. 6. del Libro 1.) sarà

$\square R : \square S :: AB \times CB : BE \times BG$. Il che era da dimostrarsi.

Questa è la Propoſizione 23. del Libro 6. di Euclide.

Corollario.

Dunque se sarà $\square R = \square S$, sarà anche $AB \times CB = BE \times BG$;

BG; e (per il Coroll. 1. della Proposiz. 2. del Libro 1.) disciogliendo sarà AB : BE : : BG : CB; cioè i parallelogrami eguali, ed equiangoli avranno i lati reciprocamente proporzionali.

Se poi i parallelogrami equiangoli avranno i lati reciprocamente proporzionali

AB : BE : : BG : CB, allora (per la Proposizione 1. del Libro 1.) sarà

AB × CB = BE × BG; per conseguenza sarà anche □ R = □ S, perchè (per la Dimostrazione) è

□ R : □ S : : AB × CB : BE × BG; vale a dire, i parallelogrami equiangoli, e che hanno i lati reciprocamente proporzionali, saranno tra di loro uguali.

Questa è la Proposizione 14. del Libro 6. di Euclide.

Fig. VI. Tav. VIII.

Anche i triangoli equiangoli, se saranno uguali, avranno i lati reciprocamente proporzionali; e scambievolmente se avranno i lati reciprocamente proporzionali, saranno eguali tra di loro; perchè i triangoli (per il Coroll. 1. della Propos. 15. del Libro 1.) sono tra di loro nella medesima ragione, in cui sono i parallelogrami, de' quali (per la Propos. 28. del Libro 2.) sono metà.

Questa è la Proposizione 15. del Libro 6. di Euclide.

PROPOSIZIONE QUINTADECIMA.

Teorema.

I poligoni simili sono tra di loro in ragion duplicata, o sia come i quadrati de' lati omologi.

Fig. X. Tav. VIII.

Sieno i due poligoni simili ABMRC, EFILG, sarà il poligono ABMRC al poligono EFILG : : $\overline{AC}^2$: $\overline{EG}^2$, ovvero : : $\overline{AB}^2$: $\overline{EF}^2$, ecc.

Dagli angoli eguali M, ed I agli angoli opposti si tirino le rette MA, MC, IE, IG, le quali taglieranno i poligoni in triangoli simili, e in numero eguali.

Dimostrazione.

Poichè (per l'ipotesi) i poligoni sono simili, perciò (per la Definiz. 1.) è l'angolo B = F, e i lati proporzionali AB : BM : : EF : FI, e (per la Proposiz. 9.) i triangoli ABM, EFI, saranno simili. Nella stessa maniera si dimostrano simili i triangoli MRC, ILG. Oltre a ciò se dagli angoli (per l'ipotesi) eguali CAB, GEF si tolgano gli angoli MAB, IEF (per la Dimostr.) eguali, (per l'Assiom. 3.) resterà l'angolo CAM uguale all'angolo IEG. Ma (per l'ipotesi) è BA : FE : : AC : EG, e (per la Di-

mo-

moſtrazione) è l'angolo CAM = IEG, perciò (per la Propoſ. 9.) anche i triangoli AMC, EIG ſaranno ſimili tra di loro. I triangoli ſimili poi (per la Propoſiz. 13.) ſono tra di loro in ragion duplicata de' lati omologi; dunque ſarà △ ABM : △ EIF :: $\overline{AB}^2$: $\overline{EF}^2$, e △ AMC : △ EIG :: $\overline{AC}^2$: $\overline{EG}^2$; parimenti △ MCR : △ ILG :: $\overline{CR}^2$: $\overline{GL}^2$; ma così è, che (per l'ipoteſi) è AB : EF :: AC : EG :: CR : GL, cioè (per la Propoſ. 13. del Lib. 1.) $\overline{AB}^2$: $\overline{EF}^2$ :: $\overline{AC}^2$: $\overline{EG}^2$ :: $\overline{CR}^2$: $\overline{GL}^2$; dunque (per l'Aſſioma 1.) ſarà △ ABM : △ EIF :: △ AMC : △ EIG :: △ MCR : △ ILG; e (per la Propoſiz. 8. del Libro 1.) raccogliendo ſarà △ ABM : △ EFI :: △ ABM + △ AMC + △ CMR : △ EFI + △ EIG + △ IGL, cioè

△ ABM : △ EFI ſiccome il poligono ABMRC al poligono EFILG :: $\overline{AB}^2$: $\overline{EF}^2$, ovvero :: $\overline{AC}^2$: $\overline{EG}^2$, oppure :: $\overline{BM}^2$: $\overline{FI}^2$, ecc.; perchè (per la Dimoſtrazione) è $\overline{AB}^2$: $\overline{EF}^2$ :: $\overline{AC}^2$: $\overline{EG}^2$ :: $\overline{BM}^2$: $\overline{FI}^2$ ecc. Laonde (per la Definiz. 7. del Libro 1., e per il Coroll. 2.) i poligoni ſimili ſaranno tra di loro in ragion duplicata de' lati omologi. Il che era da dimoſtrarſi.

Queſta è la Propoſizione 20. del Libro 6. di Euclide.

Corollario.

Per tanto ſe vi ſaranno tre rette continue proporzionali :: AC : EG : M, il poligono deſcritto ſopra la prima AC al poligono ſimile e ſimilmente deſcritto ſopra la ſeconda EG (per l'Aſſiom. 1.) ſarà come la prima linea AC alla terza M; perchè (per il Coroll. 4. della Propoſiz. 2. del Libro 1.) è parimenti AC : M = $\overline{AC}^2$: $\overline{EG}^2$.

PROPOSIZIONE SESTADECIMA.

Teorema.

Fig. XI. Tav. VIII. *Se vi ſaranno quattro, o più linee rette proporzionali (AB : CD :: EF : GH), anche i poligoni ſimili, e ſimilmente da eſſe deſcritti, ſaranno proporzionali (M : N :: R : S). E ſcambievolmente ſe poligoni ſimili, e ſimilmente deſcritti da linee rette, ſaranno proporzionali (cioè M : N :: R : S), anche le ſteſſe rette ſaranno proporzionali (cioè ſarà AB : CD :: EF : GH).*

Dimoſtrazione della Prima Parte.

Primieramente (per l'ipoteſi) abbiamo AB : CD :: EF : GH, e perciò (per la Propoſ. 13. del Libro 1.) ſarà $\overline{AB}^2$: $\overline{CD}^2$ :: $\overline{EF}^2$: $\overline{GH}^2$. Ma (per la Propoſiz. precedente) i poligoni ſimili ſono tra di lo-

ro

no come i quadrati de' lati omologi, cioè $M : N :: \overline{AB}^2 : \overline{CD}^2$, ed $R : S :: \overline{EF}^2 : \overline{GH}^2$. Dunque (per l'Assioma 1.) sarà $M : N :: R : S$. Il che era in primo luogo da dimostrarsi.

Dimostrazione della Seconda Parte.

In secondo luogo è (per l'ipotesi) $M : N :: R : S$; ma (per la Propos. preced.) è $M : N :: \overline{AB}^2 : \overline{CD}^2$, ed $R : S :: \overline{EF}^2 : \overline{GH}^2$, perciò (per l'Assiom. 1.) sarà $\overline{AB}^2 : \overline{CD}^2 :: \overline{EF}^2 : \overline{GH}^2$, e (per la Propos. 13. del Libro 1.) sarà $AB : CD :: EF : GH$. Il che erasi proposto in secondo luogo da dimostrare.

Questa è la Proposizione 22. del Libro 6. di Euclide.

PROPOSIZIONE DECIMASETTIMA.

Teorema.

In ogni triangolo rettangolo (ABC) se dall' angolo retto (in B) sopra l'ipotenusa (AC) si cali una linea perpendicolare (BL), essa dividerà tutto il triangolo in due triangoli (ABL, BLC) simili al tutto (ABC), e simili tra di se. Fig. XII. Tav. VIII.

Dimostrazione.

I due triangoli ABC, ABL, hanno l'angolo A comune, e l'angolo retto ABC (per l'Assiom. 16.) eguale al retto ALB; laonde (per il Coroll. 7. della Propos. 24. del Libro 2.) l'angolo rimanente C sarà eguale al rimanente angolo ABL: e perciò (per la Propositz. 7.) i triangoli ABC, ABL saranno simili. Sarà dunque l'ipotenusa AC all'ipotenusa AB siccome il medesimo lato AB opposto all'angolo C nel triangolo ABC al lato AL opposto all'angolo eguale ABL, cioè sarà $\div AC : AB : AL$. Col medesimo raziocinio il triangolo ABC si dimostra simile al triangolo BLC, imperciocchè hanno l'angolo C comune, e l'angolo retto ABC eguale al retto BLC; e perciò sarà il rimanente A eguale al rimanente angolo CBL. Per tanto (per la Propositz. 7.) sarà $AC : CB :: CB : CL$, cioè $\div AC : CB : CL$. Finalmente (per il Coroll. della Definiz. 1.) saranno simili tra di loro i triangoli ABL, BLC; e (per la dimostrazione) è l'angolo $A = LBC$, l'angolo $ALB = BLC$, e l'angolo $LBA = C$; e perciò (per la Propos. 7.) sarà $AL : LB :: LB : LC$, cioè $\div AL : LB : LC$. Il che era da dimostrarsi.

Questa è la Proposizione 8. del Libro 6. di Euclide.

Corollario Primo.

Quindi qualunque Cateto AB, ovvero BC, è il medio proporzionale

male tra l'ipotenusa AC, e il di lui segmento AL, o LC, interposto tra il medesimo cateto, e la perpendicolare calata dall'angolo retto all'ipotenusa. Imperciocchè abbiamo dimostrato essere $\doteq$ AC : AB : AL, e $\doteq$ AC : CB : CL; e perciò (per il Coroll. della Propoſiz. 1. del Libro 1.) ſarà il rettangolo AC × AL = $\overline{AB}^2$, e il rettangolo AC × CL = $\overline{CB}^2$; e dividendo queſte equazioni per AC (per l'Aſſiom. 5.) ſi avrà AL = $\frac{\overline{AB}^2}{AC}$, e CL = $\frac{\overline{CB}^2}{AC}$; cioè, ſe il quadrato di qualſivoglia cateto ſi divida per l'ipotenusa, il quoziente darà un ſegmento dell'ipotenusa frapposto tra il medeſimo cateto, e la perpendicolare calata dall'angolo retto all'ipotenusa.

Corollario Secondo.

Oltre a ciò (per la Dimoſtraz.) è $\doteq$ AL : LB : LC, cioè la perpendicolare BL calata dall'angolo retto all'ipotenusa AC è la media proporzionale tra i ſegmenti AL, LC della medeſima ipotenusa; e (per il Coroll. della Propoſ. 1. del Libro 1.) ſarà il rettangolo AL × LC = $\overline{LB}^2$.

PROPOSIZIONE DICIOTTESIMA.

Teorema.

Fig. XIII. Tav. VIII. *Se ſopra l'ipotenusa (AC) di qualſivoglia triangolo rettangolo (ABC) ſi deſcriva qualſiſia figura rettilinea (M), e ſopra i catèti (AB, BC) ſi deſcrivano due figure (S, T) ſimili alla medeſima figura (M), e poſte in ſimil modo; la figura (M) deſcritta ſopra l'ipotenusa ſempre ſarà uguale alle due figure (S, T) deſcritte ſopra i catèti prese inſieme.*

Dall'angolo retto in B all'ipotenusa AC (per la Propoſ. 14. del Lib. 2.) ſi cali la perpendicolare BL.

Dimoſtrazione.

Poichè (per la Propoſiz. precod.) è $\doteq$ AC : AB :: AB : AL, perciò (per il Coroll. 1. della Propoſiz. 13.) ſarà il rettilineo M deſcritto ſopra la prima AC al rettilineo S deſcritto ſopra la ſeconda AB, come la prima AC alla terza AL, cioè ſarà M : S :: AC : AL. Similmente, perchè (per la Propoſiz. precod.) è $\doteq$ AC : CB :: CB : CL, perciò (per il Coroll. 1. della Propoſiz. 13.) ſarà M : T :: AC : CL; laonde le due proporzioni M : S :: AC : AL, ed M : T :: AC : CL hanno i medeſimi antecedenti M, ed AC; e così (per il Coroll. della Propoſiz. 21. del Libro 2.) ſarà M : S + T :: AC :

AC : AL + CL. Ma (per l'Assiom. 11.) è AC = AL + CL; dunque sarà anche M = S + T. Il che era da dimostrarsi.

Questa è la Proposizione 31. del Libro 6. di Euclide.

Corollario Primo.

Poichè tutti i quadrati (per la Defin. 1.) sono figure rettilinee simili, perciò in ogni triangolo rettangolo ABC il quadrato AF dell'ipotenusa AC sarà eguale ai due quadrati AR, BL dei cateti AB, BC presi insieme. Fig. XIV. Tav. VIII.

Questa è la Proposizione 47. del Libro 1. di Euclide.

Corollario Secondo.

Se un triangolo ACD sarà Isoscele, allora il quadrato dell'Ipotenusa CD sarà duplicato del quadrato dal Cateto AC, quanto del quadrato dal Cateto AD; imperciocchè (per il Corollario preced.) è $\overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2$: ma i quadrati delle linee uguali AD, AC (Aritmet. 182.) sono tra di loro eguali; perciò il quadrato dell'Ipotenusa CD sarà doppio tanto del quadrato dal Cateto AD, quanto del quadrato dal Cateto AC; cioè sarà il quadrato dell'Ipotenusa CD al quadrato del Cateto AD, o AC, siccome due ad uno, vale a dire $\overline{CD}^2 : \overline{AD}^2 = 2 : 1$. Fig. XVI. Tav. VIII.

Corollario Terzo.

Quindi il diametro AC del quadrato BM si dimostra incommensurabile a un lato del medesimo quadrato. Imperciocchè nel triangolo Isoscele ABC (per il Corollario preced.) abbiamo $\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 :: 2 :: 1$; ed estraendo la radice quadrata da ciascun termine della proporzione (per la Propos. 13. del Libro 1.) sarà $AC : AB = \sqrt{2} : 1$; ma $\sqrt{2}$ (Aritmet. 147, 149.) è un numero irrazionale, o sia incommensurabile; perciò il diametro AC è al lato AB come un numero irrazionale all'unità: per conseguenza il diametro AC non è commensurabile al lato AB, perchè (Aritmet. 147, 148.) le quantità commensurabili sono tra di loro come un numero razionale all'unità, o come un numero razionale ad un altro numero razionale. Fig. II. Tav. IX.

Questa è la Proposizione 117. del Libro 10. di Euclide.

PROPOSIZIONE DICIANNOVESIMA.

Problema.

Ritrovare una linea retta, il di cui quadrato eguagli i quadrati di più date linee (A, B, C) ecc.

Fig. 1. Tav. IX. Si tiri su d'un piano la retta EF = A, e sopra EF (per la Propos. 13. del Libro 2.) si alzi la perpendicolare FG = B, e si tiri l'Ipotenusa EG, il di cui quadrato (per il Coroll. 1. della Propos. preced.) sarà eguale ai due quadrati de' cateti EF, FG, cioè (per la costruzione) delle linee A, e B. Similmente sopra la retta EG si alzi la perpendicolare GL = C, e si tiri l'ipotenusa EL, il di cui quadrato (per il Coroll. 1. della Propos. preced.) sarà eguale ai due quadrati de' cateti EG, GL, ovvero GE, e C; ma il quadrato della linea GE si è dimostrato eguale ai quadrati delle linee A, e B; dunque il quadrato della retta LE uguaglia i tre quadrati delle linee A, B, C, presi insieme; e così andando inanzi, se più saranno le date rette, sempre ritroverassi la linea ricercata. Il che erasi proposto.

DEGLI ELEMENTI DELLA GEOMETRIA

LIBRO QUARTO.

Definizione Prima.

Circoli Concentrici diconsi quelli, che hanno un medesimo centro. Circoli poi *Eccentrici* sono quelli, che hanno centri diversi.

Definizione Seconda.

Tangente del Circolo dicesi quella linea retta, che tocca in un sol punto la periferia d'un circolo, e che allungata dall'una, e dall'altra parte indefinitamente, non taglia la stessa periferia; come la retta EB, che tocca il circolo nel punto L. Fig. III. Tav. IX.

Angolo del contatto dicesi l'angolo mistilineo (ALE, o CLB) formato dalla tangente, e dalla periferia del circolo.

Definizione Terza.

Circoli eguali sono quelli, che hanno diametri, o raggi eguali, e che scambievolmente soprapposti si combaciano.

Definizione Quarta.

L'angolo rettilineo (ABC) si dice *Contenuto*, o *Iscritto* nel segmento (ABC) del circolo, quando si forma da linee rette (AB, CB) tirate dai termini (A, e C) del medesimo segmento a qualche punto (B) della periferia. Fig. IV. Tav. IX.

Oltre a ciò il medesimo angolo (ABC) dicesi *insistere* all'arco opposto (AEC), perchè i di lui lati (BA, BC) si appoggiano sul medesimo arco.

Similmente l'angolo BCA dicesi iscritto nel segmento BCEA, ed insistere all'arco BA; e così degli altri.

Definizione Quinta.

Dato un angolo rettilineo (BAE), se essendo centro il di lui vertice (A), e con qualsivoglia intervallo descrivasi un circolo (BCFE), allora l'arco (ELB) tolto in mezzo dai lati dell'angolo (AB, AE) si chiami *Misura* del medesimo angolo. Imperciocchè quanto maggiore è l'angolo (BAE), tanto maggiore sarà l'arco opposto (ELB); e al contrario quanto minore è l'angolo, tanto Fig. V. Tav. IX.

to minor sarà l'arco opposto. Similmente l'arco FE è la misura dell'angolo BAF; e l'arco HEC è la misura dell'angolo EAC; e così degli altri.

Definizione Sesta.

Fig. VI. Tav. IX. *La Periferia* di qualsivoglia circolo (ABEL) si suol dividere in treçento, e sessanta parti, o archi eguali, che si appellano *Gradi del circolo*. Di nuovo qualsivoglia grado dividesi in altre sessanta parti eguali, che si dicono *Minuti Primi* del circolo. Qualsisia minuto primo poi di più dividesi in altre sessanta parti eguali, che si chiamano *Minuti Secondi*: e lo stesso intendasi de' Minuti terzi, quarti, ecc.

Per la qual cosa il Semicircolo ABE, o ALE conterrà cento e ottanta gradi, e una quarta parte della circonferenza EB, ovvero AB ne conterrà novanta.

Oltre a ciò l'intero circolo conterrà minuti primi 360×60, cioè 21600; e minuti secondi 21600×60, vale a dire 1296000.

Definizione Settima.

Fig. VI. Tav. IX. Se dal centro C sopra il diametro AE si alzi la perpendicolare CB, sarà l'arco AB eguale all'arco BE, come dalla stessa descrizione del circolo (per la Definiz. 15. del Lib. 2.) evidentemente apparisce; e perchè la linea BC (per la Defin. 9. del Libro 2.) non s'inclina più verso A, che verso E, perciò la misura dell'angolo retto (ACB) è l'arco opposto (AB) di gradi novanta. Similmente l'arco BFE di gradi novanta è misura dell'angolo retto BCE. E così degli altri.

Ma la misura dell'angolo ottuso (ACF) è l'arco opposto (ABF) maggior dell'arco (BA) di gradi novanta.

La misura poi dell'angolo acuto (ECE) è l'arco opposto (FE) minore dell'arco (BE) di novanta gradi.

Corollario.

Dunque la semicirconferenza (ABE) è la misura di due retti (ACB, BCE); e l'intera periferia è la misura di quattro angoli retti.

Definizione Ottava.

Il Settore del circolo è una figura piana mistilinea (CAB) compresa da due raggi (CA, CB) e dall'arco (BA) che sia posto tra essi. Fig. VII. Tav. IX. Quando l'angolo (BCA) contenuto da raggi è retto, l'arco (BA) interposto (ch'è quarta parte della periferia per il Corollario precedente) chiamasi *Quadrante* del circolo, perchè una quarta parte del circolo intero [illegible] opposto (EB); e al contrario quanto minore è l'angolo

PROPOSIZIONE PRIMA.

Teorema.

I circoli concentrici (BCFG, ERIL) hanno le periferie parallele, o sia equidistanti.

Fig. VIII. Tav. II.

Dimostrazione.

Dal comun centro A si tirino quanti raggi si vogliono AB, AC, AF, AG, ecc., i quali (per la Definiz. 15. del Libro 1.) saranno tra di loro eguali; e da essi togliendo i raggi, o sia le parti uguali AL, AI, AR, AE, ecc., le parti rimanenti LB, IC, RF, EG (per l'Assiom. 3.) saranno tutte tra di loro eguali; il che pertutto sempre si verifica. Dunque le periferie BCFG, ERIL saranno equidistanti, o sia parallele. Il che era da dimostrarsi.

Corollario Primo.

Dunque i circoli, le periferie de' quali scambievolmente si segano, non sono concentrici.

Questa è la Propositione 5. del Libro 3. di Euclide.

Corollario Secondo.

Similmente i circoli, le di cui periferie scambievolmente si toccano, non possono avere un medesimo centro.

Questa è la Propos. 6. del Libro 3. di Euclide.

PROPOSIZIONE SECONDA.

Teorema.

Una retta tirata (CE) dal centro (C) di un circolo alla metà (E) di qualsivoglia corda (BR) sarà perpendicolare alla medesima; e scambievolmente se dal centro (C) di qualsivoglia corda (BR) sarà tirata una perpendicolare (CE), questa segherà in due parti la medesima corda (BR).

Fig. IX. Tav. II.

Dimostrazione della Prima Parte.

Poichè tirati i raggi CB, CR nel triangolo isoscele CBR (per il Coroll. 1. della Propos. 25. del Libro 1.) la retta CE tirata dal vertice C alla metà E della base è perpendicolare alla medesima base BR, perciò è evidente ciò, che erasi in primo luogo proposto da dimostrare.

Di-

Dimostrazione della Seconda Parte.

Tiraci parimenti i raggi CB, CR nel triangolo isoscele CBR, la retta CE dal vertice C tirata perpendicolarmente sopra la base BR (per il Coroll. 2. della Propos. 25. del Lib. 2.) segherà la stessa base BR in due parti. Il che era da dimostrarsi in secondo luogo.

Questa è la Proposizione 3. del Libro 3. di Euclide.

Corollario.

Fig. X. Tav. IX. Poichè dalla metà (C) della corda (AB) può esser tirata una perpendicolare alla medesima corda (per il Coroll. della Defin. 9. del Libro 2.), e la linea tirata dal centro alla metà della corda (per la Dimostr.) è perpendicolare alla medesima corda; perciò se in qualsivoglia circolo (AFB) alla metà (C) di qualsisia corda (AB) si alzi una linea perpendicolare (FC), sempre si ritroverà il centro del circolo; e dall'una, e dall'altra parte allungata fino alla periferia, farà (FE) il diametro del medesimo circolo.

PROPOSIZIONE TERZA.

Problema.

Ritrovare il centro d'un dato circolo.

Fig. IX. Tav. IX. Nel dato circolo si tiri qualsivoglia sottesa AB, la quale (per la Propos. 12. del Libro 2.) si seghi in due parti nel punto C, da cui sopra la medesima AB (per la Propos. 13. del Libro 2.) si alzi la perpendicolare CF, la quale dall'una, e dall'altra parte si allunghi fino alla periferia in F, ed E. Finalmente si divida in due la retta FE in I. Sarà di certo I il ricercato centro del circolo.

Dimostrazione.

Imperciocchè (per il Coroll. della Propos. preced.) la retta perpendicolare FE è il diametro del circolo: dunque (per la Defin. 16. del Libro 2.) il centro del circolo sarà il punto I, che sega in due parti il diametro FE. Il che cosi proposto da dimostrare.

Questa è la Proposizione 1. del Libro 3. di Euclide.

PROPOSIZIONE QUARTA.

Problema.

Ritrovare il centro d'un dato arco (ABL), per descrivere l'intera periferia.

Fig. XI. Tav. IX. Nel dato arco si tirino le due corde AB, BL, le quali (per la Propos. 12. del Libro 2.) in due parti dividansi in E, ed F, e (per la

la Propoſ. 13. del Libro 2.) dai medeſimi punti ſopra le rette AB, BL ſi alzino le perpendicolari EC, FC, le quali allungate (per il Coroll. 3. della Propoſ. 24. del Libro 2.) ſcambievolmente ſi ſeghe-ranno, come nel punto C, che ſarà il centro ricercato.

Dimoſtrazione.

Le rette linee hanno un ſol punto comune (per il Coroll. della Propoſ. 16. del Libro 2.), in cui ſcambievolmente ſi ſegano. Ma il centro del circolo (per il Coroll. della Propoſ. 2.) ſi ritrova tanto nella perpendicolare EC, quanto nella perpendicolare FC; e perciò ſarà il punto C comune all'una, e all'altra perpendicolare. Per conſeguenza dal centro C, e coll'intervallo CA, o CB, ſi compirà l'intera periferia. Il che erafi propoſto da dimoſtrare.

Queſta è la Propoſizione 25. del Libro 3. di Euclide.

Corollario.

Nella ſteſſa maniera intorno qualſivoglia triangolo ABL, ovvero per tre dati punti A, B, L, non poſti dirittamente (tirate le rette BA, BL) ſi deſcrive un circolo, la di cui periferia paſſi per i tre angoli, ovvero per i tre dati punti A, B, L, come da ſe è manifeſto.

Queſta è la Propoſizione 5. del Libro 4. di Euclide.

PROPOSIZIONE QUINTA.

Teorema.

Se da qualche punto (C) dentro un circolo (EAB) ſaranno tirate alla periferia tre rette linee (CA, CB, CE) tra di loro eguali, quel punto ſarà il centro del circolo. Fig. XII. Tav. II.

Si tirino le ſuteſe BE, BA, le quali (per la Propoſ. 12. del Libro 2.) in due parti ſi ſeghino ne' punti F, ed L, da' quali al punto C ſi tirino le rette FC, LC.

Dimoſtrazione.

I due triangoli ALC, CLB, hanno il lato CL comune, il lato LA = LB (per la coſtruzione), e (per l'ipoteſi) il lato CA = CB; e perciò (per la Propoſ. 9. del Libro 2.) ſarà l'angolo CLA eguale all'angolo CLB: per conſeguenza (per la Definiz. 9. del Libro 2.) la retta CL ſarà perpendicolare ſopra la metà della corda BA, e perciò (per il Coroll. della Propoſ. 2.) il centro del circolo ſarà nella perpendicolare CL. Similmente i due triangoli CFB, CFE, hanno ciaſcun lato eguale a ciaſcun lato; laonde gli

angoli CEB, CEE saranno eguali, e retti, e il centro del circolo si ritroverà anche nella perpendicolare FC. Dunque centro del circolo sarà il punto C comune all'una, e all'altra perpendicolare LC, FC. Il che erasi da dimostrarsi.

Questa è la Proposizione 9. del Libro 3. di Euclide.

Corollario.

Adunque da un punto, che non sia il centro d'un circolo, alla di lui periferia non possono esser tirate più di due rette tra di loro eguali, perchè se si tirassero, quel punto sarebbe il centro.

PROPOSIZIONE SESTA.

Problema.

Fig. XIII. Tav. IX. *Per qualsivoglia punto (L) d'una periferia tirare la tangente del circolo.*

Dal punto L dato, o preso nella periferia, al centro C tirisi il raggio LC, o il diametro LF, sopra il quale dal punto L (per la Propos. 12. del Libro 2.) si alzi la perpendicolare ALB, che sarà la ricercata linea tangente il circolo nel solo punto L.

Dimostrazione.

Dal centro C a qualsivoglia altro punto E della retta AB si tiri la retta CE, e sempre avrassi il triangolo CLE (per la costruzione) rettangolo; e perciò l'angolo retto CLE (per il Coroll. 5. della Propos. 24. del Lib. 2.) sarà maggiore dell'angolo acuto CEL; ed oltre a ciò (per la seconda parte della Propos. 27. del Libro 2.) il lato CE opposto all'angolo maggiore CLE sarà più grande del lato CL opposto all'angolo minore CEL. E' poi CL un raggio del circolo; laonde la retta CE è maggiore d'un raggio, e fu tirata dal centro C; e perciò il punto E cade fuori del circolo. Col medesimo raziocinio dimostrasi, che gli altri punti della linea AB (eccettuato L) cadono fuori della periferia. Dunque la retta AB (per la Definiz. 2.) è una tangente del circolo. Il che erasi proposto da dimostrarsi.

Corollario Primo.

Per tanto la retta AB perpendicolare all'estremità del raggio CL, e del diametro FL, è la tangente del circolo.

Oltre a ciò, perchè all'estremità L del diametro FL può esser tirata una sola perpendicolare (per il Coroll. della Definiz. 9. del Libro 2.) perciò una retta solamente può toccare il circolo nel me-

desi-

desimo punto: per conseguenza tutte l'altre rette tirate per il punto del contatto taglieranno il circolo.

Questa è la Proposizione 16. del Libro 3. di Euclide.

Corollario Secondo.

Quindi agevolmente si deduce, che la retta CM tirata dal centro C al punto del contatto M, è perpendicolare alla tangente AB. Fig. XIV. Tav. IX.

Questa è la Proposizione 18. del Libro 3. di Euclide.

Corollario Terzo.

Similmente è manifesto, che la retta MC dal punto del contatto M perpendicolarmente inalzata sopra la tangente AB, passa per il centro del circolo.

Questa è la Proposizione 19. del Libro 3. di Euclide.

PROPOSIZIONE SETTIMA.

Teorema.

L'angolo al centro è duplo dell'angolo alla periferia, quando insistono sopra lo stesso arco.

Primieramente gli angoli ACB al centro, e ALB alla periferia insistano sopra un medesimo arco AEB, e i due lati CA, LA degli stessi convengano; sarà l'angolo ACB duplo dell'angolo ALB. Fig. XVI. Tav. IX.

Dimostrazione.

Imperciocchè nel triangolo CBL (per la Definiz. 15. del Libro 2.) è il lato CB = CL; perciò (per la Propos. 25. del Libro 2.) sarà l'angolo CLB uguale all'angolo CBL; e conseguentemente del medesimo triangolo BLC l'angolo esterno BCA, il quale (per la seconda parte della Propos. 24. del Libro 2.) è uguale ai due angoli CLB, CBL presi insieme, sarà duplo del solo CLB; vale a dire, l'angolo BCA al centro è duplo dell'angolo BLA alla periferia.

In secondo luogo i lati degli angoli nè coincidano, nè casualmente si seghino, e si tiri il diametro LE, allora (per la Dimostrazione) sarà l'angolo ACE duplo dell'angolo ALE, e l'angolo ECB duplo dell'angolo ELB: e perciò l'intero angolo ACB al centro sarà duplo di tutto l'angolo ALB alla periferia. Fig. XVII. Tav. IX.

In terzo luogo il lato LB dell'angolo alla periferia seghi il lato AC dell'angolo al centro, e si tiri il diametro LI, (per la Dimostrazione) tutto l'angolo ACI al centro è duplo di tutto l'angolo ALI alla periferia; e la parte BCI è duplà della parte BLI; dun- Fig. XVIII. Tav. IX.

que (per l'Affiom. 15.) anche l'angolo rimanente ACB al centro farà duplo del rimanente angolo ALB alla periferia. Il che era da dimoſtrarſi.

Queſta è la Propoſizione 20. del Libro 3. di Euclide.

Corollario Primo.

Poichè (per la Definiz. 5.) l'arco AEB è miſura dell' angolo ACB al centro, e l'angolo ALB alla periferia (per la Dimoſtrazione) è la metà dell'angolo ACB al centro; perciò la miſura dell' angolo ALB alla periferia ſarà la metà dell'arco oppoſto AEB.

Corollario Secondo.

Fig. XIX. Tav. IX. Quindi tutti gli angoli ALB, AIB, AMB, ecc. nel medeſimo ſegmento ALIMB del circolo contenuti, ovvero inſiſtenti ſopra lo ſteſſo arco AEB (per l'Aſſiom. 9.) ſaranno tra di loro eguali; imperciocchè ciaſcuno de' medeſimi angoli è la metà d'uno ſteſſo angolo ACB al centro, ovvero ha per miſura un medeſimo arco, cioè la metà dell'arco oppoſto AEB, a cui tutti inſiſtono.

Queſta è la Propoſizione 21. del Libro 3. di Euclide.

PROPOSIZIONE OTTAVA.

Teorema.

Fig. 2. Tav. 2. *Un quadrilatero (ABCL), che ha tutti gli angoli nella periferia d'un circolo, avrà gli angoli oppoſti (A, E, C, ovvero B, ed L) preſi inſieme eguali a due retti.*

Dimoſtrazione.

Imperciocchè l'angolo B (per il Coroll. 1. della Propoſ. paſſed.) ha per miſura la metà dell'arco oppoſto ALC; e perciò i due angoli B, ed L preſi inſieme hanno per miſura la metà dell' intera periferia. Ma (per il Coroll. della Definiz. 7.) la metà della periferia è la miſura di due retti: dunque i due angoli oppoſti B, ed L preſi inſieme uguagliano due retti.

Lo ſteſſo ſi verifica degli altri due angoli oppoſti A, e C preſi inſieme. Dunque un quadrilatero ecc. Il che eraſi da dimoſtrare.

Queſta è la Propoſizione 22. del Libro 3. di Euclide.

Corollario.

Dunque niun parallellogramo obliquangolo può avere tutti gli angoli nella periferia d'un circolo.

PRO-

PROPOSIZIONE NONA.

Teorema.

Un angolo iſcritto dentro d'un ſemicircolo ſempre è retto.

Sia il circolo ABLFC, e dalle eſtremità del diametro AL a qualſivoglia punto C della ſemiperiferia ſieno tirate le due rette AC, LC; l'angolo ACL iſcritto nel ſemicircolo AÇFL ſarà retto. Fig. II. Tav. X.

Dimoſtrazione.

Imperciocchè la miſura dell'angolo ACL (per il Coroll. 1. della Propoſiz. 7.) è la metà dell'arco oppoſto ABL, il quale (per l'ipoteſi) è la ſemicirconferenza, che (per il Coroll. della Definiz. 7.) è la miſura di due retti; e perciò la di lei metà ſarà la miſura d'un ſolo retto. Dunque l'angolo ACL, il quale è miſurato dalla metà della ſemicirconferenza, ſarà retto. Il che era da dimoſtrarſi.

Queſta è la prima parte della Propoſ. 31. del Libro 3. di Euclide.

PROPOSIZIONE DECIMA.

Problema.

Da un punto (R) dato fuori d'un circolo (LGM) tirare una retta tangente del circolo. Fig. III. Tav. X.

Dal punto R al centro C ſi tiri la retta RC, la quale (per la Propoſ. 12. del Libro 2.) ſi ſeghi in due parti in A; e dal centro A coll'intervallo AC, o AR, deſcrivaſi il ſemicircolo CGBR, e dal punto G, in cui le periferie ſcambievolmente ſi ſegano, al punto dato R ſi tiri la retta GR, che ſarà la tangente ricercata.

Dimoſtrazione.

Imperciocchè tirato il raggio CG, l'angolo CGR iſcritto nel ſemicircolo CGBR (per la Propoſ. precedente) è retto; e perciò la retta GR perpendicolare all'eſtremità G del raggio CG (per il Coroll. 1. della Propoſ. 6.) ſarà tangente del circolo LMG. Il che era da dimoſtrarſi.

Queſta è la Propoſizione 17. del Libro 3. di Euclide.

Corollario.

Se dal centro A col raggio AC deſcrivaſi l'altro ſemicircolo CL R, e ſi

e si tiri la retta LR, nella medesima maniera si dimostrerà, che la stessa retta LR è una tangente del circolo. Per conseguenza da un dato punto possono esser tirate due tangenti d'un circolo.

PROPOSIZIONE UNDECIMA.

Teorema.

L'angolo contenuto dalla tangente d'un circolo, e dalla corda tirata pel punto del contatto, è uguale all'angolo iscritto nell'opposto segmento del circolo.

Fig. IV. Tav. X. La retta AB tocchi il circolo nel punto C, dal qual sia tirata la segante corda CE, l'angolo ECB sarà eguale all'angolo iscritto nel segmento CRFE; e l'angolo ECA sarà eguale all'angolo iscritto nell'altro opposto segmento CILE.

Si tiri il diametro CF, il quale (per il Coroll. 2. della Proposizion 6.) sarà perpendicolare alla tangente AB: si tirino anche le sutteſe FE, EL, LC.

Dimostrazione.

L'angolo FEC iscritto nel semicircolo FELIC (per la Proposizion 9.) è retto; perciò nel triangolo FEC gli altri due angoli EFC, ECF presi insieme (per il Coroll. 5. della Proposiz. 24. del Libro 2.) uguagliano un retto. Ma i due angoli ECB, ECF, (per l'Assiom. 11.) eguagliano parimenti un retto FCB; e perciò (per l'Assiom. 1.) i due angoli EFC, ECF saranno eguali ai due ECB, ECF; e levato il comun angolo ECF (per l'Assiom. 3.) resterà l'angolo EFC (iscritto nel segmento EFRC) eguale all'angolo ECB (contenuto dalla tangente CB, e dalla corda segante CE). Oltre a ciò nel quadrilatero CLEF (per la Proposiz. 8.) i due angoli opposti CFE, CLE, uguagliano due retti, e i due angoli conseguenti ECB, ECA, (per la Proposiz. 15. del Libro 2.) sono parimenti uguali a due retti; e perciò (per l'Assiom. 1.) i due angoli F, ed L saranno eguali ai due ECB, ECA, da' quali tolgansi gli angoli già dimostrati uguali CFE, ECB, e (per l'Assiom. 3.) resterà l'angolo CLE (iscritto dentro il segmento ELIC) eguale all'angolo ECA contenuto dalla tangente CA, e dalla segante CE. Il che era da dimostrarsi.

Questa è la Proposizione 32. del Libro 3. di Euclide.

Corollario.

Quindi è manifesto che l'angolo CFE iscritto nel maggior segmento CRFE è acuto; e che l'angolo CLE iscritto dentro il minor segmento ELIC è ottuso.

Que-

Queſta è la ſeconda parte della Propoſiz. 31. del Libro 3. di Euclide.

PROPOSIZIONE DUODECIMA.

Teorema.

Ne' circoli eguali (*ALBM, EFGR*), *ovvero* (*nel medeſimo circolo*, Fig. V. Tav. X. *gli angoli eguali coſtituiti o ai centri* (*ACB = EIG*), *o alle periferie* (*ALB = EFG*) *inſiſtono ſopra archi eguali* (*cioè ſarà l'arco ALB uguale all'arco EFG*). *Che ſe gli archi ſaranno eguali* (*AMB = ERG*), *gli angoli inſiſtenti coſtituiti o ai centri, o alle periferie ſaranno eguali* (*cioè ACB = EIG, e ALB = EFG*).

Dimoſtrazione della Prima Parte.

Si concepiſca che il circolo ALBM ſia poſto ſopra al circolo EFGR talmente che il centro C cada in I, e il raggio CA cada ſopra l'egual raggio IE (per la Definiz. 3.), col quale (per il Corell. della Definiz. 5. del Lib. 2.) ſi combacierà; il raggio poi CB ſi combacierà col raggio IG, perchè (per l'ipoteſi) gli angoli ACB, EIG ſono eguali, e i punti A, e B cadranno in E, e G; e perciò l'intero arco AMB ſi combacierà coll'arco ERG, e (per l'Aſſiom. 14.) ſaranno tra di loro eguali.

Se poi gli angoli ALB, EFG alle periferie ſaranno eguali, allora tirati i raggi AC, BC, EI, GI, anche gli angoli ACB, EIG ai centri (per l'Aſſiom. 8.) ſaranno eguali tra di loro, perchè (per la Propoſ. 7.) ſono dupli degli angoli eguali ALB, EFG alle periferie: conſeguentemente (per la Dimoſtrazione) gli archi AMB, ERG ſaranno tra di loro eguali. Il che era primieramente da dimoſtrarſi.

Queſta è la Propoſizione 26. del Libro 3. di Euclide.

Dimoſtrazione della Seconda Parte.

Poichè (per l'ipoteſi) l'arco AMB è uguale all'arco ERG, e i circoli ſono eguali, perciò poſto il circolo ALBM ſopra l'egual circolo EFGR, talmente che i centri C, ed I convengano, e il punto A col punto E; l'arco AMB ſi combacierà coll'egual arco ERG, e il punto B cadrà in G; per conſeguenza ſi combacieranno i raggi CA con IE, e CB con IG, e (per l'Aſſiom. 14.) l'angolo ACB ſarà eguale all'angolo EIG.

Oltre a ciò (per l'Aſſiom. 9.) ſaranno altresì uguali tra di loro gli angoli ALB, EFG alle periferie, perchè (per la Propoſ. 7.) ſono metà degli angoli eguali ACB, EFG ai centri. Il che era da dimoſtrarſi in ſecondo luogo.

Queſta è la Propoſizione 27. del Libro 3. di Euclide.

PRO-

PROPOSIZIONE TERZADECIMA.

Teorema.

Fig. VI. Tav. X. *Ne' circoli eguali (AMCL, ERGI), o nel medesimo circolo, le corde eguali (AC, EG) sottendono archi eguali (ALC = EIG, e AMC = ERG). Vicendevolmente se gli archi (ALC, EIG) saranno eguali, anche le corde (AC, EG) sottendenti i medesimi archi saranno tra di loro eguali.*

Dimostrazione della Prima Parte.

Tirati i raggi (per la Definiz. 3. di questo Libro, e per la Definiz. 15. del Libro 2.) eguali tra di loro BA, BC, FE, FG, perchè (per l'ipotesi) le basi AG, EG sono eguali, perciò (per la Propoſiz. 9. del Libro 2.) sara l'angolo ABC = EFG; per conseguenza (per la prima parte della Propoſiz. precedente) sara l'arco ALC = EIG; e dall'intere eguali periferie togliendo le parti eguali ALC, EIG, (per l'Assiom. 3.) resterà l'arco AMC = ERG. Il che era in primo luogo da dimostrarsi.

Questa è la Propoſizione 28. del Libro 3. di Euclide.

Dimostrazione della Seconda Parte.

Poichè (per l'ipotesi) gli archi ALC, EIG si pongono eguali, perciò tirati i raggi BA, BC, EF, FG, (per la seconda parte della Propoſiz. preced.) sarà l'angolo ABC = EFG, e (per la Definiz. 3.) i lati BA, BC sono eguali ai lati FE, FG: dunque (per la Propoſ. 6. del Libro 2.) sarà la base AC eguale alla base EG. Per conseguenza archi eguali sono sottesi da corde eguali. Il che aveasi a dimostrare in secondo luogo.

Questa è la Propoſizione 29. del Libro 3. di Euclide.

PROPOSIZIONE QUARTADECIMA.

Problema.

Dividere un dato arco (ACL) in due parti.

Fig. VII. Tav. X. Si tiri la corda AL, la quale (per la Propoſ. 12. del Libro 2.) in due parti si seghi in B, e (per la Propoſ. 13. del Libro 2.) si alzi la perpendicolare BC, la quale in due segherà in C il dato arco. Vi si aggiungano le rette AC, CL.

Dimostrazione.

I triangoli ABC, CBL intorno agli eguali angoli retti ABC, CBL

CBL hanno il lato CB comune, e (per la costruzione) il lato BA = BL; dunque (per la Propos. 6. del Libro 2.) sarà AC = CL; e perciò (per la prima parte della Propos. preced.) gli archi CMA, CRL sottesi dalle eguali corde AC, CL saranno tra di loro eguali: il che erasi proposto da dimostrare.

Questa è la Proposizione 30. del Libro 3. di Euclide.

PROPOSIZIONE QUINTADECIMA.

Teorema.

In qualsivoglia circolo (ALBC) se due rette (AB, CL) nell'una, e nell'altra parte della periferia terminate scambievolmente si seghino (come in F), il rettangolo contenuto dalle parti (AF, FB) d'una, sarà eguale al rettangolo contenuto dalle parti (CF, FL) dell'altra retta (cioè sarà AF × FB = CF × FL). Fig. VIII. Tav. II.

Dimostrazione.

Imperciocchè tirate le rette AC, LB, è l'angolo AFC = LFB (per la Proposiz. 17. del Libro 2.), e (per il Coroll. 2. della Proposiz. 7.) è l'angolo CAB = BLC, perchè insistono sopra un medesimo arco CB; similmente è l'angolo ACL = LBA; e perciò i triangoli AFC, BFL sono equiangoli; conseguentemente (per la Proposiz. 7. del Libro 3.) sarà AF : FL :: FC : FB; e (per la Proposiz. 1. del Libro 1.) sarà AF × FB = FL × FC. Il che era da dimostrarsi.

Questa è la Proposione 35. del Libro 3. di Euclide.

PROPOSIZIONE SESTADECIMA.

Teorema.

Se da qualsivoglia punto (A) fuori d'un circolo (IGLB) si tirino due rette, una delle quali (AL) tocchi il circolo, e l'altra (AB) seghi la stessa circolo; il quadrato della tangente (AL) sarà eguale al rettangolo contenuto da tutta la segante (AB), e dal di lei segmento (AE) posto fuori del circolo (cioè sarà $\overline{AL}^2 = \square BA \times AC$). Fig. IX. Tav. II.

Si tirino le fattese CL, LB.

Dimostrazione.

L'angolo CLA contenuto dalla tangente LA, e dalla corda segante LC (per la Proposiz. 11.) è eguale all'angolo LBC iscritto

nell'altro segmento GIBL; l'angolo poi in A è comune ai due triangoli AIB, ALC per. perciò (per il Coroll. 7. della Propos. 24. del Libro 2.) il rimanente angolo BLA sarà eguale al rimanente ACL, e cosi i triangoli AIB, ALC saranno equiangoli, e (per la Propos. 7. del Libro 3.) sarà BA : AL :: AL : AC, cioè (per la Diffiniz. 9. del Libro 5.), sarà ÷ BA : AL : AC. Dunque (per il Coroll. della Propos. 1. del Libro 1. (sarà

$\overline{AL}^2 = \square ABM \times ACQ$, il che era da dimostrarsi.

Questa è la Propositione 36. del Libro 3. di Euclide.

Corollario Primo.

Dunque la tangente AL è media proporzionale tra la segante BA, e il suo segmento CA posto fuori del circolo; imperciocchè è ÷ BA : AL : AC.

Corollario Secondo.

Se dal medesimo punto A (per il Coroll. della Propos. 10.) si tiri l'altra tangente AI, nella stessa maniera si dimostrerà che $\square BA \times AC = \square$ perciò (per 3 Axiom.) sarà

(avremo) AL = AI, cioè le due tangenti d'un medesimo circolo tirate da uno stesso punto posto fuori del circolo saranno tra di loro eguali.

PROPOSIZIONE DECIMASETTIMA.

Problema.

Fig. XI. Tav. X. *Dividere una data retta terminata (AB) in due parti, cosicchè tutta alla parte maggiore abbia la medesima ragione, che avrà la stessa parte maggiore alla minore. Il che dicesi* Dividere una retta linea colla ragione media, e estrema.

Sopra la data AB, e dal punto A (per la Propos. 23. del Libro) si alzi la perpendicolare AC eguale alla metà della data AB, e poi dal centro C, e raggio CA descrivasi il semicircolo (AEM), e i punti B, e C si tiri la retta BCM. Finalmente dalla data AB si seghi la porzione BL uguale alla porzione BE; dico, che la retta AB è divisa in L colla ragione media, e estrema, cioè sarà ÷ AB : BL : LA.

Dimostrazione.

Il raggio CA (per la costruzione) è uguale alla retta CB : parimente CA (per la Definizione 1. del Libro) è uguale alla retta CE

A

metro EM; e perciò (per l'Assiom. 8.) sarà la retta BA eguale al diametro ME: ma la retta BA (per la costruzione) perpendicolare all'estremità A del raggio AC (per il Coroll. 1. della Proposiz. 6.) è la tangente d'un circolo, e la linea EM è una segante dello stesso circolo; laonde (per il Coroll. 1. della Proposiz. preced.) sarà MB : BA : : BA : BE; e dividendo (per la Proposiz. 5. del Libro 1.) sarà MB — BA : BA : : BA — BE : BE; ma (per la Dimostrazione) è EM = BA, e (per la costruzione) è BL = BE, perciò ad eguali sostituendo altri eguali, nella precedente ultima proporzione sarà MB — EM : BA : : BA — BL : BL; ma BA — BL significa AL, e MB — EM significa BE, a cui sostituiscasi l'egual porzion BL, e si avrà BL : BA : : AL : BL; ed invertendo (per la prima parte della Proposiz. 3. del Libro 1.) sarà BA : BL : : BL : AL, cioè ∺ BA : BL : AL. Dunque la retta AB si è divisa in L colla ragione media, ed ultima. Il che erasi proposto da dimostrare.

Questa è la Proposizione 30. del Libro 6. di Euclide.

Corollario.

Poichè (per la Dimostrazione) è ∺ BA : BL : AL, perciò (per il Coroll. della Proposiz. 1. del Libro 1.) sarà BA × AL = BL; dunque la data retta AB [illegible] in L, che il rettangolo da tutta AB nella parte AL eguaglia il quadrato della parte rimanente [illegible].

Questa è la Proposizione [illegible] del Libro [illegible] di Euclide.

PROPOSIZIONE DECIMAOTTAVA.

Problema.

Date due rette (AB, BC) ritrovare la media proporzionale. Fig. XII. Tav. X.

Le date rette AB, BC si pongano talmente a diritto, che formino una sola retta AC, la quale (per la Proposiz. 10. del Libro 2.) si seghi in due parti eguali in F, e dal centro F col raggio FA, oppure FC descrivasi il semicircolo ALMC; dipoi dal punto B sopra la retta AC (per la Propos. 13. del Libro 1.) si alzi la perpendicolare BM, la quale in qualche luogo sia terminata dalla periferia, come in M, sarà BM la linea ricercata.

Dimostrazione.

Tirate le suttese AM, CM, l'angolo AMC iscritto nel semicircolo ALMC (per la Propos. 9.) sarà retto: dunque (per il Coroll. 2.

della Propof. 27. del Libro 3.) la perpendicolare MB calata dall' angolo retto all' ipotenusa AC farà la media proporzionale tra i segmenti AB, BC della medesima ipotenusa; perciò farà $\overline{AB} : \overline{BM} :: \overline{BM} : \overline{BC}$. Il che erasi proposto di dimostrare.

Questa è la Propositione 13. del Libro 6. di Euclide.

Corollario Primo.

Dunque (per il Coroll. della Propos. 2. del Libro 2.) farà $\overline{AB} \times \overline{BC} = \overline{BM}^2$; cioè, in qualsisia circolo il quadrato di qualsivoglia perpendicolare BM tirata dalla periferia al diametro farà eguale al rettangolo compreso dalle parti del diametro AB, BC, nelle quali è diviso dalla stessa perpendicolare.

Corollario Secondo.

Fig. XIII. Tav. I. Laonde per descrivere un quadrato eguale a un dato rettangolo ABCR contenuto da' lati AB, BC, si ritrovi la media proporzionale BL, sopra di cui (per la Propos. 30. del Libro 2.) si farà il quadrato BM, il quale (per il Coroll. della Propos. 1. del Libro 1.) farà eguale al rettangolo ABC contenuto da' lati AB, BC.

Corollario Terzo.

Per descrivere poi un quadrato eguale a un parallelogrammo obliquangolo ABST, si calino le perpendicolari AR, BC, e (per la Propoſiz. 31. del Libro 2.) si avrà il rettangolo ABCR eguale al parallelogrammo obliquangolo ABST: laonde il quadrato BM (per il Corollario preced.) eguale al rettangolo ABCR (per l'Assiom. 1.) farà anche eguale al parallelogrammo obliquangolo ABST.

Corollario Quarto.

Dunque qualsivoglia data figura rettilinea descriverà il quadrato eguale alla stessa figura, se si divida la medesima figura in triangoli, dipoi (per la Propoſiz. 34. del Libro 2.) si faccia il rettangolo eguale a ciascun triangolo; indi (per il preced. Corollario 2.) si descriva il quadrato eguale a ciascun rettangolo. Finalmente (per la Propoſiz. 20. del Libro 3.) si ritrovi la linea, il di cui quadrato sia eguale a tutti i ritrovati quadrati presi insieme, e quel quadrato (per l'Assiom. 1.) farà eguale al dato rettilineo.

In questo Corollario si contiene la Propositione 14. del Libro 2. di Euclide.

PRO-

PROPOSIZIONE DECIMANONA.

Teorema.

Se una retta (AB) si taglia in due parti uguali (in C), e ad esse direttamente si aggiunga qualsivoglia altra retta (BL); il quadrato della metà della linea coll'aggiunta (cioè CL) sarà eguale al rettangolo (AL×LB) contenuto dalla data coll'aggiunta (AL), e dall'aggiunta (BL) assieme col quadrato della metà (CB). Fig. XIV. Tav. X.

Dal centro C col raggio CB, o CA, descrivasi il circolo AFB, e dal punto L (per la Propos. 10.) si tiri la tangente LF, e si unisca il raggio CF al punto del contatto F.

Dimostrazione.

La retta LF (per la costruzione) è una tangente del circolo, ed AL sega il circolo; perciò (per la Propos. 16.) sarà $\overline{LF}^2 = AL \times LB$: vi si aggiungano i quadrati eguali (Aritmet. 182.) de' raggi CF, CB, e (per l'Assiom. 2.) sarà $\overline{LF}^2 + \overline{CF}^2 = AL \times LB + \overline{CB}^2$: ma (per il Coroll. 1. della Propos. 6.) l'angolo CFL è retto; perciò (per il Corollario 1. della Propos. 28. del Libro 3.) sarà $\overline{LF}^2 + \overline{CF}^2 = \overline{CL}^2$. Dunque (per l'Assiom. 1.) sarà $\overline{CL}^2 = AL \times LB + \overline{CB}^2$. Il che era da dimostrarsi.

Questa è la Proposizione 5. del Libro 2. di Euclide.

PROPOSIZIONE VENTESIMA.

Teorema.

Se una retta linea (AB) si divida in due parti eguali (in C), e in due parti ineguali (in L), il rettangolo (AL×LB) contenuto dalle parti ineguali (AL, LB) assieme col quadrato dell'intermedia (CL) saranno eguali al quadrato della metà (CA, o CB). Fig. XV. Tav. X.

Descrivasi il semicircolo AIB, e sopra il diametro AB si alzi la perpendicolare LI, e si giri il raggio CI.

Dimostrazione.

Imperciocchè (per il Coroll. 1. della Propoſiz. 28.) è $AL \times LB = \overline{LI}^2$; vi si aggiunga dall'una, e dall'altra parte il quadrato dell'intermedia LC, e (per l'Assiom. 2.) sarà $AL \times LB + \overline{LC}^2 = \overline{LI}^2 + \overline{LC}^2$; ma (per il Coroll. 1. della Propoſ. 28. del Lib. 3.) nel trian-

triangolo rettangolo CLI è $\overline{CI}^2 = \overline{LI}^2 + \overline{LC}^2$; dunque (per l'Assiom. 1.) sarà $AL \times LB + \overline{LC}^2 = \overline{CI}^2$; or (Aritmet. 182.) è $\overline{CI}^2 = \overline{CB}^2 = \overline{CA}^2$, perciò (per l'Assiom. 1.) sarà $AL \times LB + \overline{LC}^2 = \overline{CB}^2$, ovvero $= \overline{CA}^2$. Il che era da dimostrarsi.

Questa è la Proposizione 5. del Libro 2. di Euclide.

PROPOSIZIONE VENTESIMAPRIMA.

Teorema.

Fig. I. Tav. XI. *Se qualsivoglia retta terminata (AB) si divida in qualunque modo (in C), il quadrato di tutta (AB) sarà eguale ai quadrati delle parti (AC, CB) assieme col duplo rettangolo contenuto dalle stesse parti (cioè sarà $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 + AC \times CB + AC \times CB$).*

La retta AB si faghi in due parti uguali in F, e si descriva il semicircolo ARIB; dipoi si alzi la perpendicolare CI, e si tirino le surtese IA, IB.

Dimostrazione.

L'angolo AIB iscritto nel semicircolo (per la Propos. 9.) è retto; perciò (per il Coroll. 2. della Propos. 17. del Libro 3.) sarà $AC \times CB = \overline{CI}^2$; ma ne' triangoli rettangoli AIB, ACI, e BCI (per il Coroll. 1. della Propos. 18. del Libro 3.) è $\overline{AB}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{BI}^2$, e $\overline{AI}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CI}^2$, e $\overline{BI}^2 = \overline{CI}^2 + \overline{BC}^2$; e perciò (per l'Assiom. 2.) sarà $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CI}^2 + \overline{CI}^2 + \overline{BC}^2$; e sostituendo per $\overline{CI}^2$ l'egual rettangolo $AC \times CB$, si avrà $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + AC \times CB + AC \times CB + \overline{BC}^2$. Il che era da dimostrarsi.

Questa è la Proposizione 4. del Libro 2. di Euclide.

Corollario.

Se la retta AB sarà segata in due parti uguali dal punto C, allora i due quadrati delle parti uguali AC, CB, saranno tra di loro uguali, e ciascuno dei due rettangoli da AC nell'egual retta CB sarà eguale al quadrato d'una parte CB, o CA: e perciò il quadrato di tutta AB sarà quadruplo del quadrato dalla metà AC, o CB.

PRO-

PROPOSIZIONE VENTESIMASECONDA.

Se in qualche triangolo il quadrato d'un lato (AC) sarà Fig. II. Tav. XL.
eguale ai quadrati de' lati rimanenti (AB, BC), l'angolo (ABC) contenuto da' lati rimanenti sarà retto.

Dimostrazione.

Nel triangolo rettangolo ABE (per il Coroll. 1. della Propos. 18. del Libro 2.) è $\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2$; ma (Aritm. 182.) è $\overline{BE}^2 = \overline{BC}^2$, perchè $BE = BC$; dunque $\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$: ma (per l'ipotesi) è $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$; dunque (per l'Assiom. 1.) sarà $\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2$, e (per la 182.) sarà $AE = AC$. Per tanto i due triangoli ABE, ABC, che hanno il lato AB comune, e per costruzione il lato $BE = BC$, e (per la dimostrazione) il lato $AE = AC$ (per la Definizione del Libro 2.) hanno l'angolo $ABE = ABC$. Ma l'angolo ABE (per costruzione) è retto; perciò (per l'Assiom. 1.) anche l'angolo ABC sarà retto; e il triangolo ABC sarà rettangolo. Il che era da dimostrarsi.

Questa è la Proposizione 48. del Libro 1. di Euclide.

DEGLI ELEMENTI DELLA GEOMETRIA

LIBRO QUARTO

Definizione Prima.

Figure regolari, o poligoni regolari sono quelli, che hanno tutti gli angoli eguali, e tutti i lati eguali: come qualsivoglia triangolo equilatero, o qualsisia quadrato, è una figura regolare.

Corollario.

Dunque tutti i poligoni regolari, che hanno un medesimo numero di lati (per la Definiz. 1. del Lib. 3.) sono simili tra di loro.

Definizione Seconda.

Una figura rettilinea dicesi iscritta nel circolo, ovvero il circolo chiamasi circoscritto a una figura, quando i vertici di ciascun angolo della figura si ritrovano nella periferia del circolo.

Corollario.

Per tanto un Poligono regolare sarà iscritto nel circolo, se divisa l'intera periferia in parti, o archi eguali, si tirino le corde sottendenti i medesimi archi, le quali (per la seconda parte della Propos. 13. del Libro 4.) saranno eguali tra di loro; e gli angoli contenuti dalle medesime corde (per la seconda parte della Propos. 12. del Libro 4.) saranno pure tra di loro eguali.

Definizione Terza.

Una figura rettilinea chiamasi circoscritta a un circolo, o un circolo dicesi iscritto a una figura, quando ciascun lato della figura tocca il circolo.

Definizione Quarta.

Il centro d'un poligono regolare è il medesimo che il centro del circolo circoscritto, o iscritto allo stesso poligono.

La perpendicolare poi tirata dal centro ai lati del poligono, o alle corde del circolo, appellasi *Cateto*, o *Raggio retto*.

Definizione Quinta.

La superficie, o l'area terminata da due circonferenze (ILB AM

AMFE) di due circoli concentrici diceſi *Armilla*, o *Zona*, oppur *Corona*. L'eccesſo poi (AB) del raggio (CA) del maggior circolo ſopra il raggio (CB) del circolo minore appellaſi *Larghezza della corona, o della zona*. Fig. VII Tav. XI.

Definizione Seſta.

Figure *Iſoperimetre* diconſi quelle, che hanno i perimetri eguali (Definiz. 13. del Libro 2.), quando cioè la ſomma de' lati d'una eguaglia la ſomma de' lati d'un altra figura.

Definizione Settima.

Archi ſimili de' circoli ſono quelli, che hanno una medeſima ragione all'intere periferie, cioè ne' quali ſono iſcritti angoli eguali.

Definizione Ottava.

Porzioni, o ſegmenti ſimili d'un circolo diconſi quelli, gli archi de' quali ſono ſimili, cioè quelli che contengono angoli eguali. Per eſempio tutti i ſemicircoli ſono ſimili, perchè tutti gli angoli iſcritti ne' ſemicircoli (per la Propoſ. 9. del Libro 4.) ſono retti, e perciò uguali; o perchè qualſivoglia ſemicircolo ha la medeſima ragione al ſuo intero circolo, che ha un altro ſemicircolo al ſuo intero circolo (per il Corollar. 1. della Propoſ. 15. del Libro 1.)

PROPOSIZIONE PRIMA.

Teorema.

Se dal centro (C) de' circoli concentrici (ABEFG, HILMS) ſi tirino quanti raggi ſi vogliano (CA, CB, CE, CF, CG ecc.), che ſeghino l'una, e l'altra periferia, e ſi tirino altresì le corde (AB, BE, EF, FG, GA, HI, IL, LM, MS, SH), i poligoni (ABEFG, HILMS) iſcritti ne' medeſimi circoli ſaranno ſimili. Fig. III. Tav. XI.

Dimoſtrazione.

I due triangoli ACB, HCI intorno all' angolo comune in C hanno i lati proporzionali AC : CB : : HC : CI, perchè (per la Definiz. 15. del Libro 2.) ſono AC = CB, e HC = CI; perciò (per la Propoſ. 9. del Libro 3.) gli ſteſſi triangoli ſaranno ſimili. Sarà dunque l'angolo CAB = CHI, l'angolo CBA = CIH, ed AB : HI : : BC : CI. Similmente ne' triangoli BCE, ICL ſi dimoſtra l'angolo CBE = CIL, l'angolo CEB = CLI, e BE : IL : : BC : CI; per conſeguenza (per l'Aſſiom. 2.) ſarà tutto l'angolo ABE = HIL, e (per l'Aſſiom. 1.) AB : HI : : BE : IL. Col-

lo stesso raziocinio si dimostra l'angolo BEF = ILM, l'angolo EFG = LMS, FGA = MSH, e BE : IL :: EF : LM :: FG : MS :: GA : SH; e perciò (per la Definiz. 1. del Libro 3.) i poligoni ILMSH, FGABE saranno simili. Il che era da dimostrarsi.

Corollario Primo.

Se gli angoli al centro, ciò ACB, BCE, ECF ecc. saranno tutti tra di loro eguali, allora gli archi opposti (per la prima parte della Propos. 12. del Libro 4.) saranno tra di loro eguali, e le corde suttendenti i medesimi archi (per la seconda parte della Proposizione 13. del Libro 4.) saranno altresì eguali tra di loro; e perciò i poligoni saranno regolari eguali, e simili.

Corollario Secondo.

Per la qual cosa gli angoli ai centri di simili poligoni regolari saranno tra di loro eguali.

Corollario Terzo.

Se poi dal centro C a ciascun punto della periferia ABEFG si tirino i raggi CA, CB, CE, ecc. gli stessi conteranno gli angoli in C tra di loro eguali, e indefinitamente piccioli. Oltre a ciò se si concepiscano tirate le linee rette, che connettano insieme le estremità de' medesimi raggi, le stesse linee saranno pure infinitamente picciole, e tra di loro eguali, coincideranno colla periferia, e costituiranno un poligono regolare di lati infiniti. Similmente se si concepiscano tirate le rette, che congiungano i punti, ne' quali i predetti raggi segano la periferia del circolo HILMS, anche le stesse rette saranno infinitamente picciole, ed eguali, e coincideranno colla periferia, e costituiranno un altro poligono regolare di lati infiniti, e (per la Dimostrazion precedente) simile all' altro poligono. Dunque i circoli sono *Poligoni regolari simili di lati infiniti.*

Fig. IV. Tav. XI.

PROPOSIZIONE SECONDA.

Teorema.

Le simili figure regolari (ABEFG, LMKRS) iscritte ne' circoli sono tra di loro come i quadrati de' raggi (AC, LI), o de' cateti (CX, IZ), oppur de' Diametri.

Fig. V. Tav. XI.

Dimostrazione.

Ne' triangoli isosceli ACB, LIM, gli angoli ACB, LIM (per il Corolla. 2. della Propos. anteced.) sono tra di loro eguali, e (per

il

il Coroll. 2. della Propos. 25. del Libro 2.) sono segati in due parti eguali dalle perpendicolari CX, IZ; e perciò i triangoli ACX, LIZ (per l'Assiom. 9.) hanno l'angolo ACX = LIZ, e (per l'Assiom. 16.) l'angolo AXC = LZI, e (per il Coroll. 7. della Propos. 24. del Libro 2.) il rimanente angolo XAC = ZLI; dunque (per la Propos. 7. del Libro 3.) sarà AC : LI :: AX : LZ :: CX : IZ; ma (per il Coroll. 2. della Propos. 25. del Lib. 2.) AX è la metà della retta AB, ed LZ è la metà della retta LM, e perciò (per il Coroll. 1. della Propos. 15. del Libro 1.) sarà AX : LZ :: AB : LM; per conseguenza (per l'Assiom. 1.) sarà AC : LI :: AB : LM :: CX : IZ; e (per la Propos. 13. del Libro 1.) si avrà $AC : LI :: AB : LM :: CX : IZ$. Ma (per la Propos. 15. del Libro 3.) i poligoni simili ABEFG, LMKRS sono tra di loro come i quadrati de' lati omologi AB, LM, cioè siccome $\overline{AB}^2 : \overline{LM}^2$; dunque (per l'Assiom. 1.) saranno anche tra di loro come i quadrati de' cateti CX, IZ, o de' raggi AC, LI, oppur come i quadrati de' diametri, perchè (per il Coroll. 1. della Propos. 15. del Lib. 1.) la ragion de' diametri è uguale alla ragion de' medj. Dunque le simili figure regolari ecc. il che erasi da dimostrare.

Questa è la Propos. 1. del Libro 12. di Euclide.

Corollario Primo.

Poichè (per l'ipotesi) è AB : LM :: BE : MK :: EF : KR, ecc., e (per la Dimostraz.) è AB : LM :: AC : LI :: CX : IZ; perciò i lati di simili poligoni regolari iscritti ne' circoli saranno tra di loro in ragione de' raggi, o de' diametri, ovvero de' cateti.

Corollario Secondo.

Oltre a ciò, perchè (per l'ipotesi) abbiamo AB : LM :: BE : MK :: EF : KR :: FG : RS :: GA : SL, perciò raccogliendo (per la Propos. 8. del Libro 1.) sarà AB : LM :: AB + BE + EF + FG + GA : LM + MK + KR + RS + SL. E' poi (per la Dimostrazione) AB : LM :: AC : LI :: CX : IZ; dunque i perimetri de' poligoni simili iscritti ne' circoli saranno tra di loro in ragione de' raggi, oppur de' diametri, ovvero de' cateti.

Corollario Terzo.

Perchè tutti i raggi tra di loro, e tutti i lati d'un poligono regolare iscritto in un circolo sono tra di loro eguali; perciò anche tutti i cateti del medesimo poligono saranno tra di loro eguali.

Corollario Quarto.

Similmente i circoli saranno tra di loro in ragion duplicata, o sia come i quadrati de' raggi, oppur de' diametri, i quali (per il Coroll. 3. della Propos. 1.) sono poligoni regolari simili di lati infiniti. Questa è la Proposizione 2. del Libro 12. di Euclide.

Corollario Quinto.

Le periferie poi de' circoli, perchè (per il Coroll. 3. della Propos. 1.) sono perimetri di poligoni regolari, perciò (per il Corollario 2.) saranno anche tra di loro come i diametri, o raggi.

Corollario Sesto.

Poichè (per la Dimostrazione) i circoli tra di loro, e i poligoni simili iscritti ne' circoli sono altresì tra di loro come i quadrati de' raggi, o de' diametri, perciò (per l'Assiom. 1.) i circoli saranno tra di loro siccome i poligoni simili dentro d' essi circoli iscritti.

Corollario Settimo.

Gli archi simili de' circoli (per la Definizione 7.) sono tra di loro come l'intere periferie; e l'intere periferie (per il preced. Coroll. 5.) sono tra di loro come i raggi, o i diametri; dunque (per l'Assiom. 1.) gli archi simili de' circoli saranno tra di loro in ragion de' raggi, o de' diametri.

Corollario Ottavo.

Giacchè (per l'anteced. Coroll. 4.) i circoli sono tra di loro come i quadrati de' raggi, perciò un raggio duplo descrive un circolo quadruplo, un raggio triplo descrive un circolo, che nove volte conterrà il circolo descritto dal raggio primo, ecc.

PROPOSIZIONE TERZA.

Teorema.

Fig. VI. Tav. XI. *Un circolo (AEFM) è alla zona (EIALM) a se iscritta, siccome il quadrato d' un raggio (AC) del medesimo circolo al rettangolo (AB×BF) contenuto dalla larghezza (AB) della zona, e dall'altra parte (BF) del diametro (AF) del medesimo circolo.*

Dimostrazione.

Il diametro AF è diviso in due parti ugualt in C, e in due ineguali in B, perciò (per la Proposizione 20. del Libro 4.)

sarà

sarà $\overline{AC}^2 = AB \times BF + \overline{BC}^2$; e togliendo dall'una, e dall'altra parte $\overline{BC}^2$, (per l'Assiom. 3.) resterà $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = AB \times BF$; ma (per il Coroll. 4. della Propos. preced.) il circolo AEFM è al circolo BLI siccome $\overline{AC}^2 : \overline{BC}^2$, cioè AEFM : BLI :: $\overline{AC}^2$: $\overline{BC}^2$; e convertendo (per il Coroll. 1. della Propos. 5. del Lib. 1.) sarà AEFM : AEFM — BLI :: $\overline{AC}^2$: $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$; ma dal circolo AEFM tolto il circolo BLI resta la zona EIALM, vale a dire è

AEFM — ILB = EIALM, e (per la Dimostraz.) è $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = AB \times BF$; dunque sostituendo eguali ad eguali, sarà AEFM : EIALM :: $\overline{AC}^2$: AB × BF; cioè il circolo AEFM sarà alla zona a se iscritta EIALM, siccome il quadrato del raggio AC al rettangolo AB × BF contenuto dalle parti AB, BF del diametro. Il che era da dimostrarsi.

Corollario Primo.

Poichè (per il Coroll. 4. della Proposiz. 2.) qualsivoglia altro circolo STV è al circolo AEFM siccome $\overline{RS}^2$: $\overline{AC}^2$, e (per la Dimostraz. preced.) è il circolo AEFM alla zona EIALM siccome $\overline{AC}^2$ al rettangolo AB × BF; perciò ordinando (per la Propos. 6. del Libro 1.) sarà il circolo STV alla zona EIALM siccome $\overline{RS}^2$ al rettangolo AB × BF: vale a dire, qualsisia circolo è a qualsivoglia zona come il quadrato da un raggio del medesimo circolo al rettangolo compreso dall'altezza della zona, e dall'altra parte del diametro del maggior circolo, che costituisce la zona. Fig. VII. Tav. XL.

Corollario Secondo.

Se dal punto B sopra il diametro AF si alzi la perpendicolare BZ (per il Coroll. 4. della Propos. 18. del Libro 4.) sarà AB × BF = $\overline{BZ}^2$; ma (per il Coroll. preced.) è il circolo STV alla zona EIALM siccome $\overline{RS}^2$ al rettangolo AB × BF; e sostituendo $\overline{BZ}^2$ per l'eguale rettangolo AB × BF, sarà STV : EIALM :: $\overline{RS}^2$: $\overline{BZ}^2$; il circolo poi STV (per il Coroll. 4. della Propos. 2.) è al circolo descritto dal raggio BZ siccome $\overline{RS}^2$: $\overline{BZ}^2$; dunque (per l'Assiom. 1.) sarà STV : EIALM :: STV al circolo descritto dal raggio BZ; per conseguenza (per il Coroll. 2. della Propos. 3. del Lib. 1.) la zona EIALM sarà eguale al circolo descritto dalla retta BZ, la quale (per la Propos. 18. del Lib. 4.) è la media proporzionale tra i segmenti AB, BF, del diametro della medesima zona. Fig. VI. Tav. XL.

PRO-

PROPOSIZIONE QUARTA.

Problema.

In un dato circolo iscrivere un quadrato.

Fig. VIII. Tav. XI. Al diametro AB si tiri un altro diametro perpendicolare EE, e tirate le sottese AE, EB, BF, FA, sarà AFBE il ricercato quadrato.

Dimostrazione.

I quattro angoli al centro C (per l'Assiom. 16.) sono eguali; perciò (per la prima parte della Propoſiz. 24. del Libro 4.) gli archi opposti saranno eguali, e (per la seconda parte della Propoſiz. 13. del Libro 4.) le corde AE, EB, BF, FA, sottendenti i medesimi archi saranno altresì tra di loro eguali. Gli angoli poi AEB, EBF, BFA, FAE (per la Propoſiz. 9. del Libro 4.) sono tutti retti, perchè iscritti in semicircoli. Dunque la figura AEBF equilatera, e rettangola, sarà un quadrato. Il che erasi proposto da dimostrare.

Questa è la Propoſizione 6. del Libro 4. di Euclide.

Scolio.

Se gli archi ALE, EIB, ecc. (per la Propoſiz. 14. del Libro 4.) si dividano in due parti eguali in L, I, G, R, e si tirino le sottese AL, LE, EI, IB, ecc.; si sarà iscritto un ottogono regolare nel dato circolo.

Similmente se gli archi sottesi dai lati dell'ottogono si dividano in due parti eguali, e vi si tirino le sottese, si sarà iscritta nel circolo una figura di sedici lati; e così andando innanzi si descriveranno figure di 32, di 64 lati, ecc.

PROPOSIZIONE QUINTA.

Problema.

In un dato circolo iscrivere un esagono regolare.

Fig. IX. Tav. XI. Essendo centro qualsivoglia punto F della periferia, e col raggio FC del dato circolo descrivasi un altro circolo, o l'arco ACE, che seghi la periferia del dato circolo in A, ed E. Dipoi dai punti A, F, E, si tirino i diametri AM, FL, EB. Indi si tirino le sottese AB, BL, LM, ME, EF, FA, e si sarà iscritto il ricercato esagono ABLMEF.

Dimo-

Dimostrazione.

Il triangolo CFE contenuto da' raggi FC, CE, EF, de' circoli eguali è equilatero, perciò (per il Coroll. 3. della Propoſiz. 25. del Libro 2.) l'angolo ECF farà una terza parte di due retti: dunque la di lui miſura, cioè l'arco EF farà una terza parte della ſemicirconferenza EFAB, la quale (per il Corollar. della Definiz. 7. del Libro 4.) è la miſura di due retti. Similmente nel triangolo equilatero ACF, l'angolo ACF è una terza parte di due retti, e l'arco AF di lui miſura ſarà un' altra terza parte della ſemiperiferia EFAB: per conſeguenza il rimanente arco AB ſarà la reſtante terza parte della ſemicirconferenza, e l'angolo oppoſto ACB ſarà altresì una terza parte di due retti. Per tanto (per l'Aſſiom. 1.) i tre angoli ECF, FCA, ACB, ſaranno eguali, a' quali anche ſono eguali gli angoli verticalmente oppoſti BCL, LCM, MCE (per la Propoſiz. 17. del Libro 1.). Adunque i ſei angoli al centro C eſſendo eguali, perciò (per la prima parte della Propoſiz. 12. del Libro 4.) gli archi oppoſti ſaranno eguali, e (per la ſeconda parte della Propoſ. 13. del Libr. 4.) le ſutteſe, AB, BL, LM, ME, EF, FA ſaranno altresì tra di loro eguali. Oltre a ciò tutti gli angoli ABL, BLM, LME, ecc. (per la ſeconda parte della Propoſizione 12. del Libro 4.) ſono eguali tra di loro, perchè inſiſtono ſopra gli archi eguali AFEML, BAFEM, ecc.; imperciocchè qualſivoglia degli ſteſſi archi contiene quattro ſeſte parti dell'intera periferia. Per la qual coſa l'eſagono ABLMEF ſarà equilatero, ed equiangolo, cioè regolare, ed iſcritto nel circolo. Il che era da farſi, e da dimoſtrare.

Queſta è la Propoſizione 15. del Libro 4. di Euclide.

Corollario Primo.

Per tanto (per la coſtruzione) un lato dell'eſagono iſcritto nel circolo è eguale a un raggio del medeſimo circolo.

Corollario Secondo.

Se ſi tirino le ſutteſe AB, AL, LE, il triangolo iſcritto BAL ſarà equilatero (per la ſeconda parte della Propoſizion 13. del Lib. 4.).

Che ſe tutti gli archi ſutteſi dai lati dell'eſagono ſi dividano in due parti eguali, e ſi tirino le corde, ſarà allora iſcritto nel circolo un poligono regolare di dodici lati.

PRO-

PROPOSIZIONE SESTA.

Problema.

Intorno a un dato circolo circoscrivere un poligono equiangolo a un dato poligono.

Figg. X, e XI. Tav. XL. Si allunghi ciascun lato del dato poligono verso una sola parte, e tutti gli angoli esterni ACE, CBI, BAF (per il Coroll. 10. della Propoſiz. 24. del Libro 2.) preſi insieme saranno eguali a quattro retti. Dipoi nel dato circolo si tiri qualsivoglia raggio LH, e (per la Propoſiz. 10. del Libro 2.) si faccia l'angolo HLM eguale all'angolo esterno ACE. Parimenti si formi l'angolo MLS = FAB, (e così andando innanzi, se la data figura avrà più angoli) il rimanente angolo CBI sarà eguale all'angolo SLH, perchè tutti gli angoli, che possono farsi in L preſi insieme (per il Coroll. 3. della Propoſ. 15. del Libro 2.) sono altresì uguali a quattro retti. Indi per i punti, H, M, S (per la Propoſ. 6. del Libro 4.) si tirino le tangenti RZ, TZ, TR, le quali dall'una, e dall'altra parte allungate concorreranno ne' punti Z, T, R, e sarà RTZ la ricercata figura.

Dimoſtrazione.

Nella figura quadrilatera HLMZ i di lei quattro angoli interni preſi insieme (per il Coroll. 8. della Propoſiz. 24. del Libro 2.) eguagliano quattro retti; i due angoli poi LMZ, LHZ, (per la coſtruzione) sono ambidue retti, perciò gli altri due HLM, MZH preſi insieme saranno eguali a due retti, cioè (per l'Aſſiom. 1.) saranno eguali ai due angoli ACE, ACB, i quali pure preſi insieme (per la Propoſ. 15. del Libro 2.) eguagliano due retti: dalle somme eguali tolgansi gli angoli (per la coſtruzione) eguali HLM, ACE, e (per l'Aſſiom. 3.) resterà l'angolo MZH, o TZR eguale all'angolo ACB. Col medesimo raziocinio si dimoſtra l'angolo T = CAB, e l'angolo R = ABC, e così degli altri, se la data figura avrà più angoli. Per tanto la figura RTZ è equiangola alla figura ABC: i di lei lati poi RZ, TZ, TR (per il Coroll. 1. della Propoſ. 6. del Libro 4.) toccano il circolo in H, S, ed M. Dunque (per la Definiz. 3.) al circolo SHM si è circoſcritta la figura TRZ, ed equiangola alla data figura ABC. Il che erasi propoſto da dimoſtrare.

In queſta Propoſizione si contiene la Propoſizion 3. del Libro 4. di Euclide.

Corollario.

Se il dato poligono sarà regolare (per la Definiz. 1.) allora anche

che tutti gli angoli T, R, ecc. del poligono circoscritto al circolo (per l'Assiom. 1.) saranno tra di loro eguali, estirate le rette LT, LR, ecc., perchè (per il Corollar. 2. della Propos. 16. del Lib. 4.) è la tangente TS = TM, e il raggio SL = LM, e il lato LT comune ai due triangoli STL, MTL, perciò (per la Propoſiz. 9. del Libro 2.) sarà l'angolo LTS = LTM, cioè l'angolo LTS sarà la metà dell'angolo STM. Per la medesima ragione l'angolo LRS è la metà dell'angolo HRS. Per conseguenza (per l'Assiom. 9.) sarà l'angolo LTS = LRS, e poi (per l'Assiom. 16.) l'angolo LST = LSR, e perciò (per il Coroll. 7. della Propos. 24. del Libro 2.) il rimanente angolo TLS sarà eguale al restante SLR. Il lato poi LS frapposto tra gli angoli eguali è comune ai due triangoli LTS, LRS; dunque (per la Propoſiz. 6. del Libro 2.) sarà ST = SR. Nella stessa maniera si dimostra TM = MZ. E' poi TS = TM (per il Coroll. 2. della Propos. 16. del Libro 4.), perciò (per l'Assiom. 8.) sarà TR = TZ. Similmente si dimostra TR = RZ, e così degli altri, se più saranno i lati. Dunque se il dato poligono sarà regolare, anche il poligono circoscritto al circolo sarà regolare.

PROPOSIZIONE SETTIMA.

Problema.

In un dato triangolo (RTZ) iſcrivere un circolo. Fig. XI. Tav. XI.

I due angoli RTZ, TRZ (per la Propoſiz. 11. del Libro 2.) si dividano in due parti eguali per le rette TL, RL, le quali in qualche luogo (per il Coroll. 3. della Propoſiz. 24. del Libro 2.) a vicenda si segheranno, come in L, dal qual punto ai lati del triangolo (per la Propoſiz. 14. del Libro 2.) si calino le perpendicolari LS, LM, LH. Finalmente dal centro L, coll'intervallo LS, o LM, ecc. descrivasi un circolo, il quale sarà il ricercato.

Dimostrazione.

Imperocchè (per la costruzione) è l'angolo STL = MTL, e (per l'Assiom. 16.) l'angolo TSL = TML. Oltre a ciò (per il Coroll. 2. della Propoſiz. 32. del Libro 2.) è l'angolo SLT = TLM, il lato poi LT frapposto tra gli angoli eguali è comune ai triangoli STL, MTL, e perciò (per la Propoſiz. 5. del Libro 2.) sarà LS = LM. Similmente dimostrasi LS = LH. Dunque le tre perpendicolari LS, LM, LH (per l'Assiom. 1.) saranno eguali tra di loro, e la periferia del circolo descritto dal centro L, e coll'intervallo LH, passerà per i punti H, S, M, e il circolo SMH sarà iscritto al dato triangolo RTZ, perchè i lati del triangolo (per la costruzione) sono perpendicolari alle estremità de' raggi, e (per il

Coroll. 1. della Propos. 6. del Libro 4.) toccano il circolo. Il che era proposto da dimostrare.

Questa è la Propositione 4. del Libro 4. di Euclide.

Scolio.

Nella stessa maniera si iscrive un circolo in qualsivoglia dato poligono regolare.

Corollario Primo.

Quindi è manifesto, che i catèti delle figure circoscritte a un circolo, cioè le perpendicolari LH, LS, ecc. sono eguali a un raggio del circolo iscritto.

Corollario Secondo.

Oltre a ciò è evidente, che il perimetro di qualsivoglia figura circoscritta a un circolo è maggiore del perimetro, o periferia del circolo iscritto. Per esempio le due rette ST, TM prese insieme sono maggiori dell'arco interposto SM, e così dell'altre. Laonde la somma de' lati RT, TZ, RZ sarà maggiore della periferia del circolo SMH.

PROPOSIZIONE OTTAVA.

Teorema.

L'area di qualsivoglia poligono regolare è eguale a un triangolo, la di cui base uguagli il perimetro, e l'altezza sia eguale a un catèto del medesimo poligono.

Fig. XIII. Tav. XI. Dal centro C del dato poligono si tirino i raggi CA, CB, CB, CF, CG, il poligono sarà diviso in altrettanti triangoli, quanti saranno i lati del poligono, i quali triangoli saranno tutti eguali tra di loro (per la Propoſiz. 9. del Libro 2.), perchè sono contenuti da raggi eguali, e dai lati eguali del poligono regolare; e perciò l'intero poligono ABEFG tante volte conterrà uno degli stessi triangoli ACB, quanti sono i lati del poligono. Si allunghi AB verso H, e si faccia AH eguale al perimetro del poligono ABEFG, cioè AH tante volte contenga il solo lato AB, quanti sono i lati del poligono. Si tiri in fine CH, e il catèto CR.

Dimostrazione.

Il triangolo ACH (per la seconda parte della Propoſiz. 1. del Libro 3.) è al triangolo ACB ſiccome la base AH alla base AB; ma (per la costruzione) la base AH tante volte contiene la base AB, quan-

quanti sono i lati del poligono: dunque (per la Definiz. 8. del Libro 1.) anche il triangolo ACH tante volte conterrà il triangolo ACB, quanti sono i lati del poligono; e perciò (per l'Assiom. 8.) sarà il poligono ABEFG uguale al triangolo ACH, la di cui base AH è uguale al perimetro del poligono, e l'altezza CR è un cateto del medesimo poligono. Il che era da dimostrarsi.

Corollario Primo.

Dunque l'area di qualsivoglia poligono regolare si avrà moltiplicando la metà del perimetro nel cateto, o l'intero perimetro per la metà d'un cateto.

Corollario Secondo.

Il circolo (per il Coroll. 3. della Propoſiz. 1.) è un poligono regolare d'infiniti lati, i di cui lati infinitamente piccioli coincidono colla periferia, ed i catèti, o sia le perpendicolari tirate dal centro agli stessi lati infinitamente piccioli sono gli stessi raggi. Per tanto l'area di qualsivoglia circolo EFB è uguale al triangolo ABC, la di cui base BC uguagli il perimetro, o sia la circonferenza del medesimo circolo, e l'altezza sia un raggio, o eguale a un raggio AB. Fig. XII. Tav. XI.

L'area poi del triangolo ABC (per il Coroll. 2. della Propoſ. 31. del Libro 2.) è uguale alla metà del prodotto dall'altezza AB nella base BC: la base in fine BC eguaglia la periferia EFB, e AB è un raggio.

Per la qual cosa l'area del circolo sarà eguale alla metà del rettangolo dal raggio nella periferia, ovvero, che è lo stesso, eguaglia il rettangolo dal raggio nella metà della periferia, o il rettangolo dalla metà del raggio nell'intera periferia.

Per conseguenza il rettangolo dal raggio nella periferia sarà duplo dell'area d'un circolo; e il rettangolo dal diametro nella periferia sarà quadruplo dell'area del medesimo circolo.

Scolio.

Poichè non per anche è stata ritrovata la regola Geometrica di rinvenire la lunghezza della periferia, cioè una retta linea eguale alla lunghezza della periferia, perciò, dato un diametro, si ritrova la periferia per le regole di *approssimazione*, o sia di avvicinamento, ritrovate da Archimede, e da molti altri illustri Geometri.

Imperciocchè se il diametro di qualsivoglia circolo si divida in sette parti uguali, come Archimede ha dimostrato, la di lui periferia contiene quasi ventidue delle medesime parti.

Più accurata, e più prossima al vero è la regola insegnata da Adria-

no Mezio; cioè diviso il diametro in 113. parti, la lunghezza della periferia sarà di parti 355. in circa.

Fig. XIV. Tav. XI. Dato adunque il diametro A B d'un circolo della lunghezza d'once 35., per ritrovare la periferia si formi la seguente regola delle proporzioni 7 : 22. : : 35 al quarto termine, il quale (per la Propos. 9. del Libro 1) sarà $\frac{22 \times 35}{7}$, cioè 110. Vale a dire la lunghezza della periferia del medesimo circolo A C B M sarà d'oncie 110. in circa.

Che se si faccia la proporzione 113 : 355 : : 35 al quarto termine, il quale (per la Propos. 9. del Lib. 1.) sarà $\frac{355 \times 35}{113}$, avrà una più esatta lunghezza della periferia d'oncie $109\frac{104}{113}$.

Se poi sia data la periferia, per esempio, d'oncie 88., e si cerchi il diametro, si stabilisca la regola delle proporzioni 22 : 7 : : 88 al quarto termine, il quale (per la Propos. 9. del Lib. 1.) sarà 28., cioè la lunghezza del diametro sarà d' oncie 28. Oppure se si faccia 355 : 113 : : 88 : $\frac{113 \times 88}{355}$, si ritroverà la lunghezza più prossima del diametro d' oncie $28\frac{9}{355}$.

PROPOSIZIONE NONA.

Teorema.

Il circolo è la maggiore, e la più capace di tutte le figure regolari a se isoperimetre.

Dimostrazione.

Fig. XV. Tav. XI. Una figura circoscritta a un circolo non può essere isoperimetra; perchè il perimetro d'una figura circoscritta (per il Coroll. della Propos. 7.) è maggiore della periferia del circolo; e perciò la figura A B C D E isoperimetra al circolo F L G K M sarà minor d'una figura circoscritta al medesimo circolo; ma un cateto della figura circoscritta il circolo è uno stesso raggio del circolo (per il Coroll. 1. della Propos. 9.), laonde il cateto S I della figura isoperimetra al circolo sarà minore del raggio S L. L'area poi del circolo (per il Coroll. 2. della Propos. preced.) si ottiene moltiplicando il raggio S L nella metà della periferia F L G K M, e l'area d'un poligono regolare (per il Coroll. 1. della Propos. preced.) si ritrova moltiplicando il cateto S I nella metà del perimetro A B C D E; ma è (per la Dimostraz.) il raggio S L sempre maggiore del cateto S I, la metà poi della periferia è uguale alla metà del perimetro del poligono, perchè (per l'ipotesi) sono figure isoperimetre: adunque il rettangolo dalla metà della periferia nel raggio sarà maggiore del rettangolo dalla metà del perimetro nel cateto; vale a dire, il circolo sarà maggiore del poligono a se isoperimetro. Il che era da dimostrarsi.

DE-

DEGLI ELEMENTI DELLA GEOMETRIA

LIBRO SESTO.

De' Solidi.

Definizione Prima.

LA retta linea AB dicesi *Retta, o Perpendicolare* al piano PTML, Fig. I. Tav. XII.
quando fa gli angoli retti, ed eguali con qualunque retta linea CB, CE, CF, CL nel medesimo piano tirata, e che la tocca nel punto C.

Definizione Seconda.

Se la retta linea AB cada obliquamente sopra il piano SL, e dal punto A sia tirata AC perpendicolare al piano SF, e dal punto C al punto B sopra la retta BC, l'angolo ABC si chiamerà *Inclinazione della linea* AB al piano ST. Fig. II. Tav. XII.

Definizione Terza.

Il piano BKRC dicesi *perpendicolare*, o retto al piano AMGL, se qualsivoglia retta EB nel piano BK tirata perpendicolarmente sopra la retta BC, (che è la comun sezione de' piani) sarà anche perpendicolare al piano opposto AMGL. Fig. III. Tav. XII.

Definizione Quarta.

Se nell'uno, e nell'altro piano AMGL, BKRC dal punto I alla comun sezione BC si alzino le perpendicolari EI, SI, e formino l'angolo EIS obliquo, allora il piano BKRC sarà *obliquo*, o *inclinato* al piano AG. L'inclinazione poi d'un piano all'altro è l'angolo acuto EIS contenuto dalle perpendicolari. Fig. IV. Tav. XII.

Definizione Quinta.

Piani paralelli diconsi quelli, che allungati in ogni parte non mai convengono tra di loro, ma per tutto sono egualmente distanti.

Definizione Sesta.

Il Prisma è una figura solida contenuta da due piani opposti (ABC, EFL), ovvero poligoni paralelli, eguali, e simili, e da altrettanti paralellogrami (ABFE, AELC, BCLF), quanti sono i lati de' piani opposti. Fig. V. Tav. XII.

Un

Un *Prisma* dicesi *triangolare*, quando i piani opposti sono due triangoli, come il prisma ABCLFE. Appellasi *Prisma quadrangolare*, quando i piani opposti sono figure quadrilatere. Dicesi un *Prisma Pentagono*, quando i piani opposti sono due eguali pentagoni simili, e così degli altri.

Definizione Settima.

Il Paralellepipedo è un prisma, i di cui due opposti piani sono due paralellogrami; laonde è contenuto da sei paralellogrami, de' quali i due opposti sono paralelli, eguali, e simili, come appunto è il solido AL terminato dai sei paralellogrami AEMB, AEIF, ABCF, IEML, BMLC, IFCL.

Fig. XVI. Tav. XI.

Definizione Ottava.

Il Cubo è un paralellepipedo contenuto da sei quadrati eguali, come la figura solida AM, la di cui lunghezza BC è uguale alla larghezza CM, eguale all' altezza CL, ed è contenuto da sei quadrati AC, AF, AE, MB, ML, MI.

Fig. VI. Tav. XII.

Definizione Nona.

Angolo solido dicesi quello, che è costituito da più di due linee rette, che concorrono al medesimo punto, e che non stanno a giacere nel medesimo piano; ovvero è il concorso di più piani a un medesimo punto: cioè l'angolo solido è quello, che è formato da più di due angoli piani non esistenti nel medesimo piano, ma costituiti ad un solo punto. Così nel cubo AM l'angolo costituito in C dai tre angoli piani BCL, BCM, LCM, cioè costituito dalle tre rette CB, CL, CM, non esistenti nel medesimo piano, è un angolo solido.

Fig. VI. Tav. XII.

Definizione Decima.

Se si concepisca che il paralellogramo ABCL talmente si rivolga intorno ad uno de' suoi lati AL fisso, ed immobile, fin tanto che ritorni alla medesima posizione, da cui era partito, il solido EC descritto dallo stesso paralellogramo chiamasi *Cilindro*.

Fig. VII. Tav. XII.

I circoli eguali ERBS, MFCI nel rivolgimento del paralellogramo descritti dagli opposti lati eguali LC, AR diconsi *Piani opposti, o Base del cilindro*.

La superficie curva nel rivolgimento descritta dal lato CB chiamasi *superficie cilindrica*. Il lato poi fisso AL, che unisce i centri degli opposti circoli, dicesi *Asse del cilindro*.

Quando l'asse AL è perpendicolare alla base ERBS, allora il cilindro chiamasi *Retto*. Se l'asse sta obliquamente sopra la base, il cilindro dicesi *Inclinato*, ovvero *Obliquo*, come FG. Quando poi il cilin-

Fig. VII. Tav. XII.

lindro, o sia retto, ovvero obliquo, oppur anche incurvato, è concavo, e traforato, allora appellasi *Sifone*, o *Tubo*, come AB, ovvero CEF. Fig. VIII. IX. e X. Tav. XII.

Definizione Undecima.

La *Piramide* è un solido contenuto da una base poligona, e da altrettanti triangoli concorrenti ad un solo punto opposto alla base, quanti sono i lati della base medesima.

Quel punto poi, in cui concorrono i triangoli, dicesi *Vertice*, o *Cima* della piramide.

Se la base sarà un triangolo (BCD), la piramide si chiami *Trilatera*, come la piramide ABCD. Fig. XI. Tav XII.

Se la base sarà un quadrilatero (CFGI), la piramide si chiami *Quadrilatera*, come BCFGI. Se la base sarà un pentagono, la piramide si dirà *Pentagona*. Fig. XII. Tav. XII.

Definizione Duodecima.

Se il triangolo rettangolo ALB, il di cui angolo retto è in L, in tal modo rivolgasi intorno al lato AL fisso, ed immobile, finchè ritorni alla positura, da cui era partito, descriverà la figura solida ACFBE, la quale chiamasi *Cono*. Fig. XIII. Tav. XII.

Il circolo CFBE descritto dal cateto mobile LB dicesi *Base del cono*.

La superficie curva nel rivoglimento del triangolo descritta dal lato AB, appellasi *superficie conica*.

Il punto più alto A chiamasi *Vertice, o cima del cono*.

Il lato immobile AL, cioè la retta tirata dal vertice A del cono al centro L della base, dicesi *Asse del cono*.

Qualsivoglia retta AE, ovvero AC, oppure AE, ec. tirata dal Vertice A a qualsivoglia punto della periferia della base, appellasi *Lato del cono*.

Oltre a ciò il descritto cono dicesi *Retto*, perchè l'asse AL è perpendicolare alla base CFBE.

Cono poi *obliquo* chiamasi quello, il di cui asse non è perpendicolare alla base; come il cono AFCBM. Fig. XIV. Tav. XII.

Definizione Terzadecima.

Sfera, o *Globo* è un corpo solido contenuto da una sola superficie curva, della qual superficie tutti i punti egualmente sono distanti dal punto medio, che dicesi *Centro della Sfera*.

Si concepisce esser generata la sfera ASBEC dal rivolgimento del semicircolo ASB intorno al diametro fisso, ed immobile AB; fin tanto che ritorni alla situazione, da cui era partito. Fig. XV. Tav. XII.

La superficie curva nel rivolgimento descritta dalla semiperiferia ASB appellasi *Superficie sferica*.

Il centro C del semicircolo AEB dicesi *Centro della Sfera*, dal quale tutte le rette tirate alla superficie sferica sono tutte di loro eguali, e diconsi *Raggi*, o *Semidiametri della sfera*.

Il diametro AB, intorno a cui s'immagina rivolgersi il semicircolo, o la sfera, appellasi *Asse della Sfera*, e i di lui punti estremi A, e B, si dicono *Poli* della medesima Sfera. Qualsifia linea retta nell'una, e nell'altra parte terminata dalla superficie sferica, e che passa pel centro della sfera, chiamasi *Diametro della Sfera*.

Quel circolo, la di cui periferia è nella superficie sferica, e il cui centro è il medesimo che il centro della sfera, appellasi *Circolo Massimo della Sfera*, come AEBS; e divide in due parti eguali la sfera, cioè in *Due Emisferj*.

Per tanto l'*Emisferio* è un solido terminato dal circolo massimo della Sfera, e dalla metà della superficie sferica.

Definizione Quartadecima.

Poliedro diceſi qualunque ſolido terminato da più figure piane rettilinee.

Il Poliedro chiamasi *Regolare*, quando è contenuto da figure piane regolari, eguali, e simili, e tutti i di lui angoli solidi sono tra di loro eguali.

Cinque soltanto sono i poliedri regolari, cioè:

Primieramente il *Tetraedro*, o sia la piramide regolare compresa da quattro triangoli equilateri, ed eguali.

In secondo luogo l'*Esaedro*, o sia il cubo contenuto da sei quadrati eguali.

In terzo luogo l'*Ottaedro* contenuto da otto triangoli equilateri, ed eguali.

In quarto luogo il *Dodecaedro* terminato da dodici figure regolari, ed eguali.

In quinto luogo l'*Icosaedro* contenuto da venti triangoli equilateri, ed uguali. Tutti gli altri poliedri poi diconsi irregolari.

Definizione Quintadecima.

Solidi simili diconsi quelli, che sono contenuti da piani simili, e in numero eguali.

Definizione Sestadecima.

Prismi simili sono quelli, le di cui simili basi sono tra di loro come i quadrati delle altezze.

Lo stesso intendasi delle piramidi simili, e simili cilindri, e coni simili.

Def-

Definizione Decimasettima.

Poichè i circoli de' cilindri, e le basi de' coni sono tra di loro (per il Corollar. 4. della Propos. 2. del Libro 5.) come i quadrati de' raggi, o de' diametri; perciò *Cilindri simili*, e *Coni simili* sono quelli, de' quali i quadrati de' raggi, o de' diametri delle basi sono tra di loro come i quadrati delle altezze. Essendo poi altresì proporzionali le radici de' quadrati proporzionali (per la Propos. 13. del Libro 1.), perciò i cilindri, oppure i coni saranno simili, se i raggi, o i diametri delle basi saranno tra di loro in ragion delle altezze. Oltre a ciò, affinchè i cilindri, o i coni sieno simili, è necessario che gli assi de' medesimi abbiano una stessa inclinazione alle basi.

Definizione Decimaottava.

L'altezza di qualsivoglia prisma, o cilindro, è la linea retta tirata perpendicolarmente dal piano superiore al piano della base: Perciò in un cilindro retto l'asse è l'altezza del medesimo cilindro. L'altezza poi di qualsivoglia piramide, o cono, è la perpendicolare tirata alla base. Per conseguenza nel cono retto l'asse è l'altezza del medesimo cono.

Definizione Decimanona.

Sezione, o sia *segamento* di qualsivoglia corpo, o solido, è una figura piana, che descrivesi in un solido, quando il solido stesso è segato trasversalmente da un piano. Come se il cilindro AB sia segato dal piano EG parallelo alla base AC, il circolo EG, che in quella sezione descrivesi nel cilindro, chiamasi *Sezion del cilindro*. Oltre a ciò i piani, o le basi opposte d'un cilindro, o d'un prisma, diconsi anche sezioni opposte del cilindro, o del prisma. Fig. XVI. Tav. XII.

Definizione Ventesima.

Un cilindro circoscritto a una sfera dicesi quello, il di cui asse è lo stesso coll'asse della sfera, e il diametro della di cui base eguaglia il diametro, o sia l'asse della sfera.

Un cilindro poi circoscritto a un emisferio è quello, che ha la base comune coll'emisferio, e la cui altezza eguaglia un raggio della sfera, o l'altezza dell'emisferio.

PROPOSIZIONE PRIMA.

Teorema.

Ogni figura piana tutta sta a giacere nel medesimo piano.

Dimostrazione.

Primieramente ogni retta linea è posta nel medesimo piano, cioè non può farsi che della stessa retta linea una parte giaccia in un piano, e l'altra parte sia in un altro piano elevato, come è evidente per le Definizioni del piano, e della linea retta (Definiz. 5, e 6. del Libro 2.).

In secondo luogo ogni triangolo tutto giace in un medesimo piano, Imperciocchè il triangolo (per la Definiz. 18. del Libro 2.) è una figura piana; e perciò ripugna (per la Definiz. 6. del Lib. 2.) che una parte del medesimo triangolo giaccia in un piano, e l'altra sia posta in un altro piano.

Fig. XVII. Tav. XII. In terzo luogo se due rette scambievolmente si seghino, giaceranno in un medesimo piano: ovvero tra due rette che scambievolmente si seghino AB, AC, sempre può essere esteso qualche piano. Imperciocchè se due qualsivoglia punti B, e C delle medesime linee si uniscano colla retta BC, si avrà il triangolo ABC, il quale tutto (per la seconda parte) si ritroverà nel medesimo piano ABC. Dunque anche i di lui lati AB, AC, giaceranno nello stesso piano.

In quarto luogo similmente qualsivoglia altra figura piana sempre tutta giace in un medesimo piano. Il che era da dimostrarsi.

Queste sono le Proposizioni 1, e 2. del Libro 11. di Euclide.

PROPOSIZIONE SECONDA.

Teorema.

Fig. XVIII. Tav. XII. *La comun sezione (BA) di due piani (FG, BM) è un linea retta.*

Dimostrazione.

Imperciocchè se la comun sezione BA non fosse una linea retta, allora perchè i punti B, ed A sono comuni all'uno, e all'altro piano, si potrebbe tirare nel piano BM (per il Postul. 1.) la retta ALB, e nell'altro piano FG si tirerebbe l'altra retta AEB: il che ripugna (per la Defin. 5. del Libro 2., e per i Coroll.): Dunque la comun sezione AB è una linea retta. Il che era da dimostrarsi.

Questa è la Proposizione 3. del Libro 11. di Euclide.

PROPOSIZIONE TERZA.

Teorema.

Se una retta linea AC sarà perpendicolare a due rette BE, LF, le quali scambievolmente si seghino in C, la stessa retta AC sarà anche perpendicolare al piano ST, in cui giacciono le stesse rette. Fig. XIX. Tav. XII.

Dimostrazione.

Imperciocchè tirata al punto più alto A la retta LA, se si concepisca che il triangolo rettangolo ACL si rivolga intorno al cateto fisso AC fin tanto che ritorni alla positura, da cui avea cominciato a moversi, l'altro cateto CL descriverà il circolo piano LMEGB, a cui sarà perpendicolare la retta CA, perchè in ogni positura la linea AC sempre è perpendicolare alla retta CL, vale a dire a tutti i raggi del circolo: ma nel medesimo piano descritto dalla retta CL ritrovansi anche le rette LF, BE, perchè (per l'ipotesi) la retta AC è ad esse perpendicolare; le rette poi LF, BE, (parimenti per l'ipotesi) sono nel piano ST; dunque la retta AC (per la Dimostrazione) perpendicolare al piano del circolo sarà altresì perpendicolare al piano ST, in cui ritrovasi il circolo. Il che era da dimostrarsi.

Questa è la Proposizione 4. del Libro 11. di Euclide.

Corollario Primo.

Quindi se la retta AC sarà perpendicolare alle tre rette BE, LF, CM, le quali scambievolmente si seghino in C, quelle tre rette saranno poste in un medesimo piano.

Questa è la Proposizione 5. del Libro 11. di Euclide.

Corollario Secondo.

Oltre a ciò è evidente che dal punto C può esser alzata la sola perpendicolare CA sul piano ST.

PROPOSIZIONE QUARTA.

Teorema.

Le linee rette AB, CL perpendicolari a un medesimo piano EF saranno tra di lor parallele. Fig. XX. Tav. XII.

Dimostrazione.

Tirata nel piano la retta BC, a cui (per la Definiz. 1.) saranno perpendicolari ambo le rette AB, LC, e concepiscasi che la retta AB per-

perpendicolarmente si mova sul piano EF, e che scorra sopra la retta BC, fin tanto che arrivi al punto C, dove coinciderà colla retta CL; imperciocchè altrimenti o l'una, o l'altra d'esse non sarebbe perpendicolare al piano (per il Coroll. 2. della Propos. preced.); e col suo movimento descriverà il piano ABCL, in cui (per la costruzione) giacciono le rette AB, CL, le quali sega la retta BC, e forma gli angoli interni ABC, LCB retti. Dunque (per la Propos. 18. del Libro 2.) le rette AB, CL saranno paralelle. Il che era da dimostrarsi.

Questa è la Proposizione 6. del Libro 11. di Euclide.

Corollario Primo.

Dunque le rette paralelle AB, CL, e la retta BC, che cade sopra di esse, giaceranno in un medesimo piano.

Questa è la Proposizione 7. del Libro 11. di Euclide.

Corollario Secondo.

Che se le due rette AB, CL saranno paralelle, ed una di esse AB sarà perpendicolare al piano EF, anche l'altra CL sarà perpendicolare al medesimo piano, perchè (per il Coroll. 2. della Propos. preced.) dal medesimo punto C può esser alzata una sola perpendicolare al piano EF, la quale (per la Dimostrazion precedente) sarà paralella alla perpendicolare AB: essendo poi (per l'ipotesi) CL paralella alla retta AB, sarà anche perpendicolare al piano EF; imperciocchè altrimenti dal medesimo punto C a una stessa retta AB sarebbero tirate due paralelle: il che ripugna (per la Definiz. 11. del Libro 2.)

Questa è la Proposizione 8. del Libro 11. di Euclide.

PROPOSIZIONE QUINTA.

Teorema.

Fig. XXI. Tav. XII. *Se a una medesima retta linea EM saranno paralelle altre due rette AB, CL, ma non essenti nello stesso piano con quella, esse pure saranno tra di lor paralelle.*

Nel piano AM, in cui vi sono le due paralelle AB, EM, si tiri EA perpendicolare alla retta EM, e si tiri AC.

Dimostrazione.

La retta EM (per la costruzione) è perpendicolare alle due rette AE, EC, le quali scambievolmente si segano in E, perchè (per la

la Propoſiz. 3.) ſarà perpendicolare al piano AEC, in cui giacciono le ſteſſe rette; per conſeguenza tanto la retta AB, quanto la retta CL, le quali (per l'ipoteſi) ſono paralelle a una medeſima retta EM, (per il Coroll. 2. della Propoſiz. preced.) ſaranno anche perpendicolari a un medeſimo piano AEC, e (per la Propoſizion precedente) ſaranno tra di lor paralelle. Il che eraſi da dimoſtrare.

Queſta è la Propoſizione 9. del Libro 11. di Euclide.

PROPOSIZIONE SESTA.

Teorema.

Se due rette AB, BE, le quali a vicenda ſi ſegano in un piano EF, ſaranno paralelle alle rette CL, CG, che ſcambievolmente ſi ſegano in un altro piano GH, i due piani EF, GH ſaranno parimenti tra di lor paralelli. Fig. I. Tav. XIII.

Dimoſtrazione.

Le rette AB, CL (per l'ipoteſi) paralelle ſi ritrovano in un medeſimo piano ABCL (per il Coroll. 1. della Propoſiz. 4.). Similmente le rette paralelle BE, CG, giacciono in un medeſimo piano EBCG; e perciò i piani EF, GH, nè allungati conforme alle direzioni delle linee AB, CL, nè ſecondo le direzioni delle linee EB, GC, poſſono unirſi inſieme, perchè ſe ſi rinontraſſero, anche le linee paralelle AB, CL, ovvero BE, CG ſi unirebbero aſſieme: il che (per la Definiz. 11. del Libro 2.) ripugna. Dunque è neceſſario, che i piani EF, GH (per la Definiz. 5.) ſieno paralelli. Il che eraſi da dimoſtrare.

Queſta è la Propoſizione 15. del Libro 11. di Euclide.

Corollario.

Se poi la retta BC ſarà perpendicolare all' una, e all' altra retta BA, BE, che ſcambievolmente ſi ſegano in B, ſarà perpendicolare al piano EF (per la Propoſ. 3.); ed eſſendo CL paralella alla retta BA, e CG paralella alla retta BE, la retta BC ſarà anche perpendicolare alle due CB, AB (per la Proſiz. 19. del Libro 2.); per conſeguenza (per la Propoſ. 3.) ſarà anche perpendicolare al piano GH. Per la qual coſa i piani, ai quali una medeſima retta linea è perpendicolare, ſono tra di lor paralelli, ed all' oppoſto.

Queſta è la Propoſizione 14. del Libro 11. di Euclide.

PROPOSIZIONE SETTIMA.

Teorema.

Qualsivoglia prisma poligono divideſi in altrettanti prismi triangolari egualmente alti, quanti ſono i lati della baſe, toltine due.

Dimoſtrazione.

Fig. II. Tav. XIII. Sia il Priſma pentagono AM, e dagli eguali angoli GBC, SAF, dell'oppoſte baſi eguali (per la Definiz. 6.), e ſimili, ſi tirino agli oppoſti angoli le rette linee BM, BL, AI, AE; le baſi oppoſte, ovvero ciaſcun de' pentagoni GBCLM, AFEIS ſarà diviſo in tre triangoli, due de' quali GBM, AIS ſono eguali, e ſimili, perchè (per la Definiz. 6.) hanno i lati GB = SA, GM = SI, e l'angolo BGM = ASI; e perciò (per la Propoſ. 6. del Libro 2.) ſarà BM = AI, l'angolo GMB = AIS; laonde dagli eguali angoli GML, EIS togliendo GMB, AIS, (per l'Aſſiom. 3.) reſterà l'angolo BML = EIA: ma (per la Dimoſtrazione) è MB = AL, e (per l'ipoteſi) ML = IE; perciò (per la Propoſ. 6. del Lib. 2.), e (per la Definiz. 1. di queſto Libro) il triangolo BML ſarà eguale, e ſimile al triangolo IEA: ſimilmente eguali, e ſimili ſaranno i triangoli BCL, AEF. Oltre a ciò, perchè le due rette AB, IM ſono (per l'ipoteſi) paralelle, ed eguali a una medeſima retta SG, perciò (per la Propoſ. 5., e per l'Aſſiom. 1.) ſaranno paralelle, ed eguali; ſimilmente l'eguali rette BL, AE ſaranno paralelle. Per tanto i piani ABMI, ABLE ſono paralellogrami, e ſegano l'intero priſma AM in tre parti ABMISG, ABLEIM, ed ABLEFC, le quali (per la Definiz. 6.) ſono tre priſmi triangolari, imperciocchè ſono contenuti (per la Dimoſtrazione) da oppoſti piani paralelli, eguali, e ſimili, e da altrettanti paralellogrami, quanti ſono i lati della baſe. Nella ſteſſa maniera ſi dimoſtra che un priſma eſagono ſi divide in quattro priſmi triangolari, un priſma ettagono in cinque, un priſma ottangolare in ſei priſmi triangolari, e così in ſeguito. Il che era da dimoſtrarſi.

Corollario.

Per tanto ſe due piani paralelli ſieno ſegati da un altro piano, le ſezioni de' piani ſaranno paralelle: come le ſezioni BM, AI fatte dal piano AIMB, che ſega i due piani oppoſti, e paralelli BCLMG, AFEIS (per la Dimoſtrazione) ſono paralelle.

Queſta è la Propoſizione 16. del Libro 11. di Euclide.

PRO-

PROPOSIZIONE OTTAVA.

Teorema.

Primieramente se un prisma triangolare (AM) sia segato trasversalmente da un piano (BCL) paralello alla base (AEF), ovvero (GRM), la sezione (BGL) sarà simile, ed eguale alla base. Fig. III. Tav. XIII.

Dimostrazione.

I piani paralelli BCL, AFE sono segati dal piano AR, perciò (per il Coroll. della Propos. preced.) le sezioni BC, AF saranno paralelle. Per la stessa ragione CL è paralella alla retta FE, e BL paralella alla retta AE: ma (per l'ipotesi) AB è paralella alla retta FC, FC paralella alla retta BL, ed EL paralella alla retta AB; e perciò (per la Propos. 28. del Libro 2.) sarà BC = AF, CL = FE, e BL = AE; laonde (per la Propos. 9. del Libro 2.) sarà l'angolo BGL = AFE, l'angolo CBL = EAF, e BLC = AEF; per conseguenza le sezioni AFE, BCL saranno eguali, e simili. Il che aveasi a dimostrare.

In secondo luogo se qualsivoglia prisma poligono sia segato da un piano paralello alla base, la sezione sarà parimenti eguale, e simile alla base.

Dimostrazione.

Imperciocchè un prisma poligono (per la Propos. precedente) si divide in prismi triangolari, e l'opposte sezioni, oppur basi, si dividono in altrettanti triangoli, de' quali i due opposti sono eguali, e simili, e posti in simil modo: laonde l'intera sezione sarà simile, ed eguale alla base. Il che pure aveasi a dimostrare.

Corollario.

Poichè i circoli (per il Coroll. 3. della Propos. 1. del Libro 5.) sono poligoni d'infiniti lati, e le basi d'un cilindro (per la Definizione 10.) sono circoli eguali; perciò un cilindro può esser considerato come un prisma poligono d'infiniti lati; e perciò la sezione d'un cilindro paralella alla base sarà parimenti un circolo eguale, e simile alla base.

PROPOSIZIONE NONA.

Teorema.

Si concepisce, che ogni prisma sia composto da altrettanti piani eguali alla base, e paralelli, quanti sono gli elementi, o punti, nell' altezza del medesimo prisma: e il prodotto dall' altezza nella base sarà la solidità del medesimo prisma.

Dimostrazione.

Fig. IV. Tav. XIII. Dato qualsivoglia prisma AM, se colla mente si concepisca, che il piano, o la base ASEF con moto costantemente a se paralello e si alzi sino all'altezza, o all'ultima positura GKRM, e che in ogni punto dell'altezza AK; ovvero in ogni positura intermedia BCLI sempre lasci un vestigio di se stesso, è evidente che il piano AE descrive il solido prisma AM. Il che intendasi di qualsivoglia altro prisma.

Oltre a ciò, perchè (per la Dimostraz.) il prisma è composto da altrettanti piani eguali alla base, e simili, quanti sono gli elementi, o punti nell'altezza AK, perciò la solidità di qualsivoglia prisma sarà eguale al prodotto dall'altezza AK, o FR nella base ASEF, li che era da dimostrarsi.

Corollario Primo.

Per la qual cosa dato un prisma paralellepipedo rettangolo, la di cui lunghezza AF sia d'oncie 4 di longitudine, e la larghezza FE sia d'oncie 2, l'area del rettangolo, o della base AFES sarà 2 × 4, cioè di 8 oncie quadrate (per la Definiz. 36. del Libro 2.). L'altezza del prisma, o la retta AK sia d'oncie 27 di longitudine, se moltiplichi l'altezza 27 nella base ritrovata 8, il prodotto 216 sarà la solidità del dato prisma; vale a dire il prisma dato conterrà 216 oncie cubiche.

Corollario Secondo.

Il cilindro (per il Coroll. della Proposiz. 8.) è un prisma poligono d'infiniti lati; perciò anche del cilindro si verificano quelle cose, che abbiamo dimostrate del prisma. Per tanto se (per il Corollario 2., e per lo Scolio della Proposiz. 8. del Libro 5.) si ritrovi l'area del circolo della base d'un cilindro, e si moltiplichi per l'altezza dello stesso cilindro, si avrà la solidità del cilindro medesimo.

PROPOSIZIONE DECIMA.

Teorema.

Se qualsivoglia piramide triangolare (ABCM) fi seghi trasversalmente da un piano (EFL) paralello alla base (BCM), la sezione (EFL) sarà simile alla base. La base poi (BCM) a qualsivoglia sezione (EFL) a se paralella sarà come il quadrato dell' altezza (AZ) di tutta la piramide al quadrato dell' altezza (AI) della tagliata piramide (AEFL). Fig. V. Tav. XIII.

Si seghino CR = FE, e CS = FL, e si tirino le rette ER, SL, RS.

Dimostrazione.

Il piano ABC, che sega i piani paralelli BCM, EFL, fa le sezioni BC, EF (per il Coroll. della Propos. 7.) di lor parallelle, e (per la costruzione) sono eguali; perciò (per la Propos. 29. del Libro 2.) le rette ER, CF saranno paralelle, ed eguali. Similmente l'eguali rette FL, CS si dimostrano paralelle; laonde anche le rette FC, LS saranno paralelle, ed eguali; e perciò (per la Propoſiz. 5., e per l'Assiom. 1.) saranno altresì paralelle, ed eguali tra di loro le rette ER, SL; laonde (per la Propoſiz. 29. del Lib. 2.) la retta EL sarà paralella, ed uguale alla retta RS. Dunque (per la Propoſiz. 9. del Libro 2.) sarà l' angolo RCS = EFL, d' angolo CRS = FEL, ecc., e il triangolo EFL (per la Propoſiz. 5. del Libro 3.) sarà simile, ed eguale al triangolo RCS; ma (per il Coroll. della Propoſ. 7.) è BM paralella alla retta EL, ed alla stessa EL abbiamo dimostrato esser paralella la retta RS; dunque (per la Propoſ. 5.) sarà RS paralella al lato BM. Per tanto (per il Coroll. della Propoſ. 7. del Libro 3.) il triangolo RCS sarà simile al triangolo BCM, conseguentemente (per il Coroll. della Definiz. 1. del Libro 3.) anche il triangolo EFL sarà simile al triangolo BCM. Il triangolo poi BCM è al simile triangolo EFL (per la Propoſizione 14. del Libro 3.) siccome $\overline{CM}^2$ a $\overline{FL}^2$, e ne' triangoli simili ACM, AFL (per il Coroll. della Propoſiz. 7. del Libro 3.) è $\overline{CM}^2 : \overline{FL}^2 = \overline{AM}^2 : \overline{AL}^2$, e ne' simili triangoli AZM, AIL è $\overline{AM}^2 : \overline{AL}^2 = \overline{AZ}^2 : \overline{AI}^2$; dunque (per l'Assiom. 1.) sarà la base BCM alla sezione paralella EFL siccome $\overline{AZ}^2 : \overline{AI}^2$. Il che era da dimostrarsi.

Corollario Primo.

Il medesimo si verifica delle piramidi poligone, perchè si dividono in altrettante piramidi egualmente alte, quanti sono i lati della base Fig. VI. Tav. XIII.

base, toltine due. Così la piramide quadrilatera BCFGI si divide in due piramidi triangolari BCFI, BFGI egualmente alte; e qualsivoglia sezione AEML parallella alla base si dimostra simile alla medesima base CFGI. Imperciocchè i due triangoli CFI, FGI (per la Dimostraz. preced.) sono simili ai triangoli AEL, ELM, e posti in simil modo; laonde l'intera base CFGI sarà simile all'intera sezione AEML.

Corollario Secondo.

Per tanto in ogni piramide le sezioni paralelle alla base andando innanzi dalla base fino al vertice continuamente calano in ragione de' quadrati delle loro altezze, o distanze dal vertice. Se, per esempio, tutta l'altezza AZ sarà il triplo dell'altezza AI, la sezione EFL sarà una nona parte della base BCM; imperciocchè (per la Dimostrazione) è $BCM : EFL = \overline{AZ}^2 : \overline{AI}^2 = 9 : 1$; ed invertendo sarà $EFL : BCM = \overline{AI}^2 : \overline{AZ}^2 = 1 : 9$. Fig. V. Tav. XIII.

Corollario Terzo.

Oltre a ciò, perchè il circolo della base d'un cono (per il Corollario 3. della Proposiz. 1. del Libro 5.) è un poligono regolare d'infiniti lati, perciò il cono è una piramide poligona d'infiniti lati, e le sezioni del cono paralelle alla base saranno simili alla medesima base, cioè saranno anche i circoli, che dalla base andando innanzi fino al vertice continuamente calano in ragion de' quadrati delle loro distanze dal vertice.

PROPOSIZIONE UNDECIMA.

Teorema.

Le piramidi egualmente alte, ovvero costituite tra piani paralelli, sono fra di loro in ragion delle basi.

Figg. VII, e VIII. Tav. XIII. Le piramidi EFHM, ABCDL abbiano eguali altezze EI = AZ, sarà la piramide EFHM alla piramide ABCDL siccome la base FHM alla base BCDL.

Dimostrazione.

Imperciocchè si concepisce che l'una, e l'altra piramide sia composta da altrettanti piani simili alla base, e paralelli decrescenti in ragion quadrata delle distanze dal vertice (per il Coroll. 2. della Propos. preced.) quanti sono gli elementi, o punti nell'altezza EI, ovvero AZ.

Per

Per tanto dalle altezze eguali E I, A Z si prendano quali si vogliano parti eguali B S, A R, e per i punti S, ed R si essendano i piani G K O, T V X Y paralelli alle basi F H M, B C D L, le sezioni G K O, T V X Y (per la Propoſiz. preced.) ſaranno ſimili alle basi corriſpondenti, e ſarà F H M : G K O = $\overline{EI}^2$: $\overline{ES}^2$, ovvero $\overline{AZ}^2$: $\overline{AR}^2$, perchè è E I = A Z, ed E S = A R. Similmente (per il Corollario 2. della Propoſiz. preced.) ſarà B C D L : T V X Y = $\overline{AZ}^2$: $\overline{AR}^2$; e perciò (per l'Aſſiom. 1.) ſarà F H M : G K O = B C D L : T V X Y; ed alternando (per la Propoſiz. 3. del Lib. 1.) ſarà la baſe F H M alla baſe B C D L ſiccome la ſezione G K O alla ſezione ugualmente alta T V X Y: il che ſempre ſi verifica di tutte le ſezioni egualmente alte; e perciò raccogliendo (per la Propoſ. 8. del Libro 1.) ſarà la baſe F H M alla baſe B C D L ſiccome la ſomma di tutte le ſezioni, che coſtituiſcono la piramide E F H M, alla ſomma di tutte l'altrettante ſezioni, che formano la piramide A B C D L: vale a dire, ſarà una piramide all'altra egualmente alta ſiccome la baſe alla baſe. Il che era da dimoſtrarſi.

Queſte ſono le Propoſizioni 5, e 6. del Libro 12. di Euclide.

Corollario Primo.

Per tanto le piramidi egualmente alte avranno una medeſima, o eguali baſi, ſaranno tra di loro parimenti eguali.

Corollario Secondo.

I coni egualmente alti ſono altresì tra di loro come le baſi, cioè come i circoli baſi de' coni, perchè i coni (per il Corollar. 3. della Propoſ. 19.) ſono piramidi poligone d'infiniti lati.

Queſta è la Propoſizione 10. del Libro 12. di Euclide.

Oltre a ciò ſe i circoli, che ſono baſi de' coni, ſaranno eguali, anche i coni egualmente alti ſaranno tra di loro eguali.

Corollario Terzo.

Poichè i circoli baſi de' coni (per il Corollario 4. della Propoſizione 2. del Libro 5.) ſono tra di loro come i quadrati de' raggi, o de' diametri; perciò i coni egualmente alti, i quali (per la Dimoſtrazione) ſono tra di loro in ragion delle baſi, ſaranno anche tra di loro come i quadrati de' raggi, o de' diametri delle baſi.

PROPOSIZIONE DUODECIMA.

Teorema.

Un prisma è il triplo d' una piramide, che abbia la medesima, o un' egual base, e la medesima, o un' egual altezza.

Dimostrazione.

Fig. IX. Tav. XIII. Primieramente sia il prisma triangolare BCLEAF, in cui si tirino i diametri de' parallellogrammi BE, AB, AL, le due piramidi ABLC, BFEA sopra le basi (per la Definiz. 6.) eguali BLC, EAF, e che hanno la medesima altezza, oppure costituite tra i piani paralelli BCL, AEF (per il Coroll. 1. della Propos. preced.) saranno tra di loro eguali. Oltre a ciò se per vertice della piramide BEAF prendasi A, la di lei base sarà EFB, e la medesima piramide ABEF (per il Coroll. 1. della Propoſiz. preced.) sarà eguale alla piramide ABLE, il di cui vertice è A, e la base EBL, perchè hanno le basi EBF, EBL (per la Propoſiz. 28. del Libro 2.) eguali, ed hanno una medesima altezza, che è la perpendicolare tirata dal vertice comune A al piano EFBL, in cui ritrovansi le basi; e perciò (per l'Assiom. 8.) le tre piramidi ABCE, ABEF, ABLE saranno tra di loro eguali, e prese insieme (per l'Assiom. 11.) eguagliano l'intero prisma BCLEAF. Dunque il medesimo prisma sarà triplo della piramide a se iscritta ABCL, cioè che ha la medesima base BCL, e la medesima altezza del prisma.

Questa è la Propoſizione 7. del Libro 12. di Euclide.

In secondo luogo se il prisma sarà poligono, allora (per la Propoſizione 7.) potrà dividersi in prismi triangolari, ciascun de' quali sarà il triplo di ciascuna delle piramidi triangolari a se iscritte.

Per la qual cosa tutti i prismi triangolari presi insieme saranno il triplo di tutte le piramidi triangolari tolte insieme, cioè un prisma poligono sarà il triplo della piramide poligona a se iscritta. Il che erasi da dimostrare.

Corollario Primo.

Similmente il cilindro è triplo del cono a se iscritto, il qual cioè abbia col cilindro una medesima base, ed una medesima altezza; perchè il cilindro è un prisma d' infiniti lati, e il cono è una piramide altresì di lati infiniti.

Questa è la Propoſizione 10. del Libro 12. di Euclide.

Corollario Secondo.

Poichè (per la Propoſiz. 9., e per i di lei Corollarj) la solidità d' un

d'un prisma, o d'un cilindro, si ottiene moltiplicando la base per l'altezza; perciò la solidità d'una piramide, o d'un cono sarà eguale al prodotto dalla base nella terza parte dell'altezza; perchè (per la Dimostrazione) la piramide, o il cono, è la terza parte del prisma, o del cilindro, che ha medesima base, e l'altezza medesima.

PROPOSIZIONE TERZADECIMA.

Teorema.

Se qualsivoglia prisma (AM) sia segato da un piano (LZK) parallelo alla base (ABC), i segmenti (AK, LM) del diviso prisma saranno tra di loro in ragion delle altezze (SI, IF), e delle basi (BZ, ZF). Fig. X. Tav. XIII.

Dimostrazione.

Imperciocchè la solidità del segmento, o del prisma AK (per la Propos. 9.) è uguale al prodotto dall'altezza SI nella base ABC, e la solidità del prisma LM uguaglia il prodotto dall'altezza IF nella base KLZ. Per tanto sarà il prisma AK al prisma LM = ABC × SI : KLZ × IF, e dividendo per le basi (per la Propos. 8.) eguali ABC, KLZ, (per la Propos. 10. del Libro 1.) sarà il prisma AK al prisma LM = SI : IF.

Oltre a ciò, perchè i piani paralelli ABC, KLZ sono segati dal piano BFS, perciò (per il Coroll. della Propositz. 7.) sarà la sezione BS paralella alla sezione ZI; per conseguenza (per la Propositz. 2. del Libro 3.) sarà BZ : ZF = SI : IF; ma, (per la Dimostrazione) è il prisma AK al prisma LM siccome SI : IF, perciò (per l'Assiom. 1.) sarà il prisma AK al prisma LM = BZ : ZF, ovvero = AL : LE, ecc. perchè BZ = AL, e ZF = LE. Per tanto se qualsivoglia prisma, ecc. Il che era da dimostrarsi.

Corollario Primo.

Per le cose dimostrate è il prisma AK al prisma LM siccome l'altezza, o il lato AL al lato LE; e componendo (per la Prop. 4. del Libro 1.) sarà AK + LM : LM = AL + LE : LE, cioè l'intero prisma AM al segmento LM siccome il lato AE alla parte LE; ovvero siccome l'altezza ES alla di lei parte IF. Similmente dimostrasi AM : AQ = AE : AL, ecc.

Corollario Secondo.

Lo stesso si verifica de' cilindri, perchè sono prismi d'infiniti lati. Di più in qualsivoglia cilindro AM segato dal piano EF parallelo alla base AB, sarà la porzione, o il cilindro AE al segmen- Fig. XI. Tav. XIII.

mento, o cilindro EM, siccome l'asse SI coll'asse IZ, perchè (per la Propos. 24. del Libro 2.) è il lato AE = SI, ed EC = IZ.

Questa è la Proposizione 23. del Libro 12. di Euclide.

PROPOSIZIONE QUARTADECIMA.

Teorema.

Gli prismi egualmente alti sono tra di loro in ragion delle basi.

Dimostrazione.

Imperciocchè i prismi (per la Propos. 12.) sono il triplo delle piramidi a se iscritte; le piramidi poi egualmente alte (per la Propos. 11.) sono tra di loro come le basi; dunque (per la Propos. 10. del Libro 1.) anche i prismi tripli delle piramidi saranno tra di loro in ragion delle basi.

Questa è la Proposizione 32. del Libro 11. di Euclide.

Corollario Primo.

Quindi se i prismi egualmente alti avranno una medesima, o eguali basi, saranno parimenti eguali tra di loro.

Queste sono le Proposizioni 30. e 31. del Libro 11. di Euclide.

Corollario Secondo.

Tutte queste cose altresì si verificano de' cilindri, perchè sono prismi d'infiniti lati.

PROPOSIZIONE QUINTADECIMA.

Teorema.

Fig. XII. Tav. XIII. *Gli prismi (AD, GL), che hanno le basi eguali (ABC = GHI), sono tra di loro in ragione delle altezze (AE, GZ).*

Dimostrazione.

Imperciocchè dalla maggior altezza AE si seghi la parte AT eguale alla minore GZ, e pel punto T si estenda il piano TRM parallelo alla base ABC, sarà il prisma AM (per il Corollar. 1. della Propos. preced.) eguale al prisma GL; ma il prisma AD è al prisma AM, siccome AE : AT (per il Coroll. 1. della Propos. 13.), e perciò sostituendo il prisma GL per l'eguale prisma AM, e GZ per l'eguale AT, sarà il prisma AD al prisma GL siccome AE a GZ. Il che avea si a dimostrare.

Co-

Corollario Primo.

Quindi le piramidi, che sono subtriple de' prismi a le circoscritti, le avranno alla medesima, o eguali basi, saranno pure tra di loro in ragion delle altezze (per il Coroll. 1. della Propos. 15. del Lib. 1).

Corollario Secondo.

Lo stesso intendasi de' cilindri, e de' coni, perchè i cilindri sono prismi, e i coni sono piramidi d'infiniti lati.

Questa è la Proposizione 14. del Libro 12. di Euclide.

PROPOSIZIONE SESTADECIMA.

Teorema.

Gli prismi, quali si vogliano, (AD, GL) sono tra di loro in ragione composta dalle ragioni delle basi (ABC, GHI), e delle altezze (AE, GZ). Fig. XII. Tav. XIII.

Dal prisma AD tolgasi, come nella Propolizion precedente, il prisma AM egualmente alto col prisma GL.

Dimostrazione.

Dei tre prismi AD, AM, GL, il primo AD (per il Coroll. 1. della Propos. 13.) è al secondo AM siccome AE : AT, ovvero sostituendo GL per l'eguale AM, è AD : GL = AE : GZ; il secondo poi AM (per la Propos. 14.) è al terzo GL siccome la base ABC alla base GHI; dunque (per la Propos. 8. del Libro 3.) sarà il primo AD al terzo GL in ragion composta dalle ragioni AE : GZ del primo al secondo, e ABC : GHI del secondo al terzo; dunque (per la Propos. 8. del Libro 1. e per il Coroll. 3. della Definiz. 6. del medesimo Libro) sarà il prisma AD al prisma GL siccome ABC × AE : GHI × GZ. il che era da dimostrarsi.

Corollario Primo.

Se i prismi AD, GL saranno simili, cioè terminati da piani simili, e posti in simil modo, e in numero eguali, vale a dire se sarà AE : GZ = AC : GI = AB : GH = BC : HI ecc. e gli angoli corrispondenti saranno eguali EAB = ZGH, EAC = ZGI, CAB = IGH ecc., allora (per le Proposizioni 14. e 16. del Lib. 3.) sarà la base ABC alla base GHI siccome $\overline{AB}^2 : \overline{GH}^2$, ovvero siccome $\overline{AE}^2 : \overline{GZ}^2$, ecc. Ma (per la Dimostrazione) è

AD

$AD : GL = ABC \times AE : GHI \times GZ$; laonde sostituendo la ragione $\overline{AE}^2 : \overline{GZ}^2$ per l'egual ragione $ABC : GHI$, sarà $AD : GL = \overline{AE}^2 : \overline{GZ}^2 \times GZ$, cioè $AD : GL = \overline{AE}^3 : \overline{GZ}^3$; ma così è che (per l'ipotesi) è $AE : GZ = AC : GI = AB : GH$ ecc., e perciò (per la Proposiz. 13. del Libro 1.) sarà anche $\overline{AE}^3 : \overline{GZ}^3 = \overline{AC}^3 : \overline{GI}^3 = \overline{AB}^3 : \overline{GH}^3$ ecc. Dunque (per l'Assiom. 1.) sarà $AD : GL = \overline{AC}^3 : \overline{GI}^3 = \overline{AB}^3 : \overline{GH}^3$ ecc. vale a dire, gli prismi simili saranno tra di loro come i cubi de' lati omologi, o delle altezze.

Per tanto se i lati d'un prisma saranno quadrupli de' lati d'un altro, e simile prisma, allora il primo sarà sessantaquattro volte maggiore del secondo prisma.

In questo Corollario si contiene la Proposizione 33. del Libro 11. di Euclide.

Corollario Secondo.

Tutte queste cose si verificano delle piramidi simili, perchè (per la Propos. 12.) sono subtriple de' prismi a se circoscritti.

Corollario Terzo.

Il medesimo si verifica de' cilindri simili, e de' simili coni, perchè i cilindri sono prismi, e i coni sono piramidi d'infiniti lati; e perciò i cilindri, o i coni saranno tra di loro come i cubi delle altezze, ovvero siccome i cubi de' diametri, o de' raggi delle basi, perchè (per la Definiz. 17.) hanno i diametri, e i raggi delle basi in ragion delle altezze.

PROPOSIZIONE DECIMASETTIMA.

Teorema.

I prismi, che hanno le basi in ragion reciproca delle altezze, sono eguali. All'opposto i prismi eguali hanno le basi in ragion reciproca delle altezze.

Dimostrazione.

Fig. XII. Tav. XIII. Imperciocchè se è $ABC : GHI = GZ : AE$, (per la Propos. 1. del Libro 1.), sarà $ABC \times AE = GHI \times GZ$, cioè il prisma AD eguale al prisma GL. Scambievolmente se sarà $ABC \times AE = GHI \times GZ$, sciogliendo (per il Coroll. 1. della Propos. 2. del Libro 1.) sarà $ABC : GHI = GZ : AE$, cioè i prismi eguali hanno le basi in ragion reciproca delle altezze. Il che era da dimostrarsi.

Corollario.

Tutte le stesse cose si verificano delle piramidi, de' cilindri, e de' coni, come è manifesto dalle dimostrazioni precedenti.

PRO-

PROPOSIZIONE DECIMAOTTAVA.

Teorema.

Una Sfera è uguale a due terze parti del cilindro circoscritto.

Sia il quadrato ABCL, in cui si tiri il diametro AC, e dal centro A col raggio AL, o AB si descriva l'arco LFB, il quale (per la Definiz. 7. del Libro 4.) sarà la quarta parte d'una periferia, e il triangolo mistilineo ALB (per la Definiz. 8. del Lib. 4.) farà il quadrante d'un circolo. Si tiri il raggio AF, e per il punto F la retta ST paralella al lato AB. Fig. XIII. Tav. XIII.

Dimostrazione.

Se si concepisca il quadrato ABCL col triangolo ALC, e col quadrante ALB d'un circolo talmente rivolgersi intorno al lato immobile AL, finchè ritorni alla positura, da cui era partito, in un tal rivolgimento il quadrato ABCL (per la Definiz. 10.) descriverà un cilindro; il triangolo rettangolo ALC (per la Definiz. 12.) descriverà un cono; e il quadrante ALB (per la Definiz. 13.) un emisferio: ma il cilindro (per il Coroll. della Propos. 9.) è composto da altrettanti circoli eguali, che hanno i raggi eguali AB, ST, LC, ecc., quanti sono gli elementi, o punti nella perpendicolare AL; il cono altresì è costituito da un egual numero di circoli decrescenti (per il Coroll. 3. della Propos. 10.) C, R, fino al punto A, i raggi de' quali sono le rette LC, SR, ecc., cioè gli elementi del triangolo ALC; similmente l'emisferio è composto da altrettanti circoli, che hanno i raggi AB, SF, ecc., decrescenti dal punto A fino ad L. Per conseguenza i tre descritti corpi sono composti da un egual numero di elementi, cioè di circoli piani.

Ora sia ST raggio d'uno de' circoli eguali, che costituiscono il cilindro, sarà SF un raggio del corrispondente circolo nell'emisferio, ed SR sarà un raggio del corrispondente circolo nel cono: ma perchè i circoli (per il Coroll. 4. della Propos. 2. del Libro 5.) sono tra di loro come i quadrati de' raggi; perciò i circoli descritti dal raggio ST nel cilindro, dal raggio SF nell'emisfero, e dal raggio SR nel cono saranno tra di loro come i quadrati de' raggi ST, SF, SR: (per la costruzione pai) è ST = AB, ed AB = AF; perciò (per l'Assiom. 1.) sarà ST = AF; e (per il Coroll. della Propos. 7. del Libro 3.) è AL : LC = AS : SR, e (per l'ipotesi) è AL = LC; perciò sarà anche AS = SR: laonde in vece delle linee ST, SR, si sostituiscono l'eguali rette AF, AS, e i circoli descritti da' raggi ST, SF, SR, i quali (per la Dimostrazione) sono tra di loro come i quadrati de' medesimi raggi, saranno anche tra di loro siccome i quadrati delle rette AF, SF, AS: ma (per il Coro-

lario 1. della Propos. 18. del Libro 3.) è $\overline{AF}^2 = \overline{SF}^2 + \overline{AS}^2$; dunque anche il circolo descritto dal raggio ST nel cilindro sarà eguale ai due circoli descritti da' raggi SF nell'emisferio, ed SR nel cono. Per tanto se dal circolo descritto dal raggio ST nel cilindro si tolga il circolo descritto dal raggio SR nel cono, resterà il circolo descritto nell'emisferio dal raggio SF.

Lo stesso si verifica di ciascuno de' corrispondenti circoli, che costituiscono i sopradetti solidi. Dunque se dalla solidità del cilindro si sottragga la solidità del cono, resterà la solidità dell'emisferio. E poi il cono (per il Corollar. 1. della Propos. 12.) la terza parte d'un cilindro egualmente alto, e della medesima base; e perciò l'emisferio sarà eguale all'altre due terze parti del medesimo cilindro a se circoscritto. Ciò, che si è dimostrato dell'emisferio, lo stesso intendasi del di lui duplo, o della sfera intera, il di cui cilindro circoscritto altresì è duplo del cilindro circoscritto all'emisferio. Per tanto la solidità d'una Sfera è uguale a due terze parti del cilindro circoscritto. Il che era da dimostrarsi.

Questa è la celebre Proposizione 32. di Archimede nel Libro della Sfera, e del Cilindro.

Corollario Primo.

Dunque la Sfera è al Cilindro a se circoscritto siccome 2 : 3; ed invertendo, un cilindro è alla Sfera a se iscritta siccome 3 : 2.

Corollario Secondo.

Per la qual cosa ritrovata la solidità del cilindro circoscritto, se dalla solidità del medesimo Cilindro si levi la terza parte, resterà la solidità della Sfera.

PROPOSIZIONE DECIMANONA.

Teorema.

Le Sfere sono tra di loro in ragion triplicata, cioè come i cubi de' diametri.

Dimostrazione.

Tutti i cilindri circoscritti alle sfere (per la Definiz. 10.) hanno i diametri delle basi eguali all'altezze; e perciò (per la Definiz. 17.) sono simili. I cilindri poi simili (per il Corollar. 3. della Proposizion 16.) sono tra di loro come i cubi de' diametri delle basi. Oltre a ciò, perchè (per la Propos. preced.) il cilindro sempre è alla sfera a se iscritta siccome 3 : 2, perciò (per l'Assiom. 1.) qualsi-

voglia

voglia cilindro è alla sfera a se iscritta ficcome un altro cilindro alla sfera a se iscritta; ed alternando, sarà un cilindro a un altro simile cilindro, ficcome la sfera nel primo iscritta alla sfera iscritta nel secondo. I cilindri poi sono tra di loro come i cubi de' diametri delle basi; dunque (per l'Assiom. 1.) anche le sfere saranno tra di loro come i cubi de' loro diametri, i quali (per la Defin. 20.) eguagliano i diametri delle basi de' medesimi cilindri; oppure saranno tra di loro come i cubi de' raggi, essendo la ragione de' raggi, e de' diametri la medesima (per il Corollar. 1. della Propoſiz. 15. del Libro 1.). Dunque le Sfere ecc. Il che era da dimostrarsi.

Questa è la Propoſizione 18. del Libro 12. di Euclide.

Corollario.

Dunque la sfera, il cui diametro sia 2, alla sfera, il di cui diametro sia 6, sarà come 8 : 216; ma è 8 : 216 = 1 : 27; perciò un diametro triplo, ovvero, che è il medesimo, un raggio triplo produce una sfera ventisette volte maggiore. Similmente un raggio quintuplo descrive una sfera cento e venticinque volte maggiore della sfera descritta da un raggio semplice. Fig. XIV. Tav. XIII.

Fine del Libro Sesto, ed ultimo della Geometria.

INDICE

Delle Proposizioni, che sono dimostrate in quest' Opera.

Nel Libro I. dell' Aritmetica Universale.

I. Probl. *Pronunziare qualsivoglia dato numero descritto co' caratteri Aritmetici.* Pag. 12
II. Probl. *Radunare i numeri interi in una sola somma.* 13
III. Probl. *Sottrarre un numero intero da un altro intero maggiore.* 15
IV. Probl. *Moltiplicare un numero intero per un altro numero intero.* 16
V. Probl. *Dividere un numero intero per un altro numero intero.* 21
VI. Probl. *Raccogliere in una sola somma le quantità Algebraiche.* 26
VII. Probl. *Ridurre le quantità composte ad espressioni più semplici.* 27
VIII. Probl. *Sottrarre le quantità Algebraiche.* 28
IX. Probl. *Moltiplicare le quantità Algebraiche.* 29
X. Probl. *Dividere le quantità Algebraiche.* 33

Nel Libro II. dell' Aritmetica Universale.

I. Teor. *Se qualsivoglia frazione si moltiplichi per il suo denominatore, il prodotto sarà il numeratore della medesima frazione.* 48
II. Probl. *Ridurre un intero in frazione d' un dato denominatore.* 49
III. Probl. *Ridurre le frazioni agl' interi.* 50
IV. Probl. *Ritrovare la massima misura comune di due numeri.* 51
V. Probl. *Ridurre le frazioni a termini minimi.* 52
VI. Probl. *Ridurre le frazioni allo stesso nome.* 52
VII. Probl. *Sommare le frazioni.* 54
VIII. Probl. *Sottrarre le frazioni.* 54
IX. Probl. *Moltiplicare le frazioni.* 56
X. Probl. *Dividere le frazioni.* 57

Nel Libro III. dell' Aritmetica Universale.

I. Probl. *Ritrovare il quadrato, il cubo, la quarta potenza, la quinta, e tutte l' altre di qualsivoglia data quantità.* 63
II Probl. *Estrarre la radice quadrata da un dato numero.* 65
III. Probl. *Estrarre la radice cubica da un dato numero.* 69
IV. Probl. *Estrarre la radice quadrata dalle quantità Algebraiche.* 72
V. Probl. *Estrarre la radice cubica dalle quantità letterali.* 73
VI. Teor. *Radici uguali formano quadrati uguali, cubi uguali, ecc. E scambievolmente quadrati uguali, cubi uguali, ecc. hanno radici uguali.* 75

Nel Libro I. della Geometria.

In cui trattasi delle Ragioni, e delle Proporzioni delle quantità.

I. Teor. *Dati quattro termini proporzionali, il prodotto degli estremi sarà eguale al prodotto de' medj.* 85

II. Teor. *Se quattro termini saranno tra di loro [illegible] disposti, che il prodotto dal primo nel quarto sia eguale al prodotto dal secondo nel terzo, essi quattro termini saranno proporzionali.* 86

III. Teor. *Dati quattro termini proporzionali, primieramente saranno [illegible] proporzionali il secondo termine al primo, siccome il quarto al terzo; il qual genere di argomentare dicesi* Rivoltare, o invertir la ragione: *In secondo luogo saranno altresì proporzionali il primo al terzo, siccome il secondo al quarto; il che dicesi* Alternare, o Permutar la ragione. 88

IV. Teor. *Se vi saranno quattro termini proporzionali, la somma del primo col secondo avrà la medesima ragione al secondo, che ha la somma del terzo col quarto all'istesso quarto. E quest' argomentazione dicesi* Composizion della ragione. 89

V. Teor. *Qualunque volta vi saranno quattro termini proporzionali, la differenza tra il primo, e il secondo termine allo stesso secondo avrà la medesima ragione, che ha la differenza tra il terzo, e il quarto allo stesso quarto termine. Questo genere di argomentare dicesi* Division della ragione. 90

VI. Teor. *Se vi saranno due, o più Geometriche proporzioni discrete, [illegible] condizione, che gli stessi conseguenti della prima proporzione (conservato l'ordine di primo, e di secondo) sieno anche antecedenti della seconda proporzione, e i conseguenti della seconda sieno parimenti antecedenti della terza proporzione, e così in seguito: il primo antecedente della prima proporzione sarà al primo conseguente dell'ultima proporzione siccome il secondo antecedente della prima al secondo conseguente dell'ultima proporzione. Il che dicesi argomentare* dall' eguaglianza ordinata, *o sia coll' ordinare.* 93

VII. Teor. *Se vi saranno due proporzioni di tal condizione, che il primo conseguente della prima sia anche primo antecedente della seconda proporzione, e il secondo antecedente della prima sia parimenti secondo conseguente della seconda proporzione; allora il primo antecedente della prima proporzione sarà al primo conseguente della seconda, siccome il secondo antecedente della seconda proporzione al secondo conseguente della prima proporzione. Quest' argomentazione dicesi* Perturbar la ragione, ovvero dall' eguaglianza perturbata. 94

VIII. Teor. *Se vi saranno più grandezze proporzionali, ovvero più ragioni eguali, raccogliendo, sarà la somma di tutti gli antecedenti alla somma di tutt' i conseguenti, siccome qualsivoglia termine antecedente al suo conseguente.* 94

IX. Probl. *Dati tre termini ritrovare un quarto proporzionale.* 95

X. Teor. *Dati quattro termini proporzionali, se gli antecedenti, o i conseguen-*

guenti, o il primo e il secondo termine, o il terzo e il quarto, o tutti i termini fi moltiplichino, oppur fi dividano per una medesima quantità, i quattro termini sempre resteranno proporzionali. 97

XL. Teor. Se due, o più proporzioni avranno i medesimi conseguenti, allora la somma de' primi antecedenti sarà al comun conseguente siccome la somma de' secondi antecedenti al suo comun conseguente. 99

XLI. Teor. Date due proporzioni, moltiplicando, o dividendo i termini d' una per i corrispondenti termini dell' altra proporzione, i prodotti nel primo caso, e i quozienti nel secondo saranno proporzionali. 100

XLII. Teor. Dati quattro termini proporzionali, le potenze eguali, e le radici eguali de' medesimi termini saranno altresì proporzionali. 101

XIV. Teor. Due qualfivoglia frazioni saranno tra di loro in ragione composta dalla diretta ragione de' numeratori, e dalla ragione inversa, o reciproca de' denominatori. Cioè, sarà la prima frazione alla seconda, come il prodotto dal numerator della prima nel denominator della seconda frazione al prodotto dal numerator della seconda frazione nel denominator della prima. 102

XV. Teor. Le frazioni del medesimo nome sono tra di loro in ragion diretta de' numeratori. Le frazioni poi, che hanno il medesimo numeratore, sono tra di loro in ragion reciproca dei denominatori. 102

XVI. Teor. Se vi saranno quantità del medesimo genere quante si vogliano, allora la ragione della prima all' ultima sarà composta da tutte le ragioni intermedie; cioè dalle ragioni della prima alla seconda, della seconda alla terza, della terza alla quarta, ecc. 104

XVII. Teor. In ogni progressione Geometrica la ragione del primo termine al terzo è quadrata, o duplicata della ragione del primo al secondo; la ragione del primo al quarto è triplicata della ragione del primo al secondo; la ragione del primo al quinto è quadruplicata della ragione del primo al secondo; e così in seguito. 105

XVIII. Teor. In ogni progressione Geometrica il prodotto degli estremi uguaglia il prodotto de' termini egualmente distanti da' medesimi estremi; ed è uguale al quadrato del termine medio quando il numero de' termini è dispari. 107

XIX. Probl. Dati il denominator della ragione, e i termini massimo, e minimo d'una progressione Geometrica, ritrovare la somma di tutti i termini. 107

XX. Teor. Nella proporzione Aritmetica la somma degli estremi uguaglia la somma de' medi; ed è dupla del termine medio nella proporzione continua. 109

XXI. Teor. In ogni progressione Aritmetica la somma degli estremi è uguale alla somma de' termini dagli estremi egualmente distanti; ed è dupla del termine medio, quando il numero de' termini è impari. 110

Nel Libro II. della Geometria.

I. Probl. Sopra una data linea retta terminata descrivere un triangolo equilatero. 121

II. Probl. Da un dato punto tirare una linea retta eguale a una data retta terminata. 122

III. Probl. Date due linee rette ineguali, dalla maggiore tagliare una parte eguale alla minore. 122

IV. Probl. Date tre linee terminate, due delle quali in qualche modo prese eccedano

dano l' altra, sopra una d' esse costituire un triangolo, che abbia due lati eguali all' altre due date linee rette. 123

V. Teor. Se un triangolo avrà due angoli eguali a due angoli d'un altro triangolo, e il lato posto tra i due angoli eguali sarà in ambidue eguale; l' angolo, e i lati che restano saranno altresì in ambidue eguali, e un triangolo sarà all' altro eguale. 124

VI. Teor. Se due triangoli avranno un angolo eguale ad un angolo, e se i lati, che formano gli angoli eguali, saranno eguali tra di loro gli uni agli altri, anche la base sarà eguale alla base, un triangolo sarà eguale all' altro, e gli altri due angoli saranno eguali agli altri due, a' quali si oppongono i lati eguali. 124

VII. Teor. Se due triangoli avranno due lati eguali a due lati, gli uni agli altri, e avranno l' angolo maggior dell' altro contenuto dai lati eguali, avranno anche la base maggior della base. 125

VIII. Teor. Se due triangoli avranno due lati eguali a due lati, l' uno all' altro, e la base maggior della base, avranno parimenti l' angolo maggior dell' altro contenuto dai lati eguali. 126

IX. Teor. Se ciascun lato di due triangoli sarà uguale a ciascun altro lato de' medesimi, anche ciascun angolo sarà uguale a ciascun altro degli stessi, a cui si oppongono i lati uguali, e un triangolo sarà all' altro eguale. 127

X. Probl. Sopra una data retta linea indefinita, e a un punto dato in essa costituire un angolo rettilineo eguale a un dato angolo rettilineo. 128

XI. Probl. Dividere un dato angolo rettilineo in due parti. 128

XII. Probl. Dividere in due parti una data retta linea terminata. 129

XIII. Probl. Su d' una data retta linea, e da un punto dato in essa alzare una linea perpendicolare. 130

XIV. Probl. A una data retta linea indefinita, e da un punto dato fuori di essa calare una linea perpendicolare. 130

XV. Teor. Una linea retta stante sopra ad un' altra retta forma due angoli conseguenti, o retti, o eguali a due retti. 131

XVI. Teor. Se a qualche punto in una data retta da parti opposte concorrano due linee rette, le quali formino due angoli conseguenti eguali a due retti, quelle due linee rette saranno poste direttamente, cioè comporranno una sola retta linea. 132

XVII. Teor. Due linee rette tagliandosi scambievolmente formano gli angoli verticali opposti tra di loro eguali. 133

XVIII. Teor. Le linee rette perpendicolari a una medesima retta sono tra di se paralelle. 134

XIX. Teor. Se una linea retta cadendo sopra due rette farà gli angoli alterni eguali tra di loro; o l' angolo esterno eguale all' angolo interno, ed opposto alla medesima parte; o due angoli interni, e posti alla stessa parte eguali a due angoli retti, quelle due linee rette sempre saranno paralelle. 135

XX. Teor. Se una linea retta cadendo sopra due paralelle sarà perpendicolare ad una delle paralelle, sarà anche all' altra perpendicolare. 137

XXI. Teor. Una linea retta cadendo obliquamente sopra due paralelle farà gli angoli alterni tra di loro eguali; l' angolo esterno eguale all' in-

terno,

terno, ed opposto, e alla medesima parte; e i due angoli interni e posti alla medesima banda eguali a due retti. 137
XXII. Teor. Le linee rette paralelle a una medesima retta, saranno altresì tra di lor paralelle. 139
XXIII. Probl. Per un dato punto tirare una linea paralella a una data retta. 139
XXIV. Teor. In ogni triangolo rettilineo i tre angoli presi insieme uguagliano due angoli retti; e tirato in lungo qualsivoglia lato, l'angolo esterno sarà eguale ai due angoli interni, ed opposti presi insieme. 140
XXV. Teor. In ogni triangolo Isoscelo gli angoli costituiti sopra la base sono tra di loro eguali; ed allungati i lati eguali, gli angoli situati di sotto alla base sono altresì tra di loro eguali. 144
XXVI. Teor. Quel triangolo, che ha un lato maggior dell'altro, avrà anche l'angolo opposto al lato maggiore più grande dell'angolo opposto al lato minore. 145
XXVII. Teor. Il triangolo, che ha due angoli tra di se eguali, avrà parimenti due lati eguali opposti agli stessi angoli. Se poi il triangolo avrà un angolo maggior d'un angolo, allora avrà il lato opposto all'angolo maggiore più grande del lato opposto all'angolo minore. 146
XXVIII. Teor. Ogni Paralellogramo ha i lati opposti eguali, gli angoli opposti eguali, ed è diviso in due parti dalla diagonale, o sia dal diametro. 147
XXIX. Teor. La figura quadrilatera, che ha due lati paralelli, ed eguali, avrà anche gli altri due lati paralelli ed uguali, cioè sarà un Paralellogramo. 148
XXX. Probl. Sopra una data retta descrivere un quadrato, o qualunque altro paralellogramo. 148
XXXI. Teor. I paralellogrami costituiti sopra una medesima base, e dentro le stesse paralelle, sono tra di loro eguali. 149
XXXII. Teor. I triangoli costituiti sopra una medesima base, e nelle medesime paralelle, sono tra di loro eguali. 151
XXXIII. Teor. Se un paralellogramo, e un triangolo, saranno posti sopra una medesima base, e nelle medesime paralelle, il paralellogramo sarà il duplo del triangolo. 151
XXXIV. Probl. Costituire un paralellogramo eguale a un dato triangolo, e che abbia un angolo eguale a un dato angolo. 151
XXXV. Teor. I triangoli eguali costituiti sopra una medesima base, e posti alla stessa parte, saranno nelle medesime paralelle, cioè avranno la medesima altezza. 152

Nel Libro III. della Geometria.

I. Teor. I paralellogrami egualmente alti, ovvero costituiti tra le medesime paralelle, saranno tra di loro in ragion delle basi. Similmente i triangoli, che hanno la medesima, o un'eguale altezza, saranno tra di loro in ragion delle basi. 154
II. Teor. Se in qualsivoglia triangolo si tira una retta paralella alla base, la stessa retta proporzionalmente taglierà gli altri due lati. Se poi due lati d'un triangolo proporzionalmente saranno tagliati da qualche retta, la stessa retta sarà paralella al lato rimanente, o sia alla base. 156
III. Probl. Da una data retta tagliare qualsivoglia parte ricercata, per esempio la terza parte. 157

IV. Probl.

IV. Probl. *Dividere una data retta nella ſteſſa maniera, con cui un' altra retta ſia ſtata diviſa.* 157
V. Probl. *Date due rette linee ritrovarne una terza proporzionale.* 158
VI. Probl. *Date tre rette linee ritrovare la quarta proporzionale.* 159
VII. Teor. *I triangoli equiangoli avranno proporzionali i lati oppoſti agli angoli eguali.* 159
VIII. Teor. *I triangoli, che hanno i lati proporzionali, ſono anche equiangoli.* 160
IX. Teor. *I triangoli, che hanno un angolo uguale a un angolo, e i lati, che coſtituiſcono i medeſimi angoli, proporzionali; avranno gli angoli rimanenti uguali, a' quali ſono oppoſti i lati proporzionali; e gli ſteſſi triangoli ſaranno ſimili.* 161
X. Teor. *Se per qualſivoglia punto del diametro d'un paralellogramo ſi tirino due rette paralelle ai lati del medeſimo paralellogramo, le ſteſſe rette divideranno tutto il paralellogramo in quattro paralellogrami, due de' quali, che ſono intorno al diametro, ſaranno ſimili all' intero paralellogramo, e tra di loro: gli altri poi due paralellogrami, che dicanſi* Compimenti *di quelli, che ſono intorno al diametro, ſaranno tra di loro eguali.* 162
XI. Teor. *I paralellogrami ſimili, e collocati in ſimil maniera, che hanno un angolo comune, ſaranno poſti intorno al medeſimo diametro.* 163
XII. Probl. *Sopra una data retta terminata deſcrivere un retilineo ſimile a un dato rettilineo, e poſto in ſimil modo.* 164
XIII. Teor. *I triangoli ſimili ſono tra di loro in ragion duplicata, cioè come i quadrati de' lati omologi.* 164
XIV. Teor. *I paralellogrami equiangoli ſono tra di loro in ragione compoſta dalle ragioni de' lati, che coſtituiſcono gli angoli eguali.* 165
XV. Teor. *I poligoni ſimili ſono tra di loro in ragion duplicata, o ſia come i quadrati de' lati omologi.* 167
XVI. Teor. *Se vi ſaranno quattro, o più linee rette proporzionali, anche i poligoni ſimili, e ſimilmente da eſſe deſcritti, ſaranno proporzionali. E ſcambievolmente ſe poligoni ſimili, e ſimilmente deſcritti da linee rette, ſaranno proporzionali, anche le ſteſſe rette ſaranno proporzionali.* 168
XVII. Teor. *In ogni triangolo rettangolo ſe dall' angolo retto ſopra l' ipotenuſa ſi cali una linea perpendicolare, eſſa dividerà tutto il triangolo in due triangoli, ſimili al tutto, e tra di ſe pure ſimili.* 169
XVIII. Teor. *Se ſopra l' ipotenuſa di qualſivoglia triangolo rettangolo ſi deſcriva qualſiſia figura retilinea, e ſopra i catèti ſi deſcrivano due figure ſimili alla medeſima figura, e poſte in ſimil modo; la figura deſcritta ſopra l' ipotenuſa ſempre ſarà eguale alle due figure deſcritte ſopra i catèti preſe inſieme.* 170
XIX. Probl. *Ritrovare una linea retta, il di cui quadrato eguagli i quadrati di più date linee.* 172

Nel Libro IV. della Geometria.

I. Teor. *I circoli concentrici hanno le periferie paralelle, o ſia equidiſtanti.* 175
II. Teor. *Una retta linea tirata dal centro di un circolo alla metà di qualſivoglia*

voglia corda, sarà perpendicolare alla medesima sutteſa. Scambievolmente ſe dal centro a qualſivoglia corda ſi tiri una linea perpendicolare, la ſteſſa ſeghera in due parti la medesima sutteſa. 175
III. Probl. Ritrovare il centro d' un dato circolo. 176
IV. Probl. Ritrovare il centro d' un dato arco, per deſcrivere l' intera periferia. 176
V. Teor. Se da qualche punto dentro d' un circolo ſaranno tirate alla periferia tre rette linee tra di loro eguali, quel punto ſarà il centro del circolo. 177
VI. Probl. Per qualſivoglia punto d' una periferia tirare la tangente del circolo. 178
VII. Teor. L' angolo al centro è duplo dell' angolo alla periferia, quando inſiſtono ſopra un medeſimo arco. 179
VIII. Teor. Un quadrilatero, che ha tutti gli angoli nella periferia d' un circolo, avrà gli angoli oppoſti preſi inſieme eguali a due retti. 180
IX. Teor. Un angolo iſcritto dentro d' un ſemicircolo, ſempre è retto. 181
X. Probl. Da un punto dato fuori d' un circolo tirare una retta tangente del circolo. 181
XI. Teor. L' angolo contenuto dalla tangente d' un circolo, e dalla corda tirata pel punto del contatto, è uguale all' angolo iſcritto nell' oppoſto ſegmento del circolo. 182
XII. Teor. Ne' circoli eguali, ovvero nel medeſimo circolo, gli angoli eguali coſtituiti o ai centri, o alle periferie, inſiſtono ſopra archi eguali. Che ſe gli archi ſaranno eguali, gli angoli inſiſtenti coſtituiti o ai centri, o alle periferie ſaranno pure eguali. 183
XIII. Teor. Ne' circoli eguali, o nel medeſimo circolo, le corde eguali ſuttendono archi eguali. Vicendevolmente ſe gli archi ſaranno eguali, anche le corde ſuttendenti i medeſimi archi ſaranno tra di loro eguali. 184
XIV. Probl. Dividere un dato arco in due parti. 184
XV. Teor. In qualſivoglia circolo ſe due rette nell' una, e nell' altra parte della periferia terminate ſcambievolmente ſi ſeghino, il rettangolo contenuto dalle parti d' una ſarà eguale al rettangolo contenuto dalle parti dell' altra retta. 185
XVI. Teor. Se da qualſivoglia punto fuori d' un circolo ſi tirino due rette, una delle quali tocchi il circolo, e l' altra ſeghi lo ſteſſo circolo; il quadrato della tangente ſarà eguale al rettangolo contenuto da tutta la ſegante, e dal di lei ſegmento poſto fuori del circolo. 185
XVII. Probl. Dividere una data retta terminata in due parti, coſicchè tutta alla parte maggiore abbia la medeſima ragione, che avrà la ſteſſa parte maggiore alla minore. Il che diceſi: Dividere una retta linea con la ragione media, ed ultima. 186
XVIII. Probl. Date due rette ritrovare la media proporzionale. 187
XIX. Teor. Se una retta ſi ſeghi in due parti uguali, e ad eſſa dirittamente vi ſi aggiunga qualſivoglia altra retta, il quadrato della metà della linea coll' aggiunta ſarà eguale al rettangolo contenuto dalla data coll' aggiunta, e dall' aggiunta aſſieme col quadrato della metà. 189
XX. Teor. Se una retta linea ſi divida in due parti eguali, e in due parti ineguа-

ineguali, il rettangolo contenuto dalle parti ineguali assieme col quadrato dell'intermedia saranno eguali al quadrato della metà. 189

XXI. Teor. *Se qualsivoglia retta terminata si divida in qualunque modo, il quadrato di tutta sarà eguale ai quadrati delle parti assieme col duplo rettangolo contenuto dalle stesse parti.* 190

XXII. Teor. *Se in qualche triangolo il quadrato d'un lato sarà eguale ai quadrati de' lati rimanenti, l'angolo contenuto da' lati rimanenti sarà retto.* 191

Nel Libro V. della Geometria.

I. Teor. *Se dal centro de' circoli concentrici si tirino quanti raggi si vogliano, che seghino l'una e l'altra periferia, e si tirino altresì molte corde, i poligoni iscritti ne' medesimi circoli saranno simili.* 193

II. Teor. *Le simili figure regolari iscritte ne' circoli sono tra di loro come i quadrati de' raggi, o de' catèti, oppur de' diametri.* 194

III. Teor. *Un circolo è alla zona a se iscritta siccome il quadrato d'un raggio del medesimo circolo al rettangolo contenuto dalla larghezza della zona, e dall'altra parte del diametro del medesimo circolo.* 196

IV. Probl. *In un dato circolo iscrivere un quadrato.* 198

V. Probl. *In un dato circolo iscrivere un esagono regolare.* 198

VI. Probl. *Intorno a un dato circolo circoscrivere un poligono equiangolo a un dato poligono.* 200

VII. Probl. *In un dato triangolo iscrivere un circolo.* 201

VIII. Teor. *L'area di qualsivoglia poligono regolare è uguale a un triangolo, la di cui base uguagli il perimetro, e l'altezza sia eguale a un catèto del medesimo poligono.* 202

IX. Teor. *Il circolo è la maggiore, e la più capace di tutte le figure regolari a se isoperimetre.* 204

Nel Libro VI. della Geometria, in cui trattasi de' Solidi.

I. Teor. *Ogni figura piana tutta sta a giacere nel medesimo piano.* 210

II. Teor. *La comun sezione di due piani è una linea retta.* 210

III. Teor. *Se una retta linea sarà perpendicolare a due rette, le quali scambievolmente si seghino, la stessa retta sarà anche perpendicolare al piano, in cui giacciono le stesse rette.* 211

IV. Teor. *Le linee rette perpendicolari a un medesimo piano saranno tra di lor paralelle.* 211

V. Teor. *Se a una medesima retta linea saranno paralelle altre due rette, ma non esistenti nello stesso piano con quella, esse pure saranno tra di lor paralelle.* 212

VI. Teor. *Se due rette, le quali a vicenda si segano in un piano, saranno paralelle alle rette, che scambievolmente si segano in un altro piano, i due piani saranno parimenti tra di lor paralelli.* 213

VII. Teor. *Qualsivoglia prisma poligono dividesi in altrettanti prismi triangolari egualmente alti, quanti sono i lati della base, toltine due.* 214

VIII. Teor. *Se un prisma triangolare sia segato trasversalmente da un piano paralello alla base, la sezione sarà simile, ed eguale alla base. Se poi qualsivoglia prisma poligono sia segato da un piano paralello alla base, la sezione sarà parimenti eguale, e simile alla base.* 215

IX. Teor. *Si concepisce, che ogni prisma sia composto da altrettanti piani eguali alla base, e paralelli, quanti sono gli elementi, o punti nell' altezza del medesimo prisma: e il prodotto dall' altezza nella base sarà la solidità del medesimo prisma.* 216

X. Teor. *Se qualsivoglia piramide triangolare si seghi trasversalmente da un piano paralello alla base, la sezione sarà simile alla base. La base poi a qualsivoglia sezione a se paralella sarà come il quadrato dell' altezza di tutta la piramide al quadrato dell' altezza della tagliata piramide.* 217

XI. Teor. *Le piramidi egualmente alte, ovvero costituite tra piani paralelli, sono fra di loro in ragion delle basi.* 218

XII. Teor. *Un prisma è il triplo d' una piramide, che abbia la medesima, o un egual base, e la medesima, o un' egual altezza.* 220

XIII. Teor. *Se qualsivoglia prisma sia segato da un piano paralello alla base, i segmenti del diviso prisma saranno tra di loro in ragion delle altezze, o de lati.* 221

XIV. Teor. *Gli prismi egualmente alti sono tra di loro in ragion delle basi.* 222

XV. Teor. *Gli prismi, che hanno le basi eguali, sono tra di loro in ragion delle altezze.* 222

XVI. Teor. *Gli prismi, quali si vogliano, sono tra di loro in ragione composta dalle ragioni delle basi, e delle altezze.* 223

XVII. Teor. *Gli prismi, che hanno le basi in ragion reciproca delle altezze, sono eguali: All' opposto i prismi eguali hanno le basi in ragion reciproca delle altezze.* 224

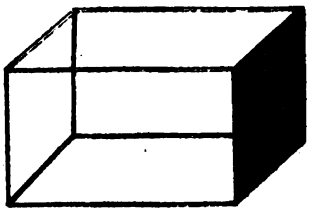
XVIII. Teor. *Una Sfera è uguale a due terze parti del cilindro circoscritto.* 225

XIX. Teor. *Le Sfere sono tra di loro in ragion triplicata, cioè come i cubi de' diametri.* 226

IL FINE.

TAVOLA I.

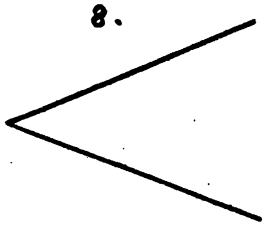
1.



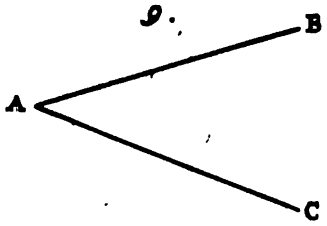
2.

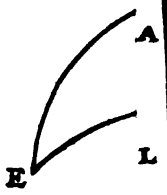


8.

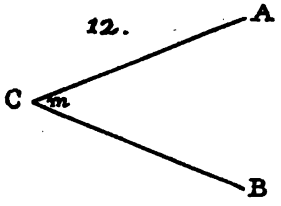


9.

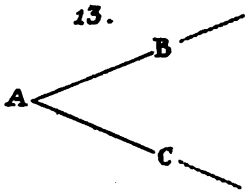




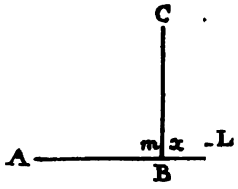
12.



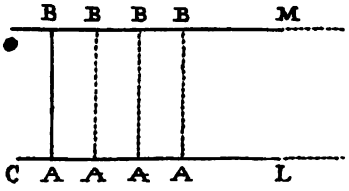
13.



14.



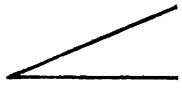
17.



18.



19.



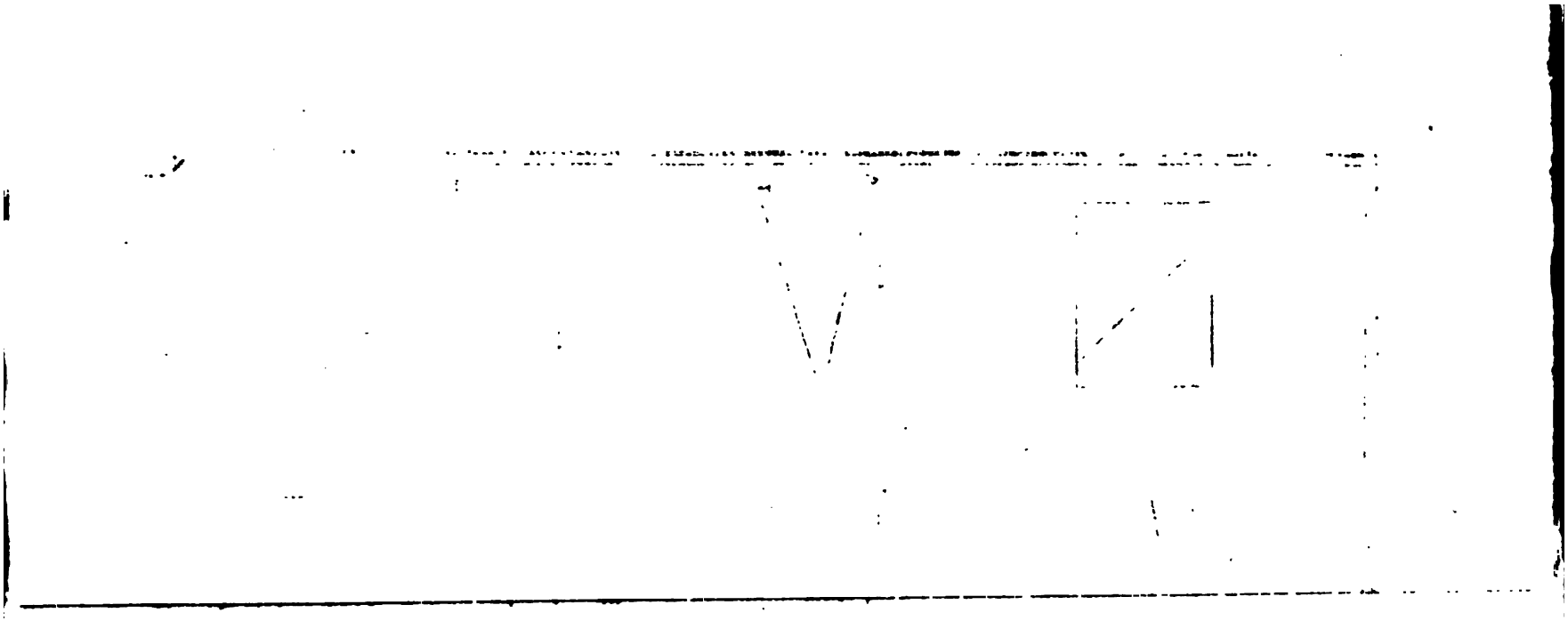
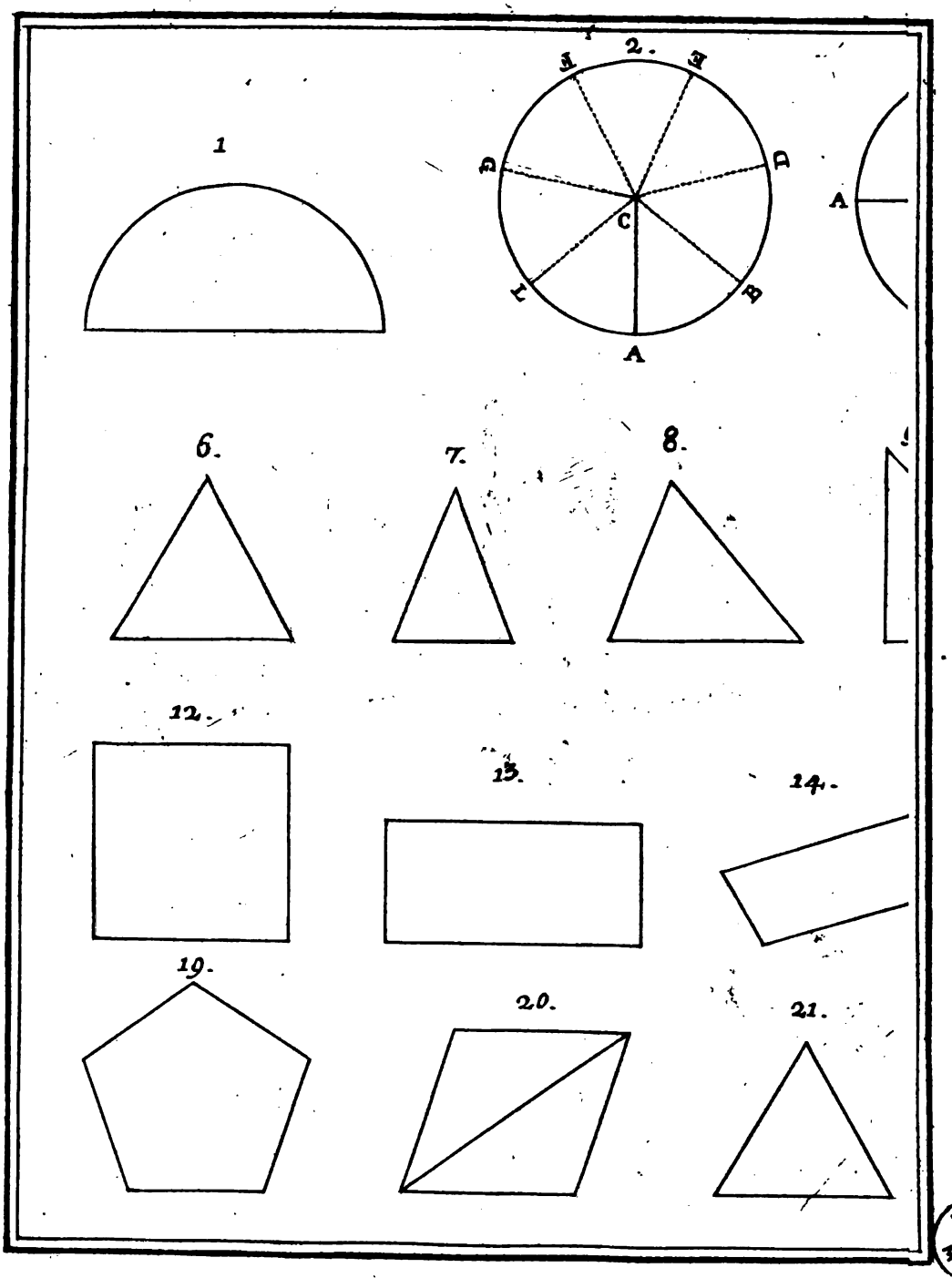


TAVOLA II.



UNIV. OF MICH.

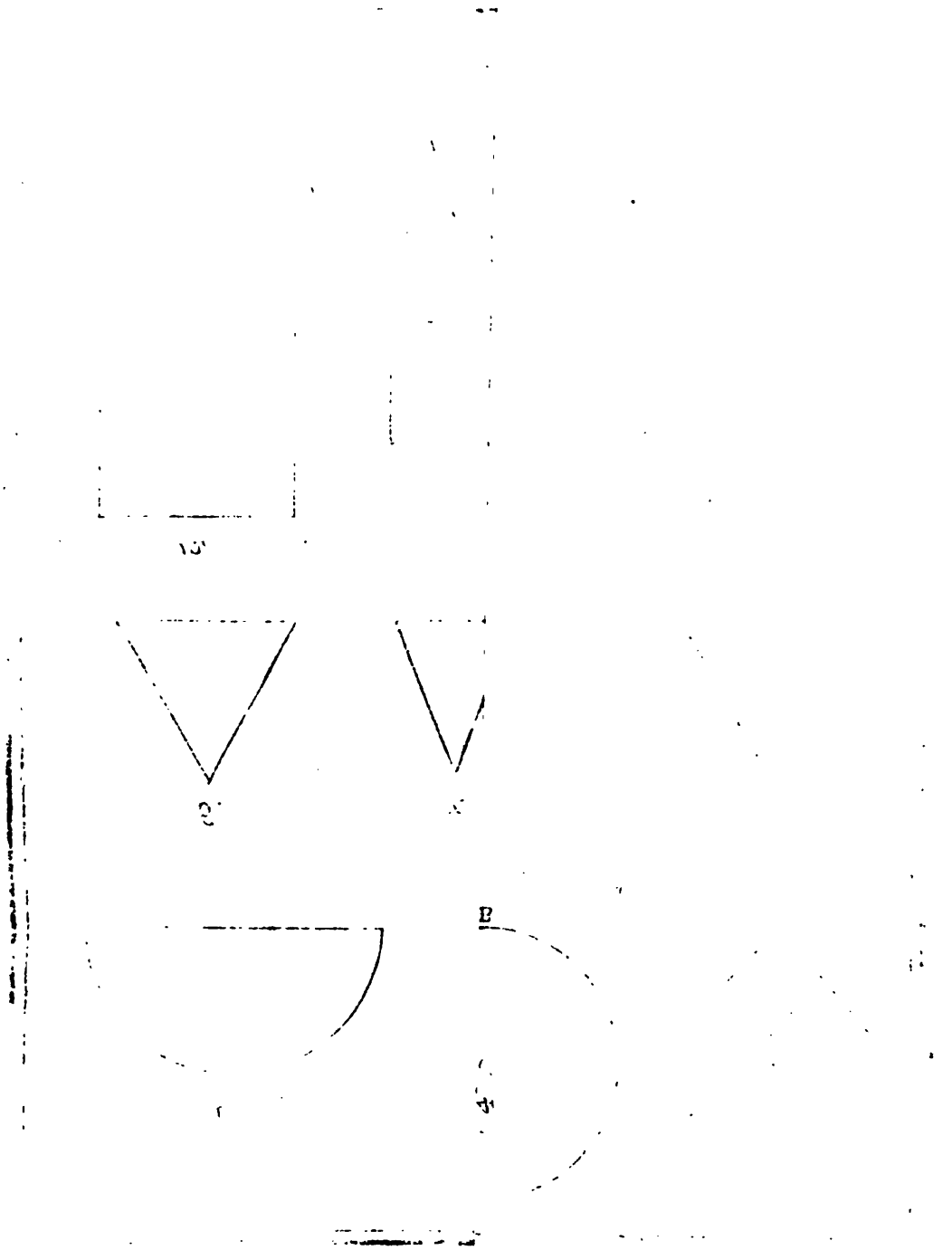
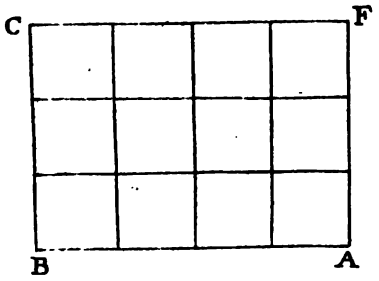
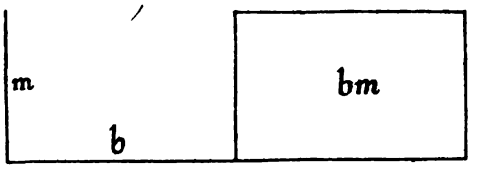

B

TAVOLA III.

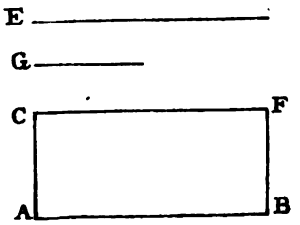
1.



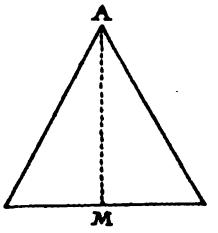
2.



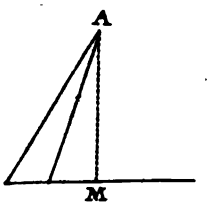
5.



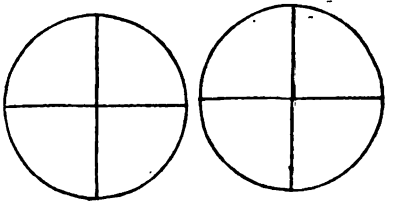
6.



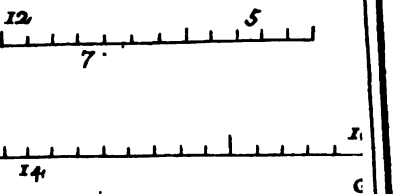
6.



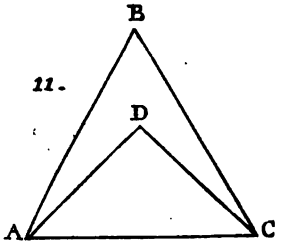
7.



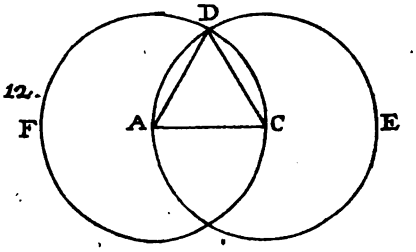
8.



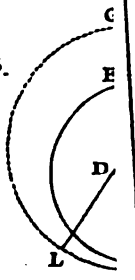
11.



12.



13.



UNIV. OF MICH.

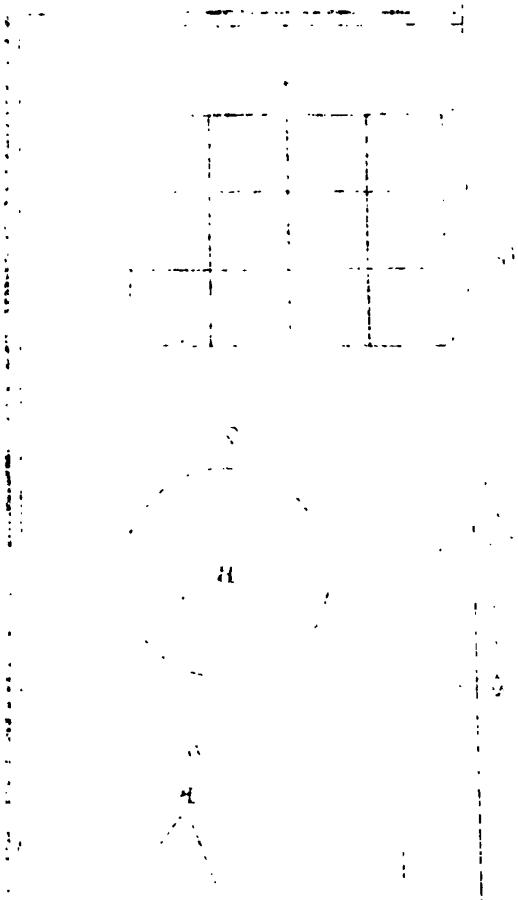
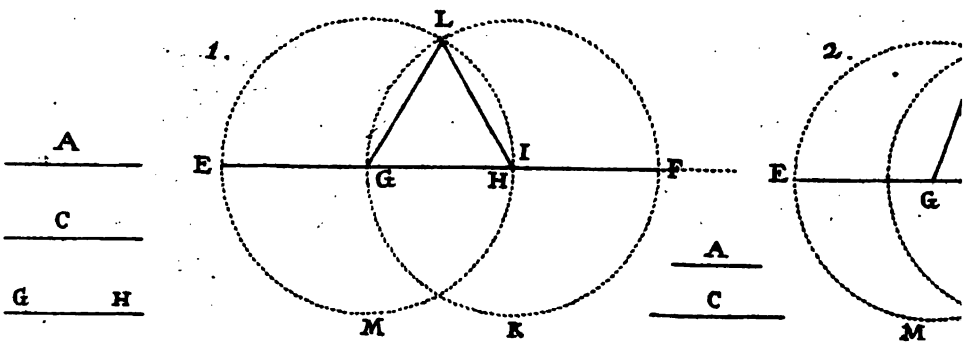
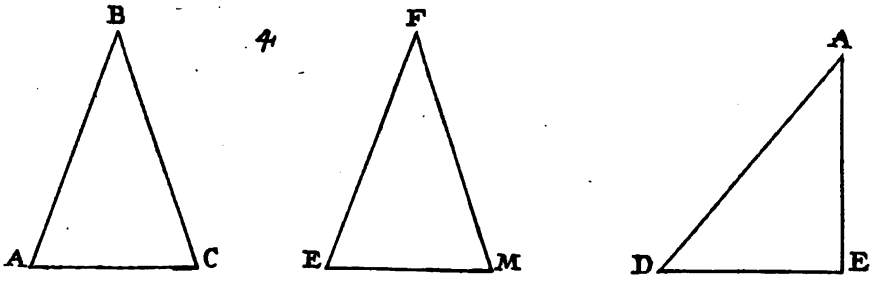
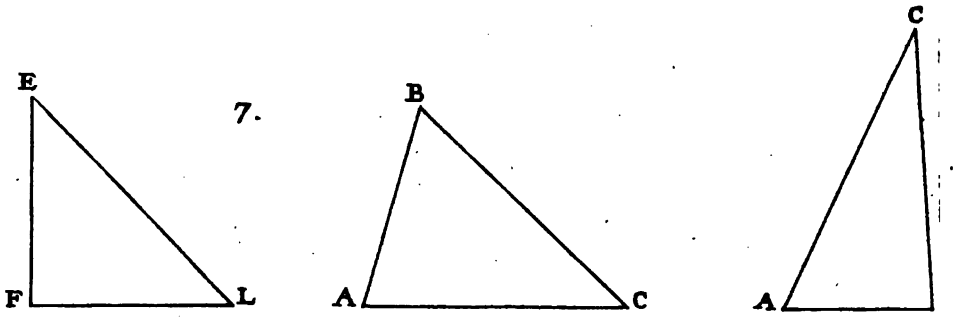
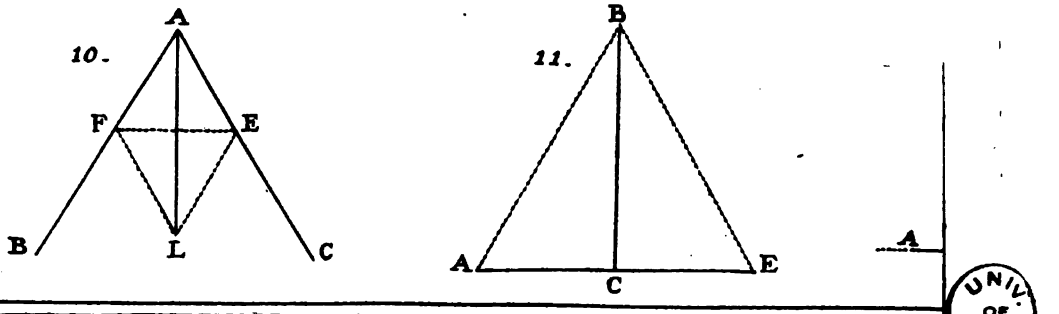


TAVOLA IV.



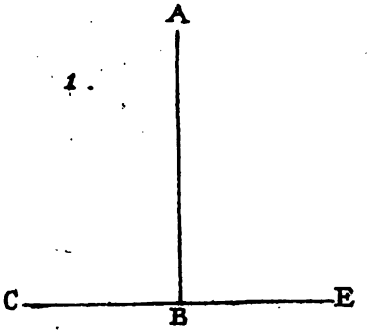


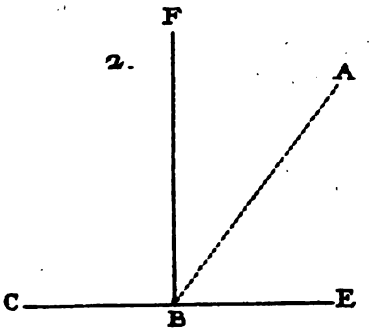


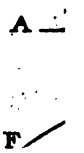


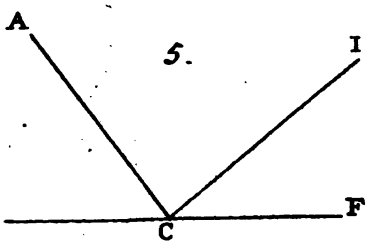
UNIV. OF MICH.

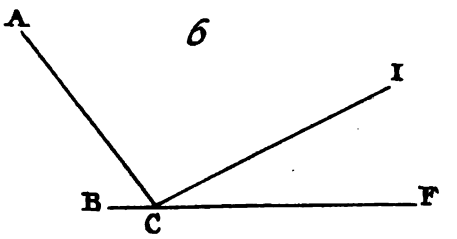
TAVOLA V.

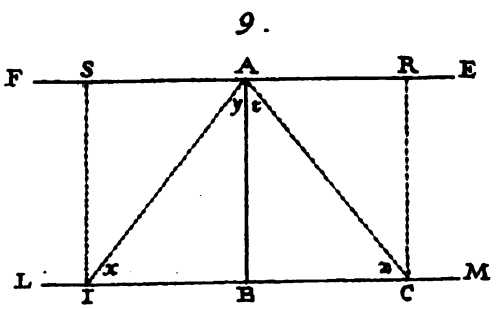


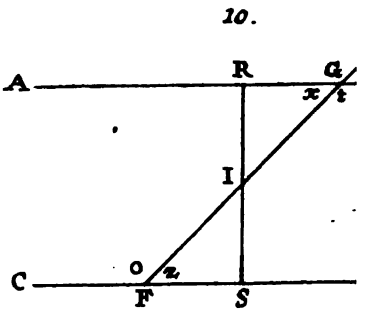


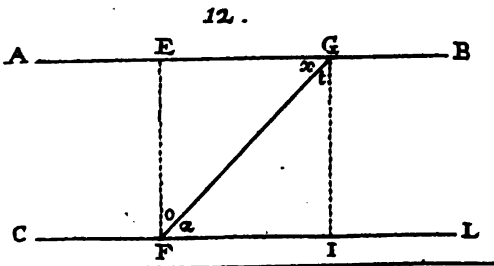


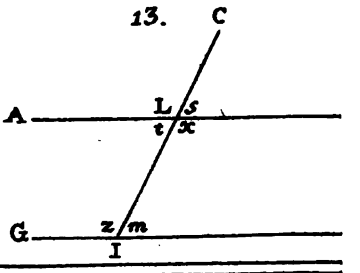








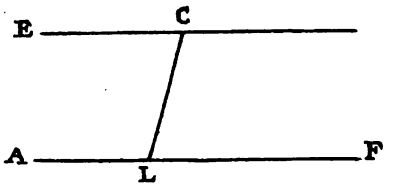




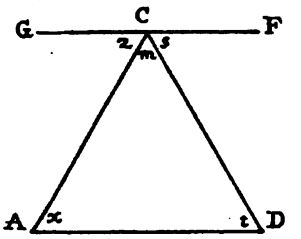
UNIV. OF MICH.

TAVOLA VI.

1.

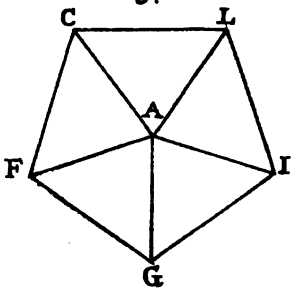


2.

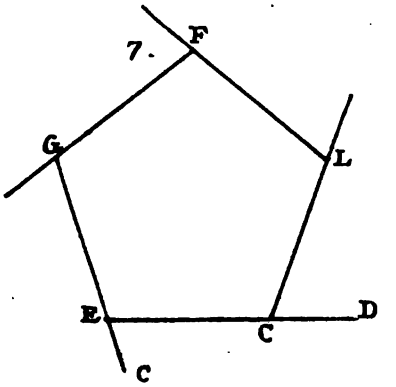




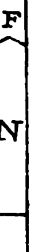
6.



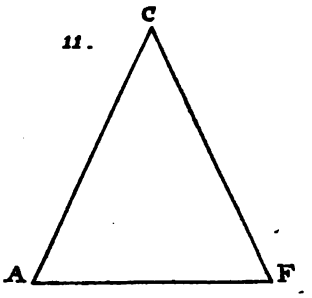
7.



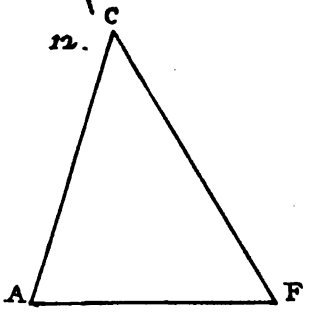
7



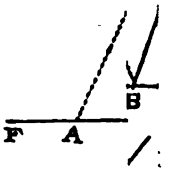
11.



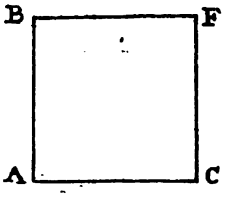
12.



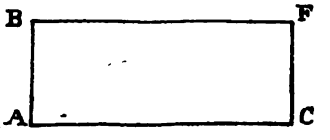
15.



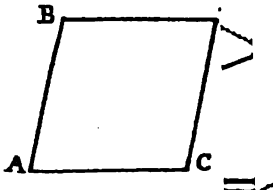
16.



17.

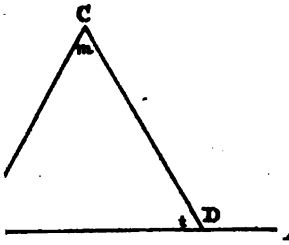


18.

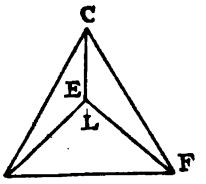


UNIV. OF MICH.

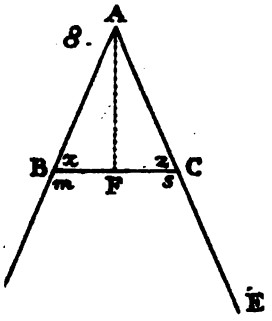
3.



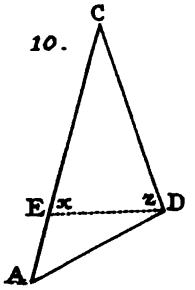
5.

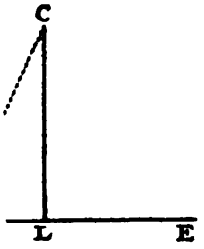


8.

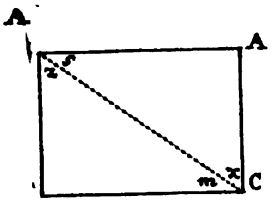


10.



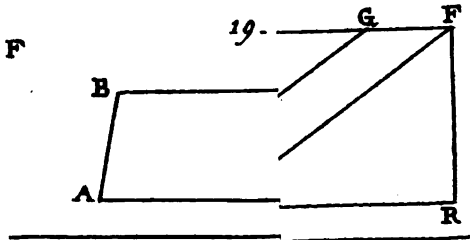


15.



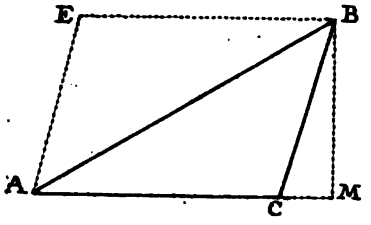
20.

19.

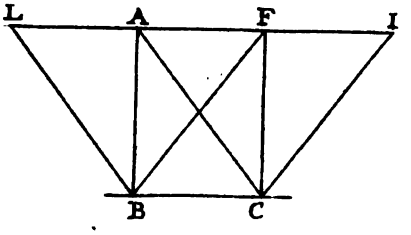


UNIV. OF MICH.

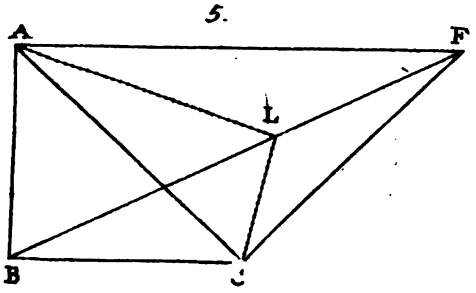
1.



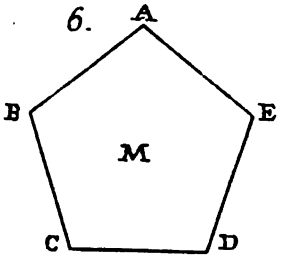
2.



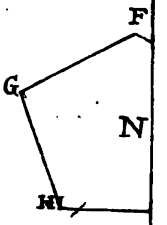
5.



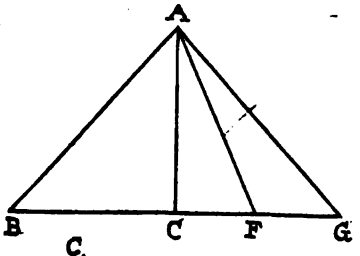
6.



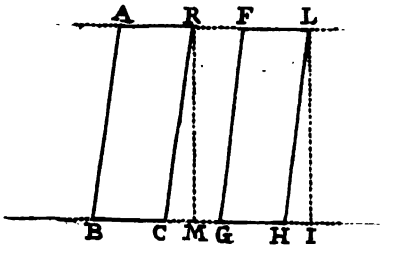
7.



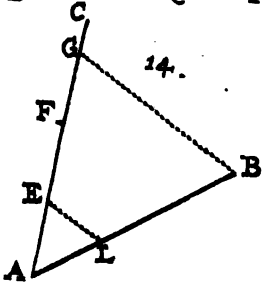
10.

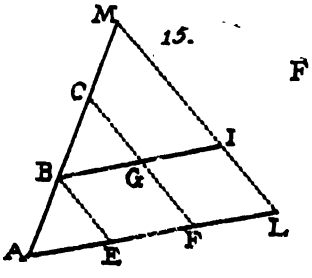


11.

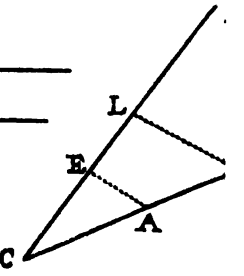








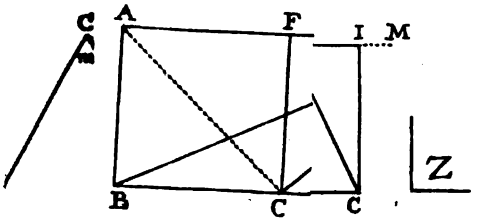




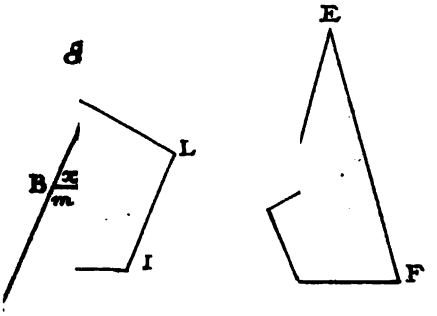
UNIV. OF MICH.

3

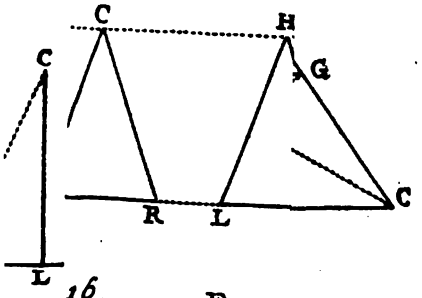
3.



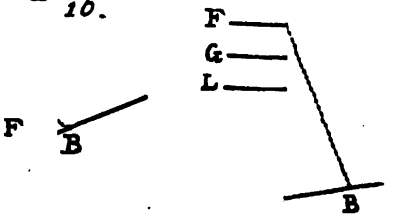
8



12.

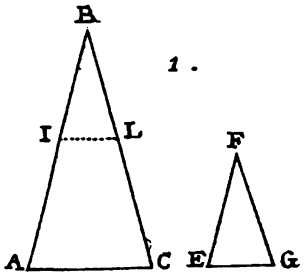


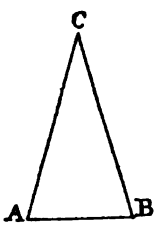
16.

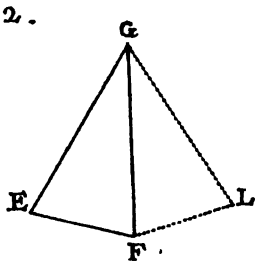


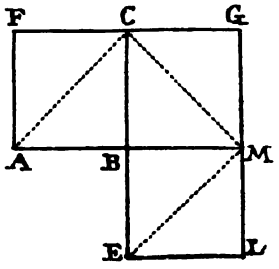
UNIV. OF MICH.

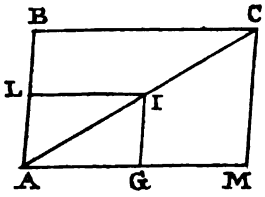
TAVOLA VIII.



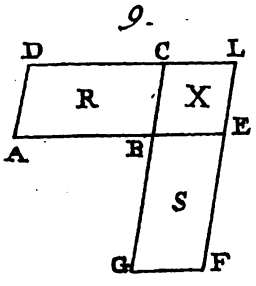


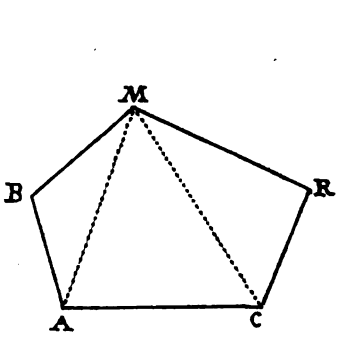


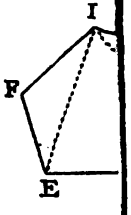


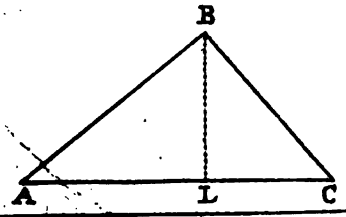


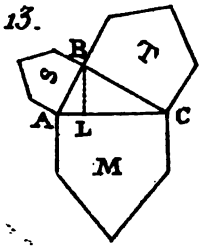


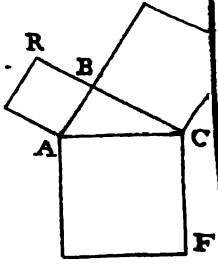




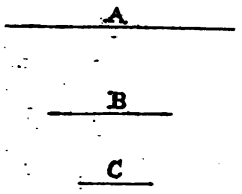




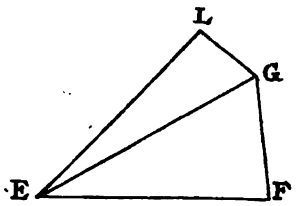




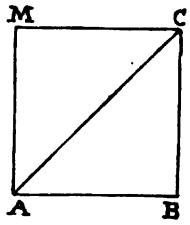
UNIV. OF MICH.



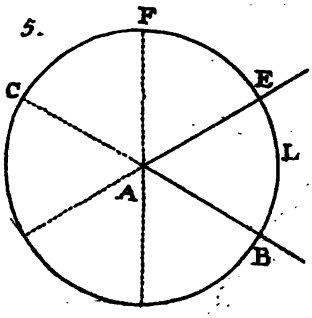
1.



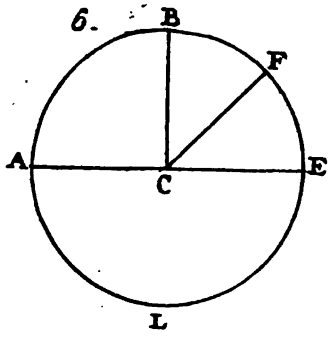
2.



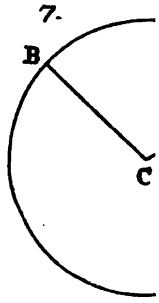
5.



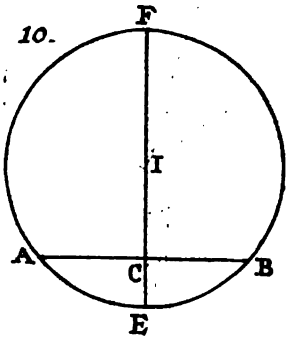
6.



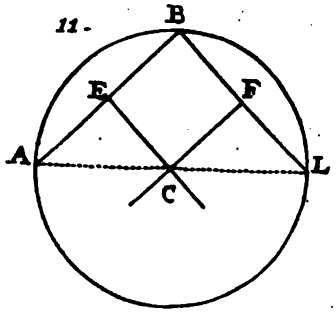
7.



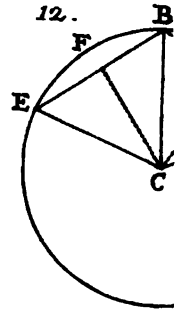
10.



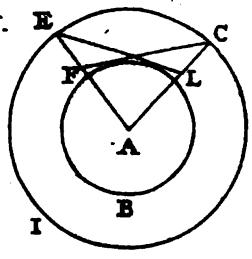
11.



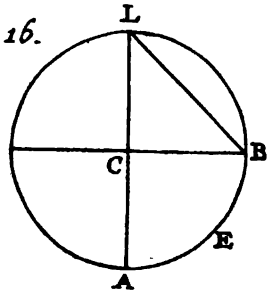
12.



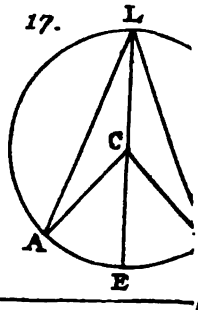
15.



16.

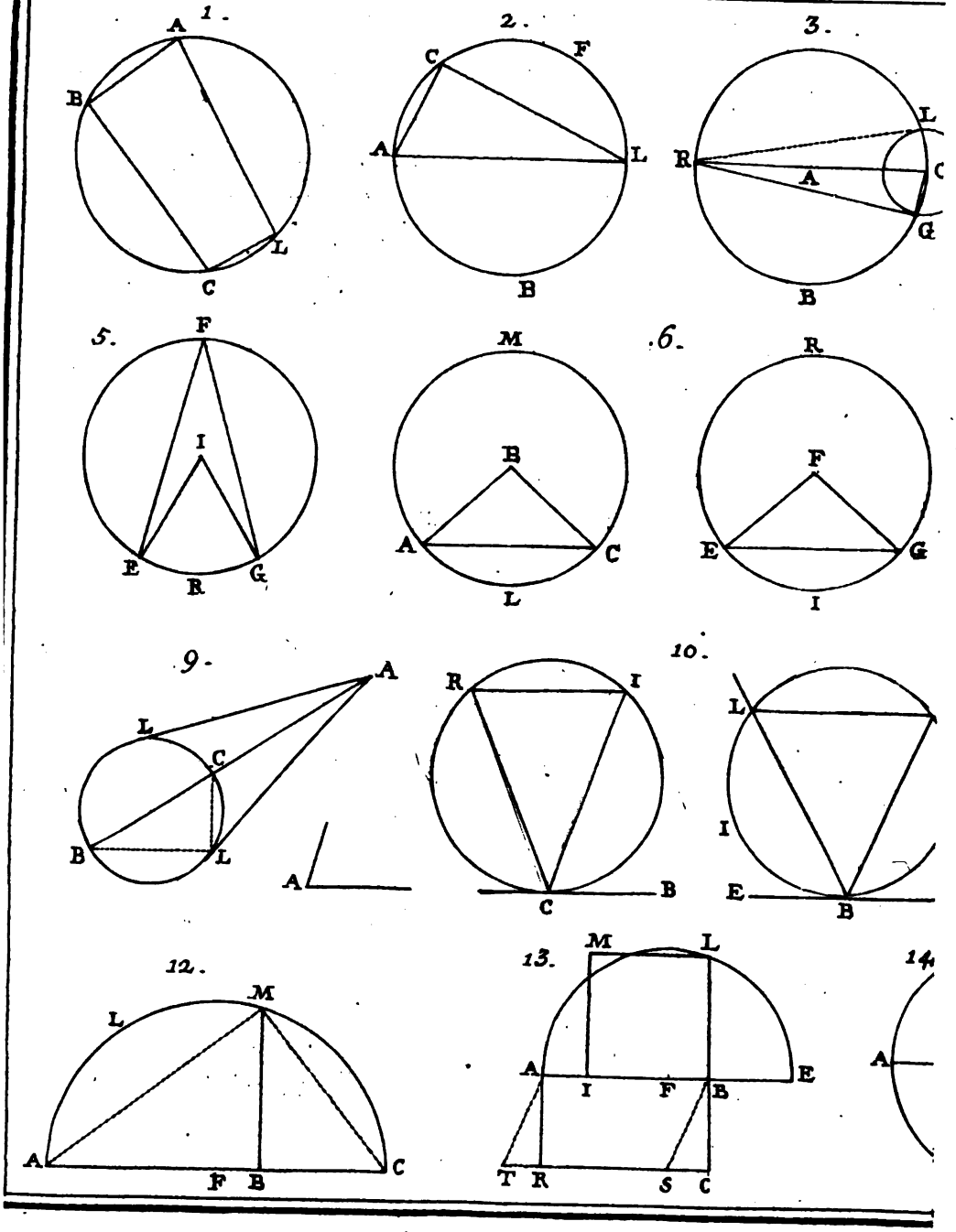


17.



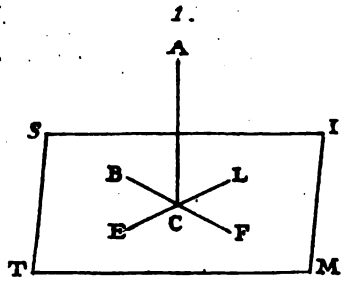
UNIV. OF MICH.

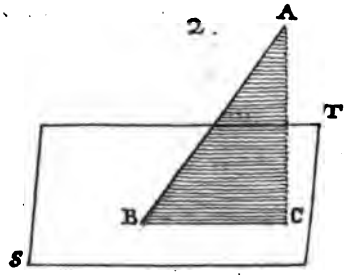
TAVOLA X.

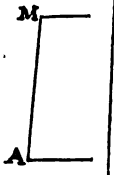


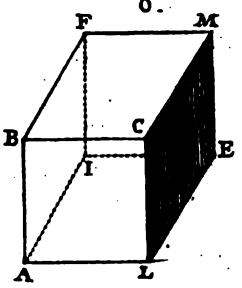
UNIV. OF MICH.

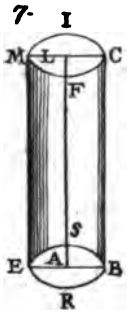
TAVOLA XII.

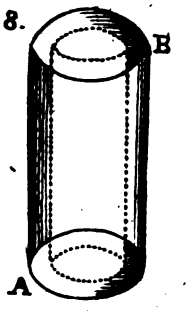

1.
A
S
I
B
L
E
C
F
T
M

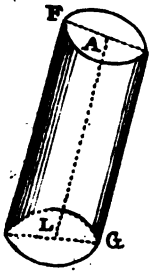

2.
A
T
B
C
S

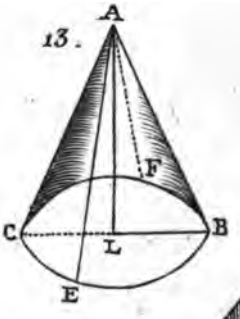

M
A

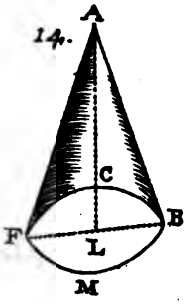

6.
F
M
B
C
E
I
A
L

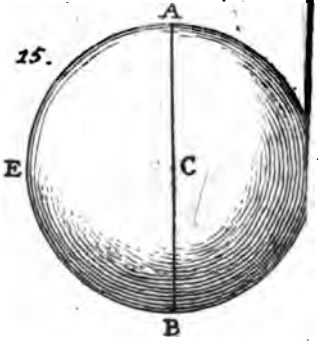

7.
I
M
L
C
F
S
E
A
B
R

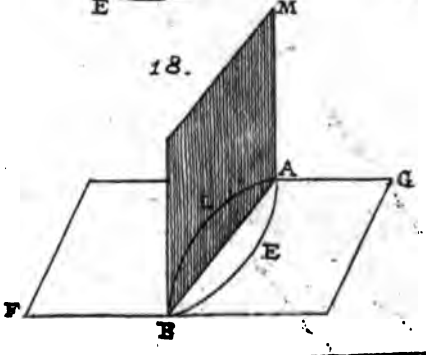

8.
B
A

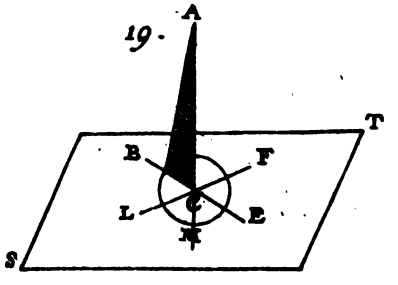

9.
F
A
L
G


13.
A
F
C
L
B
E


14.
A
C
F
L
B
M


15.
A
E
C
B


18.
M
A
G
L
E
F
B


19.
A
T
B
F
L
C
E
N
S